学生物理实验守则

1. 实验课前必须认真阅读教材作好预习，并按要求写出预习报告。无预习报告不得做实验,该次实验无成绩。

2. 进入实验后要保持安静，服从教师和工作人员的指导。专心听讲、认真操作，正确读数和记录,不得草率敷衍,拼凑数据。

3. 遵守纪律、爱护仪器。凡迟到者要酌情扣分,迟到 10 分钟不得做实验。要按指定组别做实验，不可乱动及擅自调换仪器。损坏仪器要及时报告，根据情况按规定给予赔偿。

4. 实验完毕应先将数据交教师审阅、签字通过，才能拆除线路与装置。数据记录不能用铅笔书写,仪器要经工作人员检查,整理复原后方可离开实验室。

5. 实验课后按要求写出实验报告，于下次实验课前由课代表收齐交教师批阅。迟交报告按不及格论，不交报告该次实验无成绩。一学期累计三次不及格或无实验报告者不得参加期末考试，本学期实验成绩按不及格论。交报告时应附教师签字的原始数据记录。

6. 预习报告和实验报告必须独自完成。抄袭与被抄袭的学生该次实验均无成绩。

7. 平时成绩根据预习报告、实验操作和实验报告情况评定。学期成绩包括平时成绩和期末成绩。考试成绩达不到最低标准的，不与平时成绩平均计算学期成绩，学期成绩均按不及格论。

8. 学生有义务在实验后打扫实验室卫生。

【附注】

预习要求及预习报告、实验报告书写要求：

实验课前必须认真阅读教材，明确该次实验的目的与要求，弄懂实验原理，了解所用仪器及实验内容。在此基础上写出“预习报告”。预习报告内容：

1. 实验人姓名、班级、学号、组别、同组人姓名、实验日期。

2. 实验名称,实验目的要求,实验仪器。

3. 原理摘要 在理解的基础上,用自己的语言简要地写出测量某物理量,进行某种研究所依据的主要物理原理、方法及主要公式，包括原理图、线路图或光路图，要有必要的说明。

4. 简要步骤：简要写出实验过程的主要步骤。

除上列 4 项要求外,还要在‘原始数据记录纸”上简要画出数据记录表格,以备课堂上记录实验数据。

实验报告内容：

1,2,3,4 项既为预习报告,也是实验报告的一部分,不必再重写。

5. 数据表格、数据处理、误差分析 用实验报告纸画正式数据表格,将所测数据填入表格中,并按要求进行数据处理。表格以外的数据处理内容应写出计算公式,并代人数据,再写出计算结果。需画图的应按规定要求画图。进行误差分析。

6. 讨论 对某个问题、某种现象的看法、体会和分析,对实验内容的意见和建议等,可根据自己的具体情况进行讨论。

绪　论

大学物理实验是理工类专业学生进入大学后首先要学习的实验课程。本课程教学的基本目的是培养与提高学生的科学素养和能力，使学生受到系统的物理实验基本知识、实验方法、实验技能的训练。在教学改革的新形势下，物理实验的目的与作用的新内容是培养学生的创造意识与创新能力。这里说的科学素养主要是指科技工作者应具备的科学的世界观，科学的方法论指导下的研究方法，高尚的职业道德，正确的科学价值观和优秀的心理素质等。人们获取的知识与掌握的技能，通过内化而形成科学素养。而科学素养又在人们的科学活动中很自然地起着指导和规范人们行为的作用。在培养适应知识经济时代的工程技术人员的过程中，物理实验课的作用是任何课程不可替代的。

物理学的知识，它的世界观，它的思维方式及研究方法，一直在优秀人才的身上发挥着重要作用。现代高技术的发展没有一项不与物理学发展有着直接的或间接的联系。而物理实验又是物理学发展的基础。

物理学研究的是以认识物质世界的基本属性，研究物质运动的基本规律为对象的。自然界由运动着的物质组成，从宏观到微观，物理学研究各种物质的存在形式，如电磁场是物质，光是物质等等。物理学还研究物质的客观属性，如物质运动的基本形式与规律，及其互相转换的条件。观察与实验是科学研究的基本方法，物理实验基本的任务是测量，不论是直接的还是间接的都是观察的定量反映，这也是认识物质世界最基本的方法。

人们的认识不断加深，真理的绝对性与认识的相对性在实验测量值的认识上有了具体的表现。真值是客观存在的，只能接近而永不能达到。测量值的精度可以随着技术发展、仪器的更新不断提高，但客观真值是达不到的。人们对客观世界的认识就是如此。相对论及量子理论出现后，人们对物质世界又有了新的认识，也说明了这一点。

物理实验不仅是技能的训练，更重要的是科学世界观的培养。在整个学习中，学生应通过测量方法学习、实验仪器的使用、实验条件的建立、实验结果的分析，培养科学的唯物主义的世界观。科学的研究方法对科学发现与发明起着重要作用，科技工作者应从唯物主义的方法论出发指导自己的研究。因此学生应注意培养自己的这种科技工作者应具备的基本素养。

每一个物理实验都包含着矛盾的对立统一。做实验就是解决矛盾，在实验中不仅仅要解决具体问题，更重要的是要熟悉观察实验，掌握抽象、假说、数学和逻辑方法等自然科学研究的一般方法，及掌握物理实验中具体的研究方法，学习实验的设计思想与设计路线，研究问题的各种基本方法，这是物理实验的关键。如在改表实验中的替代法；在拉伸法测金属丝的杨氏模量实验中的光放大法；电磁学实验中的电信号放大法；在电位差计实验中的补偿法；在声速测量实验中的干涉法及比较法；在非电量测量实验中，声、光、热、力的转换测量法；模拟法测静电场实验中的模拟法；在示波器实验及某些近代物理实验中的动态测量法，这些都是具体的实验方法。此外还有实验数据处理的基本方法如 数字平均法、最小二乘法、分组求差法等。

在实验中还要锻炼学生与人合作的精神、克服挫折的心理准备、选择与批判的能力、独立判断能力、文学修养等。学生要注重培养自己的实事求是的科学态度和严肃认真的工作作风。实事求是就是既要客观地反映研究的结果，又要从实际出发，灵活、务实地处理问题。

一、物理实验课的目的与任务

1. 进行实验现象的观察与分析的训练，学习基本物理实验方法与技术、常用物理量的测量、常用仪器的使用，使学生了解并掌握物理实验的一些基本知识，加深对物理学基本原理的理解，学会物理实验的一些基本技能。掌握物理实验的基本方法，如比较法、补偿法、替代法、放大法、转换测量法、模拟法等。

2. 培养与提高学生在实验中提出和发现问题、分析问题的能力以及独立实验的能力。能够阅读实验教材、理解实验的基本原理与内容；能借助教材或仪器使用说明书正确使用常用仪器；能正确取得实验数据。掌握误差理论的基本知识，掌握有效数字运算及数据处理的方法。绘制图标、曲线，能分析、说明实验现象与结果，能简单的分析误差，写出简明扼要的实验报告。

3. 培养与提高学生的科学实验素养。培养学生理论联系实际、实事求是的工作作风；严肃认真的工作态度、不怕困难、勇于探索的精神和遵守纪律、爱护公共财物、相互协作的优良品德 爱护仪器设备，遵守实验室各项规章制度和实验操作规程，维护实验室整洁卫生。

二、物理实验课的教学要求与学习方法

大学物理实验分三个步骤进行：

（一）课前预习

课前预习是做好实验的前提。在实验之前应仔细阅读教材和相应的参考资料，明确实验依据的原理、要点，实验方法、特点，所用仪器装置大致结构及操作要点，重点是实验原理及实验方法的理解与掌握，对实验过程要有了解。在这个基础上，用自己的理解写出预习报告，报告要求见‘学生物理实验守则’附录。实验原理要简单明了，既要叙述清楚原理、内容、主要公式、原理图、电路图、光路图等，又要避免照抄教材。不这样做就达不到预习的目的。

思考题要认真预习，经思考仍不清楚的问题留在实验中加以解决。

（二）课堂实验

实验是中心环节。实际操作前要认真听老师讲解重点和难点，熟悉各种仪器的使用方法和操作规程，记录实验条件(如日期、同组人姓名、气压、湿度、温度等)，然后按实验内容及步骤进行实验。实验中，应仔细观察实验现象，如实、正确地记录实验数据，不允许随意涂改数据，更不允许抄袭他人的数据。所谓正确，是指按要求记录有效数字位。学生要发挥自己的主观能动性，遇到疑难问题或出现故障时，首先应自己分析解决，解决不了时，应及时请教指导教师。学生应独立完成实验，不提倡在操作过程中每一步都机械地对照讲义完成实验，要做到这些必须在预习时对实验过程有一个全面的了解。

（三）课后完成实验报告

善于对自己的工作做总结，才会有所收获，才能提高。实验报告是对实验结果全面评价的书面总结，是积累知识和进行学术交流的依据，是实验不可缺少的重要环节。实验报告应对原始数据进行处理，得出实验结果，并对实验结果进行评价、分析和讨论。分析和讨论的对象包括实验现象，误差来源及对实验结果的影响，实验方法的改进，个人心得体会和见解等。报告中注意数据处理是关键，最后实验结果的有效数字、误差(或不确定度)要正确表示。

第一章　测量误差与数据处理

研究物理现象，了解物理特性、验证物理原理都必须进行测量，物理实验就是以测量为基础,来研究观察物理规律。由于任何测量仪器、测量方法、测量环境、测量者的观察力等都不能做到绝对严密，这些就使测量不可避免地伴随有误差产生。如果将某待测物理量 N 的客观真实值标记为 $N_{真}$,而将该物理量的测量值标记为 N,则 N 只可能是 $N_{真}$ 的近似值。两者间的差异称为该测量值与真实值间的"误差",用 ΔN 标记,即

$$N - N_{真} = \Delta N$$

误差存在的必然性和普遍性，已为长期科学实践所证明，对误差研究的深入程度反映着人们对客观世界的认识程度。虽然科学技术和实验手段不断发展更新，人们对客观世界的揭示也愈来愈深刻，将误差控制得愈来愈小，但企图完全消除它却始终没有做到。

对于一个科学测量的结果，除给出它对某一计量单位的数值外，还必须给出该数据的可靠性，量值程度即它的误差情况。因此分析测量中可能产生的各种误差，尽可能消除其影响，对测量结果未能消除的误差作出估计，这是物理实验及诸多科学实验中必不可少的工作。

第一节　有效数字

测量值都是用若干个数字组成的数值表示的。在测量时如何正确记录数值即确定记录数据的位数是首先遇到的、必须解决的问题。这就是测量结果的"有效数字"问题。用有效数字表示测量结果是一种近似方法，一定要与误差理论联系起来才能对测量结果给予准确的描述。

测量可分为直接测量和间接测量两类。用某一个量具或仪表直接测出读出的量称为"直接测量量",而用几个直接测量量经过物理公式计算得出的量则称为"间接测量量"。

一、直接测量量的有效数字

1. 有效数字的概念

仪器上直接测读的数据位数是由被测量的大小及仪器的精密度决定的。在仪器最小分度为 1个单位的情况下，一般正确的读数是读到仪器最小分度以下再估读一位。例如：用最小分度为 1mm 的米尺测量一物体的长度。它的厘米部分及毫米部分可以借助尺上的刻度线准确读出，但毫米以下只能凭眼睛估计。但这最后一位的估读是因人而异的，即使是同一人在不同的时候估读值也不全相同，所以具有偶然性，因而它是欠准确的、可疑的。

任何测量值都有几位可靠的准确数字，而最后都有一位估计的但有意义的、可疑的、欠准确的数字。我们将可靠的几位数字及最后一位可疑数字合称为测量结果的"有效数字"。而有效数字的数字个数称为"有效数字的位数"。

2. 有效数字的特点

（1）用有效数字表示的测量值大小，其结果都是近似的，最后一位是可疑数字。但它在

一定程度上反映了被测量对象的大小信息，因而是有意义的。特别是从最后一位可疑位的单位即可知此测量结果不准确的大致范围，一般不会超过该单位的一半。

(2) 有效数字的位数与测量对象的大小以及所用仪器的精密度有关。可疑位的单位可反映所用仪器的“精密度”。测量结果的有效数字位数越多，则测量结果越精确。

仪器的精密度是指仪器的最小分度值，一般是可以测准的。最小分度以下的数需估读，为可疑位。如何估读要视分度的宽窄、目力分辨能力以及测量条件来定。

对数字显示式仪表，一般最后一位即为可疑位。

(3) 有效数字的位数与单位无关，有效数字是从测量值中第一位不等于零的数字算起。

通常将测量值写成“标准形式”,或叫“科学表达式”,即:“□.□□…×10^n”,其中□.□□…是有效数字，10^n 表示数量级。如

$$3.48\ \text{cm}=3.48\times10^{-2}\text{m}=3.48\times10^{1}\ \text{mm}$$

(4) 测量结果中不为零的数字以后的零是有效数字。

二、间接测量 的有效数字

由于间接测量量是通过直接测量量计算得到的，所以它的有效数字也是通过直接测量量的有效数字按照一定的运算法则得到的。运用这些法则还可简化实际运算过程。

1. 一般规则

(1) 可疑数字与准确数字（或可疑数字）之间的四则运算结果为可疑数字，但运算进位一般是准确数字；

(2) 运算最终结果只保留一位可疑数字，去掉后面一位可疑数字时，一般是用“四舍五入”法进行取舍。

2. 和、差、积、商的有效数字

由一般规则可以推得：

(1) 和(或差)的有效数字只保留到相加(或相减)各数中最大的可疑位。

例:$41.75+11.4\approx53.2$

(2) 积(或商)的有效数字位数与相乘(或相除)各量中有效数字位数最少的相同。

例:$34.17\times211\approx7.21\times10^3$

(3) 有的情况下积可能比此法则多得一位，商则可能比此法则少一位。

除法运算，当除到余下数首数为可疑数时，则该位商即为可疑数。

3. 对数和指数函数的有效数字

函数运算的有效数字不能用四则运算的规则，一般应运用微分公式求出误差来确定。

(1) 对数 某数 x 的自然对数 $\ln x$,其小数部分的位数与该数 x 的有效位数相同。

(2) 指数 因为 $\Delta(e^x)=e^x\Delta x$,取 Δx 为最后一位上的“1”,所以 e^x 的有效数字位数的取法为 将 e^x 的结果写成科学表达式后，小数点后保留的位数与 x 的小数后的位数相同。

对于间接测量的有效数字的两点说明：

(1)常数(如 π)及公式中系数(如:$\sqrt{2}$)的有效数字可以认为是可取任意位数。具体运算时取其位数比相关测量值多一位即可。

(2) 用计算器等计算工具运算时，最后结果须按有效数字运算法则决定位数。

第二节　误差理论基础

为了全面、科学地反映、评价测量结果，仅用上述的有效数字来近似的表示测量结果的大小和与真值的近似程度是不够的，还必须引入误差的概念。

一、误差的分类

按误差产生的原因及特点可将误差分为三类：

(1) 系统误差。在同一条件下,多次测量同一量值时,误差的数值与符号保持恒定,或在条件改变时按某一可确定的规律变化，即称为系统误差，它反映了测量值偏离真值的方向和大小，它的特征是它的确定性。

(2) 随机误差。在相同条件下,多次测量同一量值时,误差的数值与符号以不可预知、无法控制的方式变化，即称为随机误差，其特征是它的随机性。

(3) 疏忽误差。由于实验者操作不当或粗心大意造成的一种人为的差错，如读错刻度、读错数字、计算错误等。一般只要细心操作、计算、分析数据规律即可避免此类误差。有疏忽误差的数据必须从数据中剔除。

二、系统误差

(一)系统误差的来源

产生系统误差的原因有以下几个方面。

1. 仪器误差：①由于仪器本身的缺陷。如仪器零点不准、标尺刻度不准、天平臂不等长等。②没按规定条件使用造成的。如在 20℃标定的标准电阻、标准电池在较高或较低温度下使用等。

2. 方法、理论误差：如理论公式的近似性，非主要因素的忽略等。

3. 个人误差：由于测量者个人特殊的生理特点造成的习惯性偏向，如用停表时操之过急，计时数偏小；读指针读数时总是偏向一方等。

4. 环境误差 外界环境因素造成的误差。温度、湿度、气压、振动、电磁场、重力场等干扰造成的误差。

(二)系统误差的消除或减小

1. 测量结果引入修正量

由仪器、仪表不准确产生的误差可与更准确（级别高）的仪表作比较，得到应有的修正量；由于理论、公式的不准确产生的误差可通过理论分析得出修正的方法。

2. 采用合适的测量方法

(1) 交换法(对置法)。如惠斯通电桥测电阻,要求两臂长相等,即两臂 l_1、l_2 等长,但实际上做不到,所以如被测电阻为 R_x, 测量时使被测电阻与标准电阻 R_3 交换位置,即有

$$l_1R_{3右} = l_2R_x \text{ 及 } l_1R_x = l_2R_{3左}$$

$$\text{即得 } R_x = \sqrt{R_{3右}R_{3左}}$$

(2) 替代法。用已知量(标准量)替代被测量,从而发现、消除系统误差。如用惠斯通电桥测电阻时，先测被测电阻，使电桥平衡，然后用标准电阻代替被测电阻，保持所有条件与情况不变，使电桥重新平衡，则此时标准电阻值即为待测电阻值。

(3) 异号法。使误差出现两次,两次符号相反,取其平均值。如测载流螺线管内的磁感强度 B,为消除地磁影响 $B_{地}$,可使螺线管通正、反向电流,分别测出 B_1 与 B_2,则

$$B_1 = B + B_{地}, B_2 = B - B_{地}$$

$$B = 1/2(B_1 + B_2)$$

(4) 半周期间测法。对于测角仪器中由于转轴偏心而引起的系统误差，可以用相隔半个周期的两个读数的方法来消除。如分光计的刻度盘，有两个彼此间隔 $180°$的游标分别读数，取两个读数的平均值即可消除转轴偏心的影响。

(5) 补偿法。在热学量热计量实验中，为补偿室温的影响造成的系统误差，可先用冰水使量热器比室温低若干度，为初温，再将量热器加热，直至比室温高出同样的若干度，为末温，以补偿升温时的散热损失。

三、随机误差

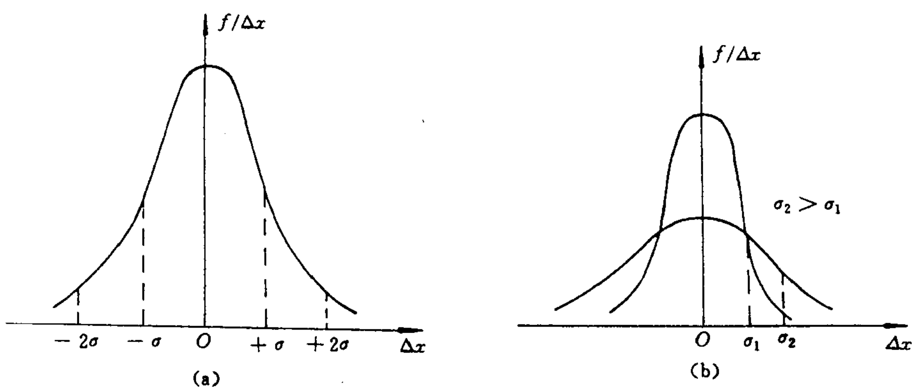
在消除了系统误差或系统误差已减小到可忽略的前提下可进行随机误差的分析。由于人的感觉器官的灵敏程度的限制，仪器精密程度的限制以及周围环境的干扰，如温度、气流、振动、杂散电磁场影响等不可预知的偶然变化,使得测量值产生误差。这种由于测量者、仪器以及环境的不能预先确定、无法控制的复杂的微小因素引起的误差称为“随机误差”。随机误差无法避免，也不能消除，但多次测量时这些误差一般将服从统计规律即高斯分布规律。

(一)随机误差的高斯分布规律

在系统误差已经消除、被测量量本身又是稳定的情况下，在等精度条件下多次重复测量，取得大量数据后，便能发现随机误差将遵守一定的统计规律。从数学上可以推导出随机误差的概率密度函数,称为高斯分布,其函数式为

$$f(\Delta x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(\Delta x)^2}{2\sigma^2}}$$

式中 $\Delta x = x - X_{真}$,(其中,x 是物理量 x 的某测量值,$X_{真}$ 是该物理量的真值) 为误差，$f(\Delta x)$表示误差值为某 Δx 附近单位误差间隔内，误差 Δx 出现的概率。σ 是该函数中的参量，在一定测量条件下,σ 是一个常数。测量条件不同 σ 将不同。$f(\Delta x)$ 的图线如图(1-1)。图(1-1)(a)为高斯分布图线,图(1-1)(b)是具有不同参量 σ 值的两个高斯分布图线。



图(1-1)

由图(1-1)(a) 表示的高斯分布具有如下特点：

①有界性：绝对值很大的误差出现的概率为零，即误差的绝对值不会超过一定的界限。②单峰性：绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率大，误差的概率与误差的大小有关。③对称性：绝对值相等的正误差与负误差出现的概率相等，即概率曲线关于纵轴对称。④抵偿性：由对称性可知，因而随着测量次数的增加，随机误差的算术平均值将愈来愈趋于零。即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - X_{真}) = 0$$

(二)测量结果的最佳值——算术平均值

从理论上高斯分布讲的是对于无限多次测量结果的。但实际上不可能做到，只能进行有限次测量。如果把无限多次测量结果称为总体，则有限次测量值即是从这个总体中抽出的某个样本。我们利用概率统计理论从总体与样本间的关系得出总体的规律。

在测量条件不变的情况下，如果对测量对象进行了 n 次测量，得到 n 个测量值 x_1, x_2，…，x_n。由于真实值 $X_{真}$ 无法得知，因此要研究如何从 n 个测量值的信息得出真实值 $X_{真}$ 的最佳估计值。

根据勒让德和高斯提出的“最小二乘法原理”，即一个等精度测量列的最佳值是能使各次测量值与该值之差的平方和为最小的那个值。设该值为 x_0，即

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2 = \text{最小值}$$

取 $f(x_0)$的导数，并令其为零，得

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_0} = -Z\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0) = 0$$

即

$$\sum x_i - nx_0 = 0$$

得

$$x_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = \bar{x} \tag{1-1}$$

即这组数据的算术平均值 x 就是 $X_{真}$的最佳估计值，可以用它来表示测量结果。

(三)随机误差的估计

等精度测量列的随机误差的计算方法，常用的有两种，即算术平均误差和标准误差。

1. 算术平均误差（简称平均差）

设某一（n 次）测量列，其测量值为 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$，每次对应的误差 $\delta_i = x_i - x_{真}$ 用偏差 $\delta'_i = x_i - x$ 近似表示①，则测量列的平均误差为

$$\overline{\Delta x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - x| \tag{1-2}$$

2. 标准误差（亦称均方差）

设某一（n 次）测量列，各次测量值为 $x_i(i=1,2,\cdots n)$，对应的随机误差为 $\delta_i = x_i - x_{真}$，则

①理想的真值不能得到，可以用单次测量值或多次测量的算术平均值代替真值。测量列中任意一个测量值 x_i 与测量列的算术平均值的 x 的差称作“偏差”。偏差和误差是不同的，其计算方法也不同。由于真值 $X_{真}$ 的不可知，且算术平均值是真值的最佳近似，所以在误差计算过程中，需要用偏差来导出误差。

平均误差常用在误差的粗略估算上，因此在工科物理实验中，对实验结果的粗略评估不再区分误差 δ_i 和偏差 δ'。

测量列的标准误差①为

$$\sigma=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-X_{真})^2}{n}} \tag{1-3}$$

要注意，标准误差 σ 的大小只说明在一定条件下，测量列随机误差出现的概率分布情况。在某一条件下，测量列中各次测量值的 δ_i 大都不等于 σ，但它却表示测量列中所有测量值都具有这样的同一标准误差 σ。

通常我们只知道偏差 $\delta'_i=x_i-\bar{x}$,而不知道 $\delta_i=x_i-X_{真}$,所以用偏差来代替误差计算，可以证明

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \tag{1-4}$$

式(1-4)称为‘标准偏差’公式,这是我们常用的公式。

由误差理论证明测量列(n 次)的算术平均值 n 的标准误差为

$$\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \tag{1-5}$$

式 (1-5)也说明,算术平均值 x 的随机误差比测量列的随机误差小$\sqrt{n}$倍。

由误差理论证明，它与标准误差或标准偏差 σ_x 的关系是

$$\Delta x=0.798\sigma_x\approx 4/5\sigma_x$$

3. 极限误差,异常测量数据的剔除

由误差理论证明，测量值偶然误差绝对值大于 $3\sigma_x$ 的误差出现的几率仅为 0.3%,因此将 $3\sigma_x$ 规定为‘极限误差’,用符号 $\Delta\lim$ 表示,即

$$\Delta\lim=3\sigma_x$$

在实际测量中，如果有一个数据所对应的误差大于 $3\sigma_x$，则该数据即认为是“疏忽误差”,应将它从数据中剔除,然后再重新计算 σ_x。

第三节　测量结果的误差表示

用算术平均值 x 作为真值 $X_{真}$ 的最佳估计值，用标准偏差 σ_x 作为标准误差 σ 的最佳估

①标准误差公式的推导：以 σ 为变量,几率 P 极大值亦即误差最小的条件是

$$\frac{dp}{d\sigma}=0 \text{ 及} \frac{d^2P}{d\sigma^2}<0$$

可得

$$\frac{dp}{d\sigma}=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2\right)}\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2\sigma^{-3}-n^{\sigma-1}\right)=0$$

必有

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2\sigma^{-3}-n\sigma^{-1}=0$$

两边乘 σ^3 可得

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2$$

也即

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-X_{真})^2}{n}}$$

计值，还不能评价实验结果的精密与准确程度，还不能确定测量结果的表示和置信区间。还要考虑仪器误差的问题。

一、仪器误差

仪器误差，用 $\Delta_{仪}$ 表示，是指正确使用该仪器的条件下，测量值和真实值之间可能产生的最大误差。仪器误差通常是由制造厂家或计量机构确定，并为仪器标明。对未标明误差的仪器，可取其最小分度的一半估为 $\Delta_{仪}$；对于已标定仪器级别的仪器 $\Delta_{仪}$ 可用下式计算：

$$\Delta_{仪} = 量程 \times 级别(\%)$$

仪器误差往往既包括系统误差也包括随机误差，其中以何种为主，不同仪器不尽相同。

$\Delta_{仪}$ 是可能产生的最大误差，但实际上它也是在 $\Delta_{仪}$ 范围以内以一定的分布出现的，由误差理论可以证明，它的标准误差 $\sigma_{仪}$ 与 $\Delta_{仪}$ 的关系是

$$\sigma_{仪} = \frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}} \tag{1-6}$$

二、直接测量结果的误差表示、置信区间确定

1. 单次测量的误差估计

由于条件所限，只能作单次测量或没必要对某量精确测量，只要大致测量一次时，如果是很精确的一次测量，可用仪器的标准误差 $\sigma_{仪}$ 表示；对于比较精确的一次测量，则用 $\Delta_{仪}$ 表示；对于较粗糙的一次测量，依情况给出一个估计误差 $\Delta_{估}$。即单次测量可表示为

$$\left.\begin{aligned} x &= x_{测} \pm \sigma_{仪} \\ x &= x_{测} \pm \Delta_{仪} \\ x &= x_{测} \pm \Delta_{估} \end{aligned}\right\} \tag{1-7}$$

2. 多次测量的误差表示

根据测量要求，对多次测量量的误差有两种方法表示。

(1) 要求不高时，可用算术平均误差 $\overline{\Delta x}$ 及仪器误差 $\Delta_{仪}$，并选其中大者为测量误差，即可表示为

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x} \pm \overline{\Delta x}(\overline{\Delta x} > \Delta_{仪}) \\ x &= \bar{x} \pm \Delta_{仪}(\Delta_{仪} > \overline{\Delta x}) \end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

(2) 对于要求较高的科学实验，应采用标准误差。因为标准误差 σ_x、$\sigma_{\bar{x}}$ 当测量次数 $n>10$ 时较稳定，并且它在高斯分布曲线中有确切的意义，所以用它表示是最好的。即表示为

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x} \pm \sigma_x \\ x &= \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}(\sigma_{\bar{x}} > \Delta_{仪}) \\ x &= \bar{x} \pm \Delta_{仪}(\Delta_{仪} > \sigma_{\bar{x}}) \end{aligned}\right\} \tag{1-9}$$

3. 误差表示式的意义，置信区间

当测量结果用式(1-7)(1-8)(1-9) 表示时，由统计理论可以知道，$x=\bar{x}\pm\sigma_x$ 表示的意义是：测量值在区间 $[\bar{x}-\sigma_x, \bar{x}+\sigma_x]$ 的概率是 68.3%(理论上应该是 $[X_{真}-\sigma, X_{真}+\sigma]$，这里我们用 $\bar{x}$ 与 σ_x 作近似值)。由于 $\overline{\Delta x}=0.798\sigma_x$，所以，$x=\bar{x}\pm\overline{\Delta x}$ 表示的测量值落在区间 $[x-\Delta_x, x+\Delta_x]$ 的概率为 57.5%。在给定区间内包含真实值的概率，称为"置信概率"，其区间称为置信区间。区间 $[\pm\sigma_x]$ 的置信概率（一般用 P 表示）为 68.3%，而区间 $[\pm 2\sigma_x]$，置信概率为 95.4%，区间 $[\pm 3\sigma_x]$ 置信概率为 99.7%。

可以用此评价测量结果。知道了置信区间和置信概率就知道了测量结果的精密程度，离散程度。

4. 相对误差、误差定位

$\Delta x, \overline{\Delta x}, \sigma, \sigma_x, \sigma_{\bar{x}}$ 等称为"绝对误差"，而更能反映测量结果的优劣程度的是"相对误差"，一般用百分误差形式表示。相对算术平均误差用 $\frac{\overline{\Delta x}}{\bar{x}}$ 表示，相对标准误差用 $\frac{\sigma_x}{\bar{x}}$ 表示，分别写成

$$\left.\begin{aligned}\frac{\overline{\Delta x}}{\bar{x}} &= \frac{\overline{\Delta x}}{\bar{x}}100\% \\ \frac{\sigma_x}{\bar{x}} &= \frac{\sigma_x}{\bar{x}}100\%\end{aligned}\right\} \tag{1-10}$$

绝对误差与相对误差的取位：一般绝对误差都取一位不等于零的数，相对误差可取二位不等于零的数。对于特别精密、准确的高级实验，绝对误差可取二位。

用式(1-7)、(1-8)、(1-9)、(1-10)表示实验结果时，式中 $\bar{x}$ 的位数由绝对误差确定，即 $\bar{x}$ 的最后一位应与绝对误差不等于零的那位相齐，这就是"误差定位"。

例 1 用千分尺测铁块厚度 h 五次，数据为 0.604 5 cm，0.605 2 cm，0.607 8 cm，0.608 2 cm，0.612 5 cm。试用误差 Δh 表示测量结果。

解 平均值 $\bar{h} = \frac{1}{5}(0.604\ 5+0.605\ 2+0.607\ 8+0.608\ 2+0.612\ 5)$ cm

$= 0.607\ 64$ cm

因 $\bar{h}$ 取位应与 h_i 同，故

$$\bar{h} = 0.607\ 6 \text{ cm}$$

平均绝对误差

$$\overline{\Delta h} = \frac{1}{5}(0.003\ 1 + 0.002\ 4 + 0.000\ 2 + 0.000\ 6 + 0.004\ 9)\text{cm}$$
$$= 0.002\ 24 \text{ cm}$$

因 Δh 只取一位不为零数字，故按只进不舍的原则有

$$\overline{\Delta h} = 0.003 \text{ cm}$$

因千分尺的示数误差为 0.000 5 cm，即

$$\Delta h_{ins} = 0.000\ 5 \text{ cm}$$

因为 $\overline{\Delta h} > \Delta h_{ins}$，故取平均绝对误差为绝对误差，即 $\Delta h = \overline{\Delta h} = 0.003$

标准误差(样本的标准误差)

$$\sigma_h = \sqrt{\frac{1}{5-1}\sum(h_i - \bar{h})^2}$$
$$\doteq 0.0022 \approx 0.003$$

平均值的标准误差

$$\sigma_{\bar{h}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma_h = \frac{0.002\ 2}{2.236} \doteq 0.000\ 98$$
$$\approx 0.001$$

相对平均绝对误差

$$\frac{\Delta h}{\bar{h}} = \frac{0.003}{0.607\ 6}100\% = 0.49\%$$

相对标准误差

$$\frac{\sigma_h}{\bar{h}} = \frac{0.003}{0.607\,6}100\% \doteq 0.49\%$$

相对平均值标准误差

$$\frac{\sigma_{\bar{h}}}{\bar{h}} = \frac{0.001}{0.607\,6}100\% \doteq 0.16\%$$

误差定位及误差表示

用平均绝对误差及相对误差表示：

$$h = \bar{h} \pm \overline{\Delta h} = (0.607\,6 \pm 0.003)\ \text{cm}$$
$$= (0.608 \pm 0.003)\text{cm}$$
$$h = \bar{h}(1 \pm \frac{\overline{\Delta h}}{\bar{h}}100\%)$$
$$= 0.608(1 \pm 0.49\%)\ \text{cm}$$

用平均值标准误差及相对误差表示：

$$h = \bar{h} \pm \sigma_{\bar{h}} = (0.608 \pm 0.001)\ \text{cm}$$

$$h = \bar{h}(1 \pm \frac{\sigma_{\bar{h}}}{\bar{h}}) = 0.608(1 \pm 0.16\%)\ \text{cm}$$

注意：①因误差定位要求 h 的最后一位应与 Δh 不为零位对齐，故取 h 为三位有效数字。②用相对误差表示时，h 为定位后的值。

三、间接测量 的误差

在间接测量中，间接测量的误差与各个直接测量的误差有关，这就是误差的传递，间接测量的误差是由‘ 误差传递公式 ’决定的。

（一）算术平均误差传递公式

若设间接测量量 y 与直接测量量的函数关系为 $y=f(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$。且 x_1、x_2、x_3、$\cdots$、x_n 为彼此独立的变量。设它们的算术平均误差分别是 Δx_1、Δx_2、Δx_3、$\cdots$、Δx_n，并设间接量的误差为 Δy。由全微分公式，用 Δx_1、Δx_2、$\cdots$、Δx_n 及 Δy 分别代替 $\mathrm{d}x_1$、$\mathrm{d}x_2$、$\cdots$、$\mathrm{d}x_n$ 及 $\mathrm{d}y$，并考虑到$\frac{\partial f}{\partial x_i}$可能为负。故一律取绝对值，则有

$$\Delta y = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n\right|$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i\right| \tag{1-11}$$

式(1-11)称为误差传递公式。其中$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i\right|$称为 Δy 的分误差，$\frac{\partial f}{\partial x_i}$称为传递系数。$\Delta y$ 是各分误差绝对值之和。

利用式(1-11)可得四则运算的误差计算公式如下：

(1) 和或差的误差

$$y = x_1 + x_2 \text{ 或 } y = x_1 - x_2$$

$$\Delta y = \left|\frac{\partial(x_1 \pm x_2)}{\partial x_1}\Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial(x_1 \pm x_2)}{\partial x_2}\Delta x_2\right| = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

即和或差的误差等于各绝对误差之和。

（2）积或商的误差

$$y = x_1 \cdot x_2, \quad y = \frac{x_1}{x_2}$$

积的误差

$$\Delta y = \left|\frac{\partial(x_1 \cdot x_2)}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial(x_1 \cdot x_2)}{\partial x_2}\Delta x_2\right| = x_2\Delta x_1 + x_1\Delta x_2$$

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{x_2\Delta x_1 + x_1\Delta x_2}{x_1 x_2} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2}$$

商的误差

$$\Delta y = \frac{\Delta x_1}{x_2} + \left|\frac{-x_1}{x_2^2}\Delta x_2\right| = \frac{\Delta x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_2^2}\Delta x_2$$

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x_1/x_2}{x_1/x_2} + \frac{x_1\Delta x_2/x_2^2}{x_1/x_2} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2}$$

可见积和商的相对误差都等于各相对误差之和。

由以上积与商的误差公式可以证明，对多个量的乘除运算，其间接量的相对误差为直接量相对误差之和,设：

$$y = \frac{x_1 x_2 x_3 \cdots}{x_4 x_5 x_6 \cdots x_n}$$

即：

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} + \cdots + \frac{\Delta x_n}{x_n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta x_i}{x_i}$$

(二)标准误差的误差传递公式

若直接量的误差是用标准误差 σ_x 或 $\sigma_{\bar{x}}$,则间接量 y 的标准误差可以证明为

$$\sigma_{\bar{y}} = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x_1})^2\sigma_{x_1}^2 + (\frac{\partial f}{\partial x_2})^2\sigma_{x_2}^2 + \cdots + (\frac{\partial f}{\partial x_n})^2\sigma_{x_n}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial f}{\partial x_i}\sigma_{x_i}^2)^2} \qquad (1\text{-}12)$$

对于乘除、指数、对数类运算的间接量误差计算,可以先两边取对数,即

$$\ln y = \ln f(x_1, x_2, x_3 \cdots\cdots, x_n)$$

再微分得相对误差

$$\frac{\Delta y}{y} = \left|\frac{\partial \ln f}{\partial x_1}\Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial \ln f}{\partial x_2}\Delta x_2\right| + \cdots + \left|\frac{\partial \ln f}{\partial x_n}\Delta x_n\right| \qquad (1\text{-}13)$$

和

$$\frac{\sigma_{\bar{y}}}{y} = \sqrt{(\frac{\partial \ln f}{\partial x_1})^2\sigma_{x_1}^2 + (\frac{\partial \ln f}{\partial x_2})^2\sigma_{x_1}^2 + \cdots + (\frac{\partial \ln f}{\partial x_n})^2\sigma_{x_n}^2} \qquad (1\text{-}14)$$

常用函数的算术平均误差与标准误差计算见表（1-1）。

例 2　用流体静力称衡法测固体密度，物体在空气中的重量为 m_1g ,浸入水中的‘视重量’为 m_2g ,水的密度为 ρ_0。若实验测得 $m_1=(27.06 \pm 0.05)(g)$；$m_2=(17.03 \pm 0.05)(g)$，$\rho_0=(0.9997 \pm 0.0003)(g/cm^3)$,试用物体密度公式 $\rho=(m_1-m_2)\cdot\rho_0/m_1$ 求物体的密度及误差表示式。(所给直接测量量的误差值,可作为算术平均误差或标准误差)。

表(1-1) 常用函数的误差计算表

函　数 $y=f(x_1、x_2、\cdots、x_n)$	绝对误差 Δy	相对误差$\frac{\Delta y}{y}$	标准误差 σ_y	相对标准误差$\frac{\sigma_y}{y}$
$y=x_1+x_2$	$\Delta x_1+\Delta x_2$	$\frac{\Delta x_1+\Delta x_2}{x_1+x_2}$	$\sqrt{\sigma_{x_1}^2+\sigma_{x_2}^2}$	$\frac{\sqrt{\sigma_{x_1}^2+\sigma_{x_2}^2}}{x_1+x_2}$
$y=x_1-x_2$	$\Delta x_1+\Delta x_2$	$\frac{\Delta x_1+\Delta x_2}{x_1-x_2}$	$\sqrt{\sigma_{x_1}^2+\sigma_{x_2}^2}$	$\frac{\sqrt{\sigma_{x_1}^2+\sigma_{x_2}^2}}{x_1-x_2}$
$y=x_1\cdot x_2$	$x_1\Delta x_2+x_2\Delta x_1$	$\frac{\Delta x_1}{x_1}+\frac{\Delta x_2}{x_2}$	$x_1x_2\sqrt{(\frac{\sigma_{x_1}}{x_1})^2+(\frac{\sigma_{x_2}}{x_2})^2}$	$\sqrt{(\frac{\sigma_{x_1}}{x_1})^2+(\frac{\sigma_{x_2}}{x_2})^2}$
$y=x_1/x_2$	$\frac{x_2\Delta x_1+x_1\Delta x_2}{\Delta x_2^2}$	$\frac{\Delta x_1}{x_1}+\frac{\Delta x_2}{x_2}$	$\frac{x_1}{x_2}\sqrt{(\frac{\sigma_{x_1}}{x_1})^2+(\frac{\sigma_{x_2}}{x_2})^2}$	$\sqrt{(\frac{\sigma_{x_1}}{x_1})^2+(\frac{\sigma_{x_2}}{x_2})^2}$
$y=x^n$	$nx^{n-1}\cdot\Delta x$	$n\frac{\Delta x}{x}$	$nx^{n-1}\cdot\sigma_x$	$n\frac{\sigma_x}{x}$
$y=x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1}{n}-1}\cdot\Delta x$	$\frac{1}{n}\cdot\frac{\Delta x}{x}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\sigma_x$	$\frac{1}{n}\frac{\sigma_x}{x}$
$y=\sin x$	$\lvert\cos x\rvert\cdot\Delta x$	$\frac{\lvert\cos x\rvert}{\sin x}\Delta x$	$\lvert\cos x\rvert\sigma_x$	$\frac{\lvert\cos x\rvert}{\sin x}\sigma x$
$y=\ln x$	$\frac{\Delta x}{x}$	$\frac{\Delta x}{x\ln x}$	$\frac{1}{x}\sigma_x$	$\frac{\sigma_x}{x\ln x}$

解　先对求 ρ 公式两边取对数得

$$\ln\rho=-\ln m_1+\ln(m_1-m_2)+\ln\rho_0$$

由式(1-13),先求两边全微分得

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{-dm_1}{m_1}+\frac{d(m_1-m_2)}{m_1-m_2}+\frac{d\rho_0}{\rho_0}=\frac{(m_1-m_2)-m_1}{m_1(m_1-m_2)}dm_1-\frac{dm_2}{m_1-m_2}+\frac{d\rho_0}{\rho_0}$$

用误差符号代替全微分符号,并取分误差为绝对值,则有

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}=\frac{m_2}{m_1(m_1-m_2)}\Delta m_1+\frac{\Delta m_2}{m_1-m_2}+\frac{\Delta\rho_0}{\rho_0}$$

若所给直接测量的误差为算术平均误差,则

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}=\frac{17.03}{27.06(27.06-17.03)}\times 0.05+\frac{0.05}{27.06-17.03}+\frac{0.0003}{0.9997}$$
$$=0.31\%+0.50\%+0.030\%=0.84\%$$

若所给直接测量的误差为标准算术误差,则由式(1-14)有

$$\frac{\Delta_{\bar{\rho}}}{\rho}=\sqrt{\frac{m_2^2}{m_1^2(m_1-m_2)^2}\sigma_{m_1}^2+\frac{\sigma_{m_2}^2}{(m_1-m_2)^2}+\frac{\sigma_{\rho_0}^2}{\rho_0^2}}$$
$$=\sqrt{(0.31\%)^2+(0.50\%)^2+(0.030\%)^2}=\sqrt{0.35\%}=0.59\%$$

ρ 的平均值,$\Delta\rho$,$\sigma_{\bar{x}}$

$$\rho=\frac{m_1}{m_0-m_2}\rho_0=\frac{27.06}{27.06-17.03}\times 0.9997=2.6970(g/cm^2)$$

$$\Delta\rho=2.6970\times 0.84\%=0.02(g/cm^3)$$

$$\sigma_{\bar{x}}=2.6970\times 0.59\%=0.01\ (g/cm^3)$$

ρ用算术平均误差及相对误差表示为

$$\rho=(2.70\pm 0.02)(g/cm^3)=2.70(1\pm 0.84\%)(g/cm^3)$$

ρ 用标准误差及相对误差表示为

$$\rho = (2.70 \pm 0.01)(\mathrm{g/cm^3}) = 2.70(1 \pm 0.59\%)(\mathrm{g/cm^3})$$

【阅读材料】间接测量误差等分配和仪器精度的选择

在误差分析和实验设计中，常常需要解决间接测量结果的准确度已经给定，如何选择合理的测量方法和测量仪器的问题。这涉及到怎样进行误差分配，才能保证测量结果符合准确度要求的问题。

测量之前，在对间接测量量的精度提一定要求之后，如何来确定各直接测量量的精确度和选择适宜的仪器，这在设计和安排实验时是必须考虑的。

假设间接测量量 y 与直接测量量 x_1、x_2、x_3、…、x_n 间的函数关系为

$$y = x_1^a \cdot x_2^b \cdots x_n^p$$

则相对误差为

$$\frac{\Delta y}{y} = |a\frac{\Delta x_1}{x_1}| + |b\frac{\Delta x_2}{x_2}| + \cdots + |p\frac{\Delta x_n}{x_n}|$$

当事先对测量的精度提出的要求是$\frac{\Delta y}{y} \leqslant E$,如何将其分配给直接测量量各项的方案有许多个,但通常是首先采用‘误差等分配原则”,即使

$$|a\frac{\Delta x_1}{x_1}| = |b\frac{\Delta x_2}{x_2}| = \cdots = |p\frac{\Delta x_n}{x_n}| \leqslant \frac{1}{n}E$$

这样，就可以决定各个直接测量量的精度。如对 x_1,因为

$$|a\frac{\Delta x_1}{x_1}| \leqslant \frac{1}{n}E$$

所以

$$\Delta x_1 \leqslant \frac{1}{|a|n}Ex_1$$

再根据 Δx_1 的大小就可以确定测量 x_1 时应该选用什么精度的仪器了。

按误差等分原则分配误差，有时也可能出现不合理的情况。因为算出的综合误差范围有的容易实现，有的则难以实现，所以需要作适当的调整，以尽可能避免选择昂贵的高准确度仪器或者付出不必要的工作。

例 3　用欧姆定律测电路中电流 I。现测得 $R=4\Omega$,$V=16$ V,要求 I 的标准误差不大于 0.02 A,问 R、V 的标准误差应不大于多少？

解　由式(1-14)因为 $I=\frac{V}{R}$

所以

$$\frac{\sigma_I}{I} = \sqrt{(\frac{\sigma_R}{R})^2 + (\frac{\sigma_V}{V})^2}$$

由题意,知

$$\sigma_I = I\sqrt{(\frac{\sigma_R}{R})^2 + (\frac{\sigma_V}{V})^2} = \sqrt{(\frac{\sigma_V}{R})^2 + (\frac{V \cdot \sigma_R}{R^2})^2} \leqslant 0.02$$

根据误差等分配原则，令

$$(\frac{\sigma_V}{R})^2 = (\frac{V \cdot \sigma_R}{R^2})^2$$

则有

$$\sigma_I = \sqrt{2(\frac{\sigma_V}{R})^2} \leqslant 0.02$$

$$\sigma_I = \sqrt{2(\frac{V \cdot \sigma_R}{R^2})^2} \leqslant 0.02$$

将已知 R、V 值代入,即可得

$$\sigma_V \leqslant 0.057(\mathrm{V})\text{,不应大于 } 0.05(\mathrm{V})$$

$$\sigma_R \leqslant 0.014(\Omega)\text{,不应大于 } 0.01(\Omega)$$

如果某一个量的仪器误差达不到上述要求则可以将它可能达到的值代人

$$\sigma_I = \sqrt{(\frac{\sigma_V}{R})^2 + (\frac{V \cdot \sigma_R}{R^2})^2} \leqslant 0.02$$

中，再求出另一量必须要达到的要求。

第四节　测量结果的总不确定度估计

完整的测量结果既要表示出真实值的量值范围，还要表示出被测量值的总不确定度。总不确定度是指由于测量误差的存在而对被测量值不能肯定的程度，是表征被测量的真值所处的量值范围的评价。为此,国际上和我国国家计量技术规范用‘总不确定度 Δ’表示测量结果,即

$$y = y \pm \Delta \tag{1-15}$$

总不确定度 Δ 反映了可能存在的误差分布范围。可以证明式(1-15)表示 y 位于区间(y Δ, $y+\Delta$)内的概率约等于或大于 95%。

测量结果的不确定度表示是较新的概念，还有许多尚需探讨的地方。工科院校普通物理实验对总不确定度 Δ 可以用以下简化方案处理。

一、总不确定度 Δ 的估计

按误差产生的原因和特点，误差可分为系统误差和随机误差。系统误差又可分为可定系统误差和未定系统误差(可定系统误差如仪器的零点误差等,应先剔除或将数据修正)。由于随机误差和未定误差往往有联系和难以严格区分。总不确定度 Δ 按获得误差的方法分为两类：

由统计方法(多次测量)得到的误差分量,称为‘A 类不确定度’,用 Δ_A 表示。它包括随机误差、未定系统误差中大致符合统计规律的误差以及测量对象不稳定的误差等。

其他非统计方法得到的误差分量，称为‘B 类不确定度’,用 Δ_B 表示。它包括未定系统误差中的仪器误差或按实际情况估计的经验误差等。

总不确定度 Δ 即由 Δ_A 和 Δ_B 用‘方和根法’合成,即

$$\Delta = \sqrt{\Delta_A^2 + \Delta_B^2}$$

1. A 类不确定度 Δ_A 的估计

Δ_A 的估计方案很多。在相同测量条件下，对被测量 X 进行 n 次独立测量，得到测量列 x_1、$x_2 \cdots x_n$,如果误差互相独立,则平均值的标准偏差 $\sigma_{\bar{x}}$ 即为 A 类标准不确定度 Δ_A.

$$\Delta_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

2. B 类不确定度 Δ_B 的估计

当作多次测量时，Δ_B 一般可由仪器误差限值 Δ_{Ins} 给出。当只作一次测量时，由实验室按实际情况由经验给出估计值。 Δ_{Ins} 可用仪器的准确度等级或最小分度值按一定的关系式给出。

二、间接测量的总不确定度合成

如 $y=f(x_1、x_2、x_3、\cdots)$，可以证明，y 的总不确定度 Δ_y 为

$$\Delta_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i)^2}$$

例 4　多次重复测得一长方体的长 $A=13.79\pm0.02$ cm(仪器误差 0.008 cm) 宽 $B=3.635\pm0.005$ cm(仪器误差 0.002 cm)，高 $H=0.1917\pm0.0005$ cm （仪器误差 0.0004 cm）。①视各误差值为平均误差（极）限，用平均误差传递公式来求体积 V 的测量结果。②视各误差值为标准误差(极)限，用标准差传递公式求体积 V 的测量不确定度。

解　长方形体积测量值

$$V = A \cdot B \cdot H = 9.609(\mathrm{cm}^3)$$

误差基本传递公式为

$$\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{\mathrm{d}A}{A} + \frac{\mathrm{d}B}{B} + \frac{\mathrm{d}H}{H}$$

(1) 直接测得量合成：

$$\Delta A=0.2+0.008=0.028(\mathrm{cm})$$

$$\Delta B=0.05+0.002=0.007(\mathrm{cm})$$

$$\Delta H=0.0005+0.0004=0.0009(\mathrm{cm})$$

相对误差

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta H}{H} = 0.0087 = 0.87\%$$

绝对误差　　$\Delta V = \frac{\Delta V}{V} \cdot V = 0.084(\mathrm{cm}^3) \approx 0.09(\mathrm{cm}^3)$

测量结果　$V \pm \Delta V = 9.61 \pm 0.09(\mathrm{cm}^3) = 9.61(1 \pm 0.87\%)(\mathrm{cm}^3)$

(2) 多次测量标准误差限为直接测得量 A 类不确定度，对体积的影响为：

$$\frac{\sigma_V}{V} = \sqrt{(\frac{\sigma_A}{A})^2 + (\frac{\sigma_B}{B})^2 + (\frac{\sigma_H}{H})^2} = 0.0030 = 0.30\%$$

亦即体积 A 类不确定度

$$\Delta_A=0.04(\mathrm{cm}^3)$$

仪器误差限为直接测得量 B 类不确定度，对体积的影响

$$\frac{\Delta V^*}{V} = |\frac{\Delta A^*}{A}| + |\frac{\Delta B^*}{B}| + |\frac{\Delta H^*}{H}| = 0.0046 = 0.46\%$$

亦即体积的 B 类不确定度