

绪 论

任何理论都是建立在实验的基础上的，物理实验是一门重要的基础实验课。其主要任务是：

1. 学习和掌握进行物理实验的基础知识、基本方法和基本技能，了解进行物理实验的主要过程，使同学们具有初步的科学实验能力。

2. 培养和提高学生的观察和分析物理现象的本领，训练学生从实验中归纳、总结物理规律的能力，并学会利用所掌握的物理理论进行实验和设计实验。

3. 培养严肃认真的工作作风，实事求是的科学态度，勇于探索的钻研精神，克服困难的坚强意志和遵守纪律的优良品德。

一、有效数字及其运算

在实验过程中，必须正确读取数据和处理这些数据，才能得到正确的结果，否则，读取的数据是无效的，结果是错误的。怎么样的数据才是有效的呢？

1. 有效数字的概念

任何一个实验结果都存在着误差，由准确数字加上最后一位可疑数字合称为有效数字。如 $L = 15.24$ 有四位有效数字 其中 4 是可疑位。有效数字越多，精度就越高，因此，有效位数的多少不可以随意取舍。下面对有效数字作几点说明：

(1) 出现在数值中间的“0”与末尾的“0”均为有效数字。

(2) 有效数字与小数点的位置无关。如物体的长度为 12.64cm 也可记为 0.1264m 以及 0.0001264km ，它们都是四位有效数字。当数值太小或太大时，应当采用科学记数法，即用有效数字乘以 10 的幂指数的形式表示，如 $1.264 \times 10^{-4}\text{km}$ 等。用这种形式表示特大或特小数值时，一般小数点前只取一位数字，幂指数不是有效数字。

(3) 任何有效数字位数是由绝对误差来决定的，有效数字的最末位应与误差（只取一位）所在位对齐。如物体长度写成 $L = 3.45 \pm 0.02\text{cm}$ 是正确的，但写成 $L = 3.5 \pm 0.02\text{cm}$ 或 $L = 3.452 \pm 0.02\text{cm}$ 都是错误的。

(4) 有效数字的位数与测量方法有关。例如，用单摆测量重力加速度，如果用最小分度为 0.1s 的秒表测一个周期，得 $T = 1.9\text{s}$ 但如果连续测 100 个周期 得 $100T = 194.6\text{s}$ 则一个周期 $T = 1.946\text{s}$ 。前者为二位有效数字，后者为四位有效数字，精度提高了。

(5) 测量同一物理量时，有效数字的位数与所用测量仪器精度有关。仪器精度越高，有效数字的位数就越多。例如，测量一平板玻璃厚度，用米尺来测量得 4.2mm ，为二位有效数字；用游标卡尺测量得 4.20mm ，为三位有效数字；用螺旋测微计测量得 4.212mm 为四位有效数字。

2. 有效数字的运算

(1) 有效数字的加减

先看下列例子：

$$25.\underline{3} + 4.2\underline{4} = 29.\underline{54} = 29.\underline{5}$$

$$37.\underline{9} - 5.6\underline{2} = 32.\underline{28} = 32.\underline{3}$$

$$71.\underline{4} + 0.75\underline{3} = 72.\underline{153} = 72.\underline{2}$$

结论：几个数相加（减）其和（或差）在小数点后所应保留的位数与参与运算的诸数中小数点后位数最少的一个相同。

(2) 有效数字的乘除

先看下列例子：

$$52\underline{8} \div 12\underline{1} = 4.3\underline{64} = 4.3\underline{6}$$

$$3.8\underline{5} \times 9.7\underline{3} = 37.\underline{46} = 37.\underline{5}$$

$$39.3 \times 4.08\underline{4} = 160.\underline{5} = 16\underline{1}$$

结论：几个数相乘除，所得的结果的有效数字位数，一般与诸数中有效数字位数最少的一个相同，有时也可多一位或少一位。

(3) 乘方与开方

某数的乘方（或开方）的有效数字位数，应与其底数的有效数字相同。

(4) 常数 e 、 π 等运算

在运算中 π 、 e 可认为其有效数字是无限的，但一般仅比测量值多取一位有效数字参与运算。

二、测量误差及其基本概念

只有在精确实验的基础上才能得出正确的结论和发展正确的理论。如近代的量子力学、相对论等。但所有实验都存在着误差，只有正确地分析、处理误差才能得出正确的结果。

1. 测量误差的基本概念

测量是物理实验的基本操作。所谓测量，就是把待测的物理量与一个被选作标准的同类物理量进行比较，以确定它是标准量的多少倍。这个标准量称为该物理量的单位（本书采用国际单位）。这个倍数称为待测物理量的数值。测量的结果应包括数值、单位以及结果可信赖的程度。

(1) 直接测量、间接测量

测量分为直接测量和间接测量。凡是能以量具、仪器的刻度直接测得待测量大小的测量，叫直接测量。例如用直尺测某长度、用天平称衡物体质量、用安培表测量电流强度等等。但大多数物理量不可能直接测得，需要进行间接测量。所谓间接测量，就是先经过直接测量得到一些量的量值，然后再通过一定的函数关系进行计算，才能得出所求结果的测量。例如直接测量一圆柱体的直径（ d ）和高度（ h ）再根据 $V = \pi d^2 h / 4$ 计算出圆柱体的体积，圆柱体体积测量就是间接测量。又如转动惯量、重力加速度的测定等等。有些物理量既可直接测量也可间接测量，如电流，既可用电流表直接测得（直接测量），也可先测电阻两端电压，然后通过欧姆定律求得（间接测量）。

(2) 精度测量，测量的正确度、精密度和精确度

仪器的不同、方法的差异、测量条件的改变以及测量者素质的参差都会造成测量结果的

变化。这样的测量是不等精度测量。而同一个人，用同样的方法，使用同样的仪器并在相同的条件下对同一物理量进行的多次测量，叫做等精度测量。尽管各测量值可能不相等，但没有理由认为哪一次（或几次）的测量值更可靠或更不可靠。实际上，一切物质都在运动中，没有绝对不变的人和事物。只要其变化对实验的影响很小乃至可以忽略，就可以认为是等精度测量。如有一个条件发生变化，从而明显影响到实验结果，这样的测量即为不等精度测量。对一个量的多次测量，通常指等精度测量。对同一物理量进行多次等精度测量，其结果也不完全相同。比如打靶（如图 1 所示），着弹点会有一定的弥散性，结果比较接近客观实际的测量正确度高；结果彼此相近的测量精密度高；而既精密又正确的测量则为精确度高。正确度表示测量结果系统误差的大小，精密性表示测量结果随机性误差的大小，精确度则综合反映出测量的系统误差与随机性误差的大小。

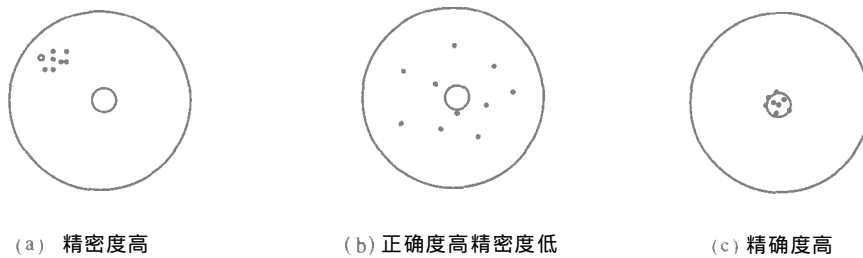


图 1 打靶着弹点的分布

(3) 测量误差

任何物理量在一定条件下客观存在一个惟一确定的值，即真值。所测得的数值与其真值之间总存在着差异，我们把所得测量值与真值之差定义为误差。用下式表示：

$$\Delta x_i = x_i - x_0$$

式中 x_0 代表真值， x_i 为第 i 次测量值， Δx_i 为第 i 次测量误差。

产生误差的原因是多方面的，根据误差的性质及其产生的原因，可分为系统误差和偶然误差两大类。

(4) 系统误差

图 1 中的 (a) 情况，对一个枪手来说，很可能是由于枪的准星不准而偏离了靶心。这是由于仪器造成的误差，这种误差属系统误差。系统误差的特点是测量的结果总是向某一确定方向偏离，或按照一定的规律变化。产生系统误差有以下几个原因：仪器本身的缺陷（如刻度不准、不均匀或零点没校准等）；理论公式或测量方法的近似性；环境的改变（如测量过程中温度、压强的变化）；实验者生理或心理特点，或缺乏经验引入的误差（读数总是偏大或偏小）。

由于系统误差的数值和符号（+、-）是定值或按某种规律变化，因此系统误差不能通过多次测量来消除或减小。如果能找出产生系统误差的原因，就能采取适当的方法来消除或减小它的影响，或对测量结果进行修正。实验中一定要注意消除系统误差。

(5) 偶然误差（随机误差）

由于观察者受到感官的限制，或由于测量对象自身的涨落，或由于其他不可预测的偶然因素所引起的误差称为偶然误差或随机误差。它的特点是随机性、不可预知性，但从统计的角度看，满足正态分布。其特点为：

绝对值相等的正负误差出现的几率相等。

绝对值小的误差出现的几率比绝对值大的误差出现的几率大。

偶然误差的算术平均值随测量次数的增加而减小，当测量次数趋于无穷大时，它趋于零。偶然误差存在一“最大误差”，即误差的绝对值不超过某一限度。

由于偶然误差存在上述性质，我们可以用增加测量次数的方法来减小它。当测量次数足够多时，测量值的偶然误差趋近于零，测量值的算术平均就趋近于真值。

(6) 直接测量的误差估算

多次测量

对某一物理量进行了 n 次测量，测量值分别为 x_1, x_2, \dots, x_n 。其算术平均值为

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

由上所述， \bar{x} 为该物理量的最佳值。

每次测量值 x_i 与算术平均值 \bar{x} 的误差的绝对值为

$$\Delta x_1 = |x_1 - \bar{x}|, \quad \Delta x_2 = |x_2 - \bar{x}|, \quad \dots, \quad \Delta x_n = |x_n - \bar{x}|$$

则算术平均绝对误差（算术平均误差）定义为

$$\overline{\Delta x} = \frac{1}{n}(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i$$

测量结果可表示为

$$x = \bar{x} \pm \Delta x$$

单次测量

有些物理实验是在动态下测量的，不允许重复多次测量；有些实验的精密度要求不高。在这些情况下，可以只进行一次测量。单次测量的误差估计，一般总是估计误差的最大值。误差最大值的估计比较复杂，有各种方法。如果要求不高或不需要很精确时，常取仪器最小分度 d 的一半来表示，其测量结果为 $x = x_{\text{测}} \pm d/2$ 。

对于标出精度等级的仪器和仪表，可用仪器误差作为单次测量误差，其表示式为

$$x = x_{\text{测}} \pm \Delta x_{\text{仪}}$$

其中， $\Delta x_{\text{仪}} = \text{量程} \times \text{级别} \%$ 。

在多次测量中，经过计算得到的偶然误差很小甚至趋近于零。从简化问题而又不失其合理性考虑，这时仍可取仪器误差作为测量结果的最大误差。

(7) 间接测量误差的估算

设间接测量量 N 与各独立的直接测量量 x, y, z, \dots 有下列函数关系

$$N = f(x, y, z, \dots)$$

用算术平均误差（通常把算术平均误差看成最大误差）表示各个独立的直接测量值为

$$x = \bar{x} \pm \Delta x, \quad y = \bar{y} \pm \Delta y, \quad z = \bar{z} \pm \Delta z.$$

则间接测量值可表示为

$$N = \bar{N} \pm \overline{\Delta N}$$

式中， $\bar{N} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $\Delta N = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \overline{\Delta x} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \overline{\Delta y} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \overline{\Delta z} \right| + \dots$

式中取绝对值是考虑到误差最大的情况。

(8) 相对误差

为了评价测量的精密程度，引入相对误差的概念。相对误差定义为

$$E = \frac{\overline{\Delta x}}{x} \times 100\%$$

在处理间接测量量的误差问题时，如果函数关系仅仅是乘除关系，往往先求相对误差，而后根据相对误差公式求出绝对误差。

如 体积 $V = L \times W \times H$

相对误差即为 $E_V = E_L + E_W + E_H$

绝对误差即为 $\Delta V = E_V \times V$

但如果先算 $\overline{\Delta V}$ 就比较复杂。

2. 测量仪器的精度级别以及测量值的有效数字

(1) 仪器的精度级别

测量结果的精密度和正确度是与测量仪器的精确度等级密切相关的。我们通常用精度和级别来描述仪器的这种性质。

仪器的精度通常指它能分辨的物理量的最小值。仪器的精度越高，即它的分度越细，允许的偏差就越小。由于多种因素，如材质不均匀、加工装配的缺陷以及环境（如温度、湿度、震动、杂散光、电磁场等）的影响，仪器的精度受到一定的限制。按照标准，在正常使用条件下（如温度、湿度范围、放置方式、额定功率等都符合要求），用某种级别的仪器进行测量时，对最大允许偏差有具体规定，这种最大允差也叫仪器的极限误差或公差，我们用 $\Delta_{\text{仪}}$ 来表示。 $\Delta_{\text{仪}}$ 可在产品说明书和仪器手册中查找到。

仪器的级别和最大允差有关。如模拟式（即指针式）电表级别分为 5.0、2.0、1.5、1.0、0.5、0.2、0.1 等。每一量程的最大允差 $\Delta_{\text{仪}} = \text{量程} \times \text{级别} \%$ 。它表示在该量程下正确使用仪器进行测量，结果可能出现的最大误差。而数字式电表测量结果的误差较为复杂，通常表示为读数 \times 某百分数 + 最末位的几个单位（具体见说明书）。

一般而言，有刻度的仪器、量具的最大允差大约对应于其最小分度值所代表的物理量。对于数字式仪表，测量值的误差往往在于所显示的能稳定不变的数字中最末一位的半个单位所代表的物理量。应当说明，“最大允差”是指所制造的同型号、同规格的所有仪器中有可能产生的最大误差，并不表明每一台仪器的每个测量值都有如此之大的误差。它既包括仪器在设计、加工、装配过程中乃至材料选择中的缺陷所造成的系统误差，也包括正常使用过程中测量环境和仪器性能随机涨落的影响。

(2) 测量值的有效数字

对于标刻度的量具和仪器，如果被测量值很明确，照明好，仪器的刻度清晰，要估读到最小刻度的几分之一（如 1/10、1/5、1/2）。这最小刻度的几分之一，即为测量值的估计误差，记作 $\Delta_{\text{估}}$ 。如用米尺测量书本上两条平行细线之间的距离，应能估读到最小刻度（1mm）的十分之一。人们常把能读准的数字叫可靠数字，估读的一位数字叫可疑数字，测量值的误差往往在这最后一位。用数字式仪表测量，凡是能稳定显示的数值都应记录下来。其数值的位数就是该测量值的有效数字。如用某数字万用表测电压，显示值为 217V 位数为 3 它的有效数字位数就是 3。如果测量值的末位或末两位数字变化不定，应当记录稳定的数值加下一位正在显示的值，或者根据其变化规律，四舍五入到读数稳定的那一位。如果两位以上的数字都变

化不定，应考虑选择更合适的量程或更合适的仪器。如用米尺测量一个边缘磨损的桌子的长度，因被测量值自身的不确定性，就只能读到毫米了，表示估计误差在毫米这一位。

表 1 常用仪器量具的主要技术要求和最大允差

量具(仪器)	量程	最小分度值	最大允差
木尺(竹尺)	30 ~ 50cm	1mm	± 1.0mm
	60 ~ 100cm	1mm	± 1.5mm
钢板尺	150mm	1mm	± 0.10mm
	500mm	1mm	± 0.15mm
	1000mm	1mm	± 0.20mm
钢卷尺	1m	1mm	± 0.8mm
	2m	1mm	± 1.2mm
游标卡尺	125mm	0.02mm	± 0.02mm
	300mm	0.05mm	± 0.05mm
螺旋测微器(千分尺)	0 ~ 25mm	0.01mm	± 0.004mm
七级天平(物理天平)	500g	0.05g	1.3mg(接近满量程)
			1.0g($\frac{1}{2}$ 量程附近)
			0.7g($\frac{1}{3}$ 量程及以下)
三级天平(分析天平)	200g	0.1mg	0.08g(接近满量程)
			0.06g($\frac{1}{2}$ 量程附近)
			0.04g($\frac{1}{3}$ 量程及以下)
普通温度计 (水银或有机溶剂)	0 ~ 100℃	1℃	± 1℃
精密温度计(水银)	0 ~ 100℃	0.1℃	± 0.2℃

3. 测量的不确定度

长期以来，人们用误差来表征测量结果可信程度的好坏。定义误差为测量值与“真值”的偏差。但“真值”是无法确定的，它只是一个理想值。比如两条平行线之间的距离，用米尺、游标卡尺、螺旋测微器和测长仪测得的结果分别为 24.6mm、24.58mm、24.579mm 和 24.5792mm。实际上，所谓“平行线”有一定宽度，而且线的边缘的微观感也是参差不齐的。“两线间宽度”指的是在某种精度下的一个长度范围。而“真值”只是一种理想值或约定值。在消除了系统误差的情况下，高准确度仪器的测量值就是低准确度仪器的相对真值。

以前国内外对于测量结果的不确定度的表述、运算规则都不尽统一。1992 年国际计量大会以及四个国际组织制定了协调的具有国际指导性的《测量不确定度表达指南》。1993 年，该《指南》经国际理化等组织批准实施。我国的计量标准部门也已明确提出应采用不确定度作为误差数字指标的名称。本节将以《指南》为基础，讲述测量不确定度的基本原理和具体应

用。

测量不确定度是与测量结果相关联的参数，用以表征测量值可信赖的程度，或者说它是被测量值在某一范围内的一个评定。测量不确定度分为 A 类标准不确定度和 B 类标准不确定度。前者由观测列统计分析评定，也称为统计不确定度；后者不按统计分析评定，也叫非统计不确定度。

(1) A 类标准不确定度

测量列的标准差和高斯分布

从理论上说，对物理量 x 做 n 次等精度测量，得到包含 n 个测量值 x_1, x_2, \dots, x_n 的一个测量列。由于是等精度测量，我们无法断定哪个值更可靠。概率论可以证明，其平均值

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

为最佳值，也称期望值，是最可以信赖的。

定义该测量列的标准差为

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / (n - 1)} \quad (2)$$

其统计意义是指当测量次数足够多时（比如大于 10 次），测量列中任一测量值与平均值的偏离落在 $[-\sigma, \sigma]$ 区间的概率为 0.683，这一公式称为贝塞尔公式。

当 n 趋于 ∞ 时，物理量 x 将成为连续型随机变量，其概率密度分布为正态函数，形式为

$$y = (x - \bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\zeta} e^{-(x-\bar{x})^2/2\zeta^2} \quad (3)$$

或

$$y(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\zeta} e^{-\delta^2/2\zeta^2} \quad (4)$$

其分布为一连续曲线，像一个倒扣的钟罩， δ 为绝对误差， $\delta = |x - \bar{x}|$ ， ζ 为一与具体测量条件有关的正参数，这种分布叫高斯分布或正态分布。

正态分布具有以下特点：

- (a) 对称性：无论比平均值大或小，其差值的绝对值相等时，出现的概率相等。
- (b) 单峰性：与平均值相差越大，出现的概率越小。
- (c) 有界性：在一定条件下，标准差的绝对值有一定限度。
- (d) 抵偿性：标准差的算术平均值随着 $n \rightarrow \infty$ 而趋于零。

当 $n \rightarrow \infty$ 时，用式 (2) 中 σ 代替式 (4) 中 ζ 得到

$$y(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\delta^2/2\sigma^2} \quad (5)$$

从正态函数积分表得到

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} y(\delta) d\delta &= 1 \\ \int_{-\delta}^{\delta} y(\delta) d\delta &= p(\sigma) = 0.683 \\ \int_{-2\sigma}^{2\sigma} y(\delta) d\delta &= p(2\sigma) = 0.954 \\ \int_{-3\sigma}^{3\sigma} y(\delta) d\delta &= p(3\sigma) = 0.997 \end{aligned}$$

以上各式表明当 $n \rightarrow \infty$ 时, 任何一次测量值与平均值之差落在 $[-\infty, \infty]$ 区间的概率为 1, 满足归一化条件; 而落在 $[-\sigma, \sigma]$ 区间的概率为 0.683 即表示置信概率为 68.3% 记为 $P = 0.683$ 落在 $[-2\sigma, 2\sigma]$ 区间的概率为 0.954 置信概率 $P = 0.954$ 落在 $[-3\sigma, 3\sigma]$ 区间的概率为 0.997, $P = 0.997$, 这就是标准差的统计意义。次数无限多地测量偏差的绝对值大于 3σ 的概率仅为 0.3%。对于有限次测量, 这种可能性是微乎其微的, 因此可以认为是测量失误, 该测量值是“坏值”应予以剔除。在分析多次测量的数据时 这是很有用的 3σ 判据。

正态分布是连续型随机变量中最重要、最常用的分布。一般而言, 若某个数量指标 x 是很多随机因素之和, 而每个因素所起的作用均匀微小, 则 x 为服从随机分布的变量, 如上述多次等精度独立测量的情况。实际上, 大量生产的同类产品, 当设备、技术、原料、工艺、操作等可控制的生产条件都相对稳定, 不存在明显的系统误差影响时, 产品的质量指标近似服从正态分布。

测量列的 A 类标准不确定度

在实际工作中, 人们往往关心的不是测量列的数据散布特性, 而是测量结果, 即算术平均值的离散程度。我们设想进行了有限的 n 次 (n 仍然足够大) 测量后, 得到一个最佳值 \bar{x} , 这一测量列中任一次测量值 x_i 的误差落在 $-\sigma_x$ 到 σ_x 区间内的概率为 68.3%。如果我们增加测量次数, 例如 ($n+m$) 次 则可得到另一个最佳值 \bar{x}' 和相应的标准差 $\sigma_{x'}$ 。 \bar{x} 与 \bar{x}' 、 σ_x 与 $\sigma_{x'}$ 一般不会相同。继续增加测量次数, 可以发现 \bar{x} 也是一个随机变量。那么, 随着测量次数的增加, 算术平均值 \bar{x} 本身的可靠性如何呢? 算术平均值的标准差, 用 u_A 表示, 具有什么样的性质呢? 显然 \bar{x} 肯定要比测量列中的任一测量值更可靠。由概率论可以证明算术平均值 \bar{x} 的标准差 u_A 为

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (6)$$

当测量次数趋于无限时, 算术平均值将无限接近待测物理量的客观值, 为最佳值。 u_A 的统计意义为: 待测物理量落在 $[\bar{x} - u_A, \bar{x} + u_A]$ 区间内的概率为 68.3% 落在 $[\bar{x} - 2u_A, \bar{x} + 2u_A]$ 区间内的概率为 95.4% 落在 $[\bar{x} - 3u_A, \bar{x} + 3u_A]$ 区间内的概率为 99.7%。 u_A 叫做该测量列的 A 类标准不确定度, 即该测量列的平均值的标准差。

有限次测量的情况与 t 因子

测量次数趋于无穷只是一种理论情况, 这时物理量的概率密度服从正态分布。当次数减少时, 概率密度曲线变得平坦, 成为 t 分布。当测量次数趋于无限时, t 分布过渡到正态分布。

对有限次测量的结果, 要保持同样的置信概率, 显然要扩大置信区间, 把 u_A 乘以一个大于 1 的因子 t 。在 t 分布下, A 类不确定度记为 Δ_A

$$\Delta_A = t_p u_A \quad (7)$$

要使测量值落在平均值附近, 具有与正态分布相同的置信概率, 即 $P = 0.68$ 置信区间要扩大为 $[-t_p u_A, t_p u_A]$, t_p 与测量次数有关。

表 2 给出不同置信概率下 t 因子与测量次数的关系 (有些资料用自由度 γ 代表测量次数 n , 对于一个物理量的测量, $\gamma = n - 1$)。

表 2 t 与 n 的关系

$\frac{n}{P}$	t	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	∞
0.68		1.32	1.20	1.14	1.11	1.09	1.08	1.07	1.06	1.04	1.03	1
0.90		2.92	2.35	2.13	2.02	1.94	1.86	1.83	1.76	1.73	1.71	1.65
0.95		4.30	3.18	2.78	2.57	2.46	2.37	2.31	2.26	2.15	2.09	1.96
0.99		9.93	5.84	4.60	4.03	3.71	3.50	3.36	3.25	2.98	2.86	2.58

泊松分布

描述离散性随机变量的取值概率与连续型变量有所不同。对于大量次数的试验，其中小概率事件出现的次数，常用泊松分布表示，若随机变量 x 取非负整数 k 的概率为

$$P(x = k) = P(k, \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (\lambda > 0)$$

则 x 的分布称为泊松分布， λ 是参数。泊松分布应满足归一化条件

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k, \lambda) = 1$$

在人口统计、核物理计数中常用泊松分布。像正态分布、 t 分布一样，泊松分布也有表可查。

(2) B 类标准不确定度

测量仪器的最大允差

测量中凡是不符合统计规律的不确定度统称为 B 类不确定度。记为 Δ_B 。在物理实验中，经常遇到一些不能多次重复测量的情况，如热敏半导体的电阻与温度关系的动态测量。有时，仪器的精度较低，多次测量的结果可能完全相同，反映不出随机性，多次测量便失去意义。事实上，实际工作和生活中，绝大多数测量都是一次测量。对一般有刻度的量具和仪表，估计误差在最小分格的 $1/10 \sim 1/5$ 通常小于仪器的最大允差 $\Delta_{\text{仪}}$ 。所以通常以 $\Delta_{\text{仪}}$ 表示一次测量结果的 B 类不确定度。测量值与客观值（即所谓的真值）的误差在 $[-\Delta_{\text{仪}}, \Delta_{\text{仪}}]$ 内的置信概率为 1。

实际上，仪器的误差在 $[-\Delta_{\text{仪}}, \Delta_{\text{仪}}]$ 范围内是按一定概率分布的。在相同条件下大批生产的产品，其质量指标一般服从正态分布。由正态分布函数的性质可知，误差大于三倍标准差的概率不到 0.3%，所以质量指标服从正态分布的产品，一次测量值的 B 类标准差（记为 u_B ）为 $\Delta_{\text{仪}}/3$ 。

一般而言， u_B 与 $\Delta_{\text{仪}}$ 的关系为

$$u_B = \Delta_{\text{仪}} / C$$

式中， C 为置信系数。

也有一些仪器的质量指标在 $[-\Delta_{\text{仪}}, \Delta_{\text{仪}}]$ 范围内服从均匀分布或三角分布。均匀分布的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta_{\text{仪}}}, & |x| \leq \Delta_{\text{仪}} \\ 0, & |x| > \Delta_{\text{仪}} \end{cases} \quad (8)$$

根据概率统计理论，对于均匀分布函数的 B 类标准差， $C = \sqrt{3}$ ，即 $u_B = \Delta_{\text{仪}}/\sqrt{3}$ ，测量值误差在 $[-u_B, u_B]$ 内的置信概率 $P = 0.58$ ；而对三角分布， $C = \sqrt{6}$ ，即 $u_B = \Delta_{\text{仪}}/\sqrt{6}$ ，在

$[-u_B, u_B]$ 内的置信概率 $P = 0.74$ 。只有对正态分布，测量值误差落在 $-u_B, u_B$ 内的概率才是 $P = 0.68$ 。正态分布条件下测量值的 B 类不确定度 $\Delta_B = k_p u_B = k_p \frac{\Delta_{\text{仪}}}{C}$ ， k_p 为置信因子，置信概率 P 与 k_p 的关系见表 3。

表 3 P 与 k_p 的关系

P	0.500	0.683	0.900	0.950	0.955	0.990	0.997
k_p	0.675	1	1.65	1.96	2	2.58	3

几种常见仪器的质量指标在最大允差 $\Delta_{\text{仪}}$ 内的分布与置信系数 C 的关系见表 4。

表 4 几种常见仪器的误差分布及置信系数 C

仪器名称	米尺	游标卡尺	千分尺	物理天平	秒表
误差分布	正态分布	均匀分布	正态分布	正态分布	正态分布
C	3	$\sqrt{3}$	3	3	3

目前人们对很多仪器的质量标准在最大允差范围内的分布性质有不同的说法，对某些分布性质还不清楚。很多文献都把它们简化成均匀分布来处理。但必须指出，只有服从正态分布的随机量落在正负标准差范围内的概率才等于 0.683。其他分布函数没有这种性质。

测量的估计误差

我们曾讨论过，一般 $\Delta_{\text{估}}$ 比 $\Delta_{\text{仪}}$ 小得多，所以将 $\Delta_{\text{仪}}$ 作为一次测量结果的 B 类不确定度，且在此范围内的置信概率 $P = 1$ ，但也有例外。以长度测量为例，正常测量操作应是先将直尺的某一刻线对齐被测物的一端（记下该刻线的读数），然后读取被测物另一端对应的米尺读数，两读数之差即为被测物的长度值。在拉伸法测弹性模量实验中，要测量钢丝长度以及反射镜与标尺间的距离（约 1m 左右），但由于装置的原因，很难将被测物两端与米尺的刻线对齐。这时测量结果的最大误差可估计为 1mm。在较暗的房间中做几何光学实验，测量光学元件间距时，也有类似情况。

在第 30 届国际物理奥林匹克竞赛的实验中，需用一个 T 型金属物判断某杆质心所在。 T 型物的棱宽为 2.0mm 杆在其上左右移动 1.0mm，均能保持平衡。因此对质心位置的测量便有 $\Delta_{\text{估}} = \pm 1.0\text{mm}$ 远大于钢尺的 $\Delta_{\text{仪}}(0.15\text{mm})$ 。

再如用电子秒表测时，电子秒表内的石英晶体振荡频率的准确度在 10^{-5}s 以上。但实验者在判定计时开始和结束时会有 0.1 ~ 0.2s 的估计误差，远远大于 $\Delta_{\text{仪}}$ 。

由于 $\Delta_{\text{估}}$ 和 $\Delta_{\text{仪}}$ 是相互独立的，都不满足统计规律，所以

$$\Delta_B = \sqrt{\Delta_{\text{估}}^2 + \Delta_{\text{仪}}^2} \quad (9)$$

若一个分量小于另一分量的三分之一，则按式 (9)，可以忽略较小的分量。

与仪器最大允差 $\Delta_{\text{仪}}$ 类似， $\Delta_{\text{估}}$ 是估计读数的最大允差。关于测量误差在 $[-\Delta_{\text{估}}, \Delta_{\text{估}}]$ 内的分布性质，尚未见确切的说法，可以预期与 $\Delta_{\text{仪}}$ 有相同的性质。这时测量结果的 B 类标准不确定度为

$$u_B = \Delta_B / C \quad (10)$$

(3) 合成标准不确定度和展伸不确定度

假设测量误差在 $[-\Delta_B, \Delta_B]$ 范围内服从正态分布，这时 B 类标准不确定度为 $u_B = \Delta_B / \sqrt{3}$ ，测量值的合成标准不确定度为

$$U = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}, \quad P = 0.68 \quad (11)$$

$t_{0.68}$ 因子修正后有 $P = 0.68$)

$$U_{0.68} = \sqrt{(t_p u_A)^2 + u_B^2} = \sqrt{(t_p u_A)^2 + (\Delta_{\text{仪}}/C)^2}$$

将合成标准不确定度乘以一个与一定置信概率相联系的包含因子 (或称覆盖因子) K , 得到增大置信概率的不确定度, 叫做展伸不确定度 (或扩展不确定度)。国家技术监督局 1994 年建议, 通常取置信概率为 0.95 对正态分布, $k_p = 1.96$ 即 $K \approx 2$ 由式 (11) 得展伸不确定度为

$$U_{0.95} = 2U_{0.68} = 2\sqrt{u_A^2 + u_B^2}, \quad P = 0.95 \quad (13)$$

若置信概率为 0.99 ($k_p = 2.58$) 取 $K \approx 3$ 则展伸不确定度为

$$U_{0.99} = 3U_{0.68} = 3\sqrt{u_A^2 + u_B^2}, \quad P = 0.99 \quad (14)$$

考虑到通常实际测量次数 $6 \leq n \leq 10$, $t_{0.95} \approx 2.5$, $\sqrt{n} \approx 2.8$ 所以 $t_{0.95}/\sqrt{n} \approx 1$ 同样, $K = 2$, $C = 3$, $(K/C)^2 \approx \frac{1}{2}$ 所以式 (12) 为

$$U_{0.99} = \sqrt{(2u_A)^2 + (2u_B)^2} = \sqrt{(t_{0.95} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})^2 + (k \frac{\Delta_{\text{仪}}}{C})^2} \quad (15)$$

$$\text{或} \quad U_{0.95} = \sqrt{\sigma^2 + \frac{1}{2}\Delta_B^2} = \sqrt{\sigma^2 + \frac{1}{2}\Delta_{\text{仪}}^2 + \frac{1}{2}\Delta_{\text{估}}^2} \quad (16)$$

式中, σ 为 n 次测量列的标准差。

注意到测量结果不确定度的统计意义以及在上述操作中所做的许多近似, 在实际工作中, 常常忽略不同分布的差别 (甚至也不知道是何种分布), 而把 $\Delta_{\text{仪}}$ 和 $\Delta_{\text{估}}$ 都当成均匀分布对待, 取置信因子 $C = \sqrt{3}$ 代入式 (15), 得到一种较为保守的估算公式, 考虑到 $(K/C)^2 \approx 1$, 有

$$U = \sqrt{\sigma^2 + \Delta_B^2} = \sqrt{\sigma^2 + \Delta_{\text{仪}}^2 + \Delta_{\text{估}}^2}, \quad P \geq 0.95 \quad (17)$$

式 (17) 的计算值偏大是显见的 (或者说置信概率偏小), 因为即使 $\sigma = 0$ 按 $\Delta_{\text{仪}}$ 的定义, 测量值在 $[-\Delta_{\text{仪}}, \Delta_{\text{仪}}]$ 范围内的概率为 1。所以如使用式 (17) 计算, 置信概率应标为 $P \geq 0.95$ 。

用由均匀分布或三角分布得到的 B 类标准不确定度与服从正态分布的 A 类标准不确定度来计算合成不确定度时, 其结果与 Δ_B 和 $\Delta_{\text{仪}}$ 之比有关, 计算较为复杂, 这里不多介绍。

从以上计算公式的推演过程的诸多近似中可以看出, 测量结果的表达式给出了物理量的期望值及其在一定置信概率下的置信区间。所以, 置信概率和不确定度通常只取两位有效数字, 不确定度的首位数字大于等于 3 时, 也可取一位有效数字。

(4) 测量结果的表示

根据所用的置信概率, 测量结果的最终表达式为

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} \pm U_{0.68}, & P &= 0.68 \\ x &= \bar{x} \pm U_{0.95}, & P &= 0.95 \\ x &= \bar{x} \pm U_{0.99}, & P &= 0.99 \end{aligned} \quad (18)$$

式中, \bar{x} 为不含系统误差的测量结果, 通常就是测量列的平均值, 不确定度取 1 位或 2 位有效数字, 测量值 x 的最后一位与不确定度的最后一位对齐。

测量结果也可以采用相对展伸不确定度的形式

$$x = \bar{x} (1 \pm U_r) \quad (19)$$

同样注明 P 值 式中 U_r 为 U/\bar{x} ，取一位或两位有效数字，用百分数来表示。

(5) 标准不确定度的传递与合成

间接测量量

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (20)$$

其中 x_1, x_2, \dots, x_n 如果为相互独立的直接测量量，则有

$$U^2(y) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) \quad (21)$$

其中 $u(x_i)$ 为测量量 x_i 的标准差。常用的函数不确定度传递公式在表 5 中列出。

表 5 常用函数不确定度的传递公式

函数表达式	传递(合成)公式
$W = x \pm y$	$\sigma_w = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$
$W = x \cdot y$	$\frac{\sigma_w}{W} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$
$W = x/y$	$\frac{\sigma_w}{W} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$
$W = \frac{x^k y^n}{z^m}$	$\frac{\sigma_w}{W} = \sqrt{k^2 \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + n^2 \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 + m^2 \left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2}$
$W = kx$	$\sigma_w = k\sigma_x, \quad \frac{\sigma_w}{W} = \frac{\sigma_x}{x}$
$W = k\sqrt{x}$	$\frac{\sigma_w}{W} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_x}{x}$
$W = \sin x$	$\sigma_w = \cos x \sigma_x$
$W = \ln x$	$\sigma_w = \frac{\sigma_x}{x}$

从表上可以看出，当函数为加减形式时，合成不确定度的平方为分量的平方和；当函数为乘除法时，求相对不确定度比较方便。表中各量的 σ 值可以理解为测量列标准差或 A 类标准不确定度或展伸不确定度，所用公式皆相同。不同物理量测量的次数可能不同，各自采取不同的 t 因子，但是要求合成时各测量值具有相同的置信概率。这样合成以后，最终结果的不确定度才有共同的置信概率。

求间接测量结果的不确定度的步骤如下：

- (1) 对函数求全微分(对加减法)或先取对数再求全微分(对乘除法)；
- (2) 合并同一分量的系数，合并时，有的项可以相互抵消，从而得到最简单的形式；
- (3) 系数取绝对值；
- (4) 将微分号变为不确定度符号；
- (5) 求平方和

以上是操作过程，不是数学推导，所谓“不确定度符号”，可以指各直接测量值的最大允

差、标准差或合成不确定度等，但在同一式中必须性质相同，具有相同的置信概率。这样，间接测量结果的置信概率不变。

【例 1】用流体静力称衡法测固体密度，公式为

$$\rho = \frac{m}{m - m_1} \rho_0$$

求测量结果的不确定度表达式。

解 取对数

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \ln \frac{m}{m - m_1}$$

求微分

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\partial m}{m} - \frac{\partial(m - m_1)}{m - m_1} + \frac{\partial\rho_0}{\rho_0}$$

合并同类项

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\partial m}{m} - \frac{\partial m}{m - m_1} + \frac{\partial m_1}{m - m_1} + \frac{\partial\rho_0}{\rho_0}$$

系数取绝对值并改成不确定度符号得

$$\frac{u_\rho}{\rho} = \left| \frac{m_1}{m(m - m_1)} \right| u_m + \left| \frac{1}{m - m_1} \right| u_{m_1} + \left| \frac{1}{\rho_0} \right| u_{\rho_0}$$

最后写成标准差公式为 $\left(\frac{u_\rho}{\rho}\right)^2 = \left[\frac{m_1}{m(m - m_1)} u_m\right]^2 + \left[\frac{1}{m - m_1} u_{m_1}\right]^2 + \left[\frac{1}{\rho_0} u_{\rho_0}\right]^2$

在很多情况下，往往只需粗略估计不确定度的大小，可采用较为保守的线性（算术）合成法则计算。这时，只需完成上述步骤的第（4）步，式中各不确定度符号可理解为最大允差。

由于取绝对值相加，得到的不确定度定值偏大，又称最大不确定度。

常用函数的最大不确定度算术合成公式如表 6 所示。

表 6 常用函数的不确定度算术合成公式

物理量的函数式	不确定度	相对不确定度
$W = x + y + z + \dots$	$\Delta x + \Delta y + \Delta z + \dots$	$\frac{\Delta x + \Delta y + \Delta z + \dots}{x + y + z + \dots}$
$W = x \pm y$	$\Delta x + \Delta y$	$\frac{\Delta x + \Delta y}{x \pm y}$
$W = kx$	$k\Delta x$	$\frac{\Delta x}{x}$
$W = x \cdot y$	$x\Delta y + y\Delta x$	$\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
$W = x^n, n = 1, 2, 3, \dots$	$nx^{n-1}\Delta x$	$n \frac{\Delta x}{x}$
$W = \frac{x}{y}$	$\frac{x\Delta y + y\Delta x}{y^2}$	$\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
$W = \sin x$	$\cos x \cdot \Delta x$	$\cot x \cdot \Delta x$
$W = \tan x$	$\frac{\Delta x}{\cos^2 x}$	$\frac{2\Delta x}{\sin 2x}$
$W = \ln x$	$\frac{\Delta x}{x}$	$\frac{\Delta x}{x \ln x}$

(6) 不确定度分析的意义和不确定度均分原理

不确定度表征测量结果的可靠程度，反映测量的精确度。另外，更重要的是人们在接受一项测量任务时，要根据对测量不确定度的要求设计实验方案，选择仪器和实验环境。在实验过程中和实验后，通过对不确定度大小及其成因的分析，找到影响实验精确度的原因并加以校正。比如，有一项测量重力加速度的任务，要求不确定度小于 1%，我们可以用最简单的单摆法，但若要求不确定度小于 0.1%，如果仍采用单摆法，就必须注意到公式 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 的近似性，而考虑摆角的高次方、摆线的质量以及线长在振动中的变化、空气阻力的影响等诸多因素。而这些因素是难以准确测量的，因此可考虑用物理摆来测量。

历史上不乏科学家精益求精，通过对实验不确定度的分析并不断改进实验做出重大发现的例子。比如科学家曾通过对氢原子量实验值不确定度的研究，认定有未知系统误差的存在，最终发现了氢的同位素氘和氚，并发明了质谱仪。19 世纪，许多科学家历经多年实验，排除了多种系统误差，不断提高实验准确度，从而较准确地测定了热功当量值。这为人类认知能量转化和守恒定律起到了奠基的作用。

不确定度均分原理

在间接测量中，每个独立测量量的不确定度都会对最终结果的不确定度有贡献。如果已知各测量量之间的函数关系，可写出不确定度传递公式，并按均分原理，将测量结果的总不确定度均匀分配到各个分量中，由此分析各物理量的测量方法和使用的仪器，指导实验。一般而言，这样做比较经济合理，对测量结果影响较大的物理量，应采用精度较高的仪器，而对影响结果影响不大的物理量，就不必追求高精度仪器。

【例 2】圆柱体的体积 V 可通过测量其直径 D 和高度 h 来得到。粗测其直径 D 约为 0.8cm 高 h 约为 3.2cm 若要求 $\frac{\Delta V}{V} \leq 0.5\%$ 应怎样选择仪器？

解 由于 $V = \frac{\pi}{4} D^2 h$ 按最大不确定度公式估算 有

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{2\Delta D}{D} + \frac{\Delta h}{h}$$

应用均分原理， $\frac{\Delta D}{D} \leq 0.25\%$ 和 $\frac{\Delta h}{h} \leq 0.25\%$ 将 D 和 h 的粗测值代入有 $\Delta D \leq 0.001\text{cm}$ 和 $\Delta h \leq 0.008\text{cm}$ 。

考虑到螺旋测微器最大允差为 0.0001cm 游标卡尺最大允差为 0.002cm 而钢板尺最大允差为 0.01cm，显然，测圆柱体直径应选用螺旋测微器，但螺旋测微器的量程只有 2.5cm 测高度应选用游标卡尺。

三、数据处理的基本方法

在物理实验中，为了使实验结果能清楚地表达出来，需对数据进行处理。处理数据的常用方法有列表法、作图法、逐差法和最小二乘法等。这些方法在科学实验中经常用到，希望能掌握。

1. 列表法

在记录数据和处理数据时，为了清楚明确地表示相关物理量的关系，常将数据或处理数

据的结果列成表格。这样可以及时发现和分析所测数据是否合理，运算是否正确，并有助于找出各物理量间的规律，得出正确的结论。

列表应该简单明了，使之能看出有关量之间的关系，并便于数据处理。一般的要求是：

- (1) 必须有标题，说明是什么量的关系表。
- (2) 必须注明表中各符号所表示的物理量名称，并写明单位。

如果各栏物理量不同，单位应写在标题栏内，如果各栏的单位相同，则可写在表的右上角。

- (3) 表中的数据要正确反映测量值的有效数字。
- (4) 必要时可对某一项目加以说明。

如表 7 所示，正确列出铜的电阻与温度的测量数值。

表 7 测定铜的电阻温度系数的 $R - t$ 关系

测量次序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
温度 t (°C)	23.1	30.8	40.6	50.2	61.0	71.1	80.6	90.0	92.8	95.0	98.4
电阻 R (Ω)	5.093	5.239	5.438	5.615	5.838	6.029	6.218	6.405	6.470	6.515	6.580

2. 作图法

为了能直观地表达所测物理量之间的关系，找出它们的变化规律，物理实验所得出的一系列数据，通常都用作图法进行研究。作图法是求经验公式的常用方法之一，也是物理实验中处理数据的常用方法。作出一张正确、实用、美观的图，是实验技能训练中的基本功。如图 2 反映了表 7 中的 $R - t$ 关系。

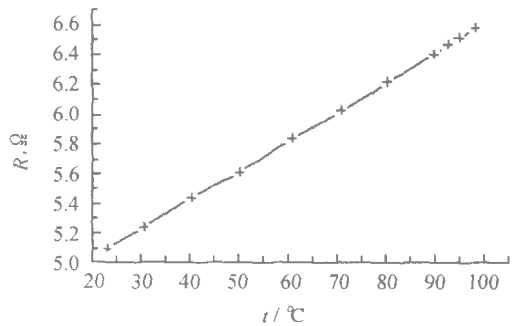


图 2 $R - t$ 关系图

(1) 作图规则

作图之前，先要将记录的有关数据列表，然后再按下列要求来做。

选用合适的坐标纸

常用的作图坐标纸有直角坐标纸、单对数坐标纸和双对数坐标纸等。可根据具体情况选用合适的坐标纸。在物理实验中常用直角坐标纸。

确定坐标轴

通常以横坐标表示自变量，以纵坐标表示因变量；画坐标轴时，要标明坐标轴的方向，以及所表示的物理量和单位。

确定坐标轴的标度

选取坐标轴标度时要注意使用测量数据的可靠数字，即最末位可靠数字应与坐标纸中最小分格对应，当然也可适当扩大一些，可疑数字在图中应是估计的。为了使所作的图线比较对称地充满坐标纸，坐标轴的起点不一定从零点开始。同时坐标轴的比例要选用适当，一般取 1、2、5 等比例，不取 3、7、9 等比例。选好比例后，在坐标轴上每隔一定间距标明该物理量的数值（注意 标明有效数字）。

标数据点

根据测量数据，在坐标纸上找出两个相关数据构成的数据点，并在其对应位置上用削尖

的铅笔画上“+”号。“+”号的交叉点应是数据的最佳值点。交叉点到“+”号端点的距离应为该点数据的误差大小。如果一张坐标纸上要画几条曲线，每条曲线的数据点可用不同的标记，如“x”“▲”“▽”等，予以区别。各种符号的交叉点或中心应为对应数据的最佳值点。

连线

用透明直尺、曲线板等作图工具，把数据点连成光滑的直线或曲线（校准曲线可连成折线，除此之外，一般都不连成折线）。连直线时，需反复移动直尺，使直线各段两侧分布的数据点大致相等，而且与直线的距离也大致相同。连曲线时，应使各数据点差不多都在曲线板的边缘附近。一般采用“连四画三”或“连三画二”的方法，即分段选用四个（或三个）点，使各点都差不多与曲线板某段曲线吻合，画出中间三个点（或两个点）的连线，然后移到下一段；用同样的方法“连四点”（此时应包括前一段未画上的点）再“画三点”。注意：连线时应保证各段曲线光滑、连贯。

⑥ 图注或说明

有时要标明图线名称或当时所处的温度、压强和湿度等。图线画好后，把它附在实验报告上。

(2) 图解法求图线参数

对已作出的图线用解析的方法，可求得图线的一些参数或图线的方程。

求直线图线的斜率和截距

如果图线是直线，则由解析几何可知，它满足 $y = kx + b$ 关系。

在直线上取两点（为减小相对误差，这两点相距尽量远些，但不取原始实验数据点）。把两点坐标值代入直线方程，解得直线斜率为

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

k 的单位由 x, y 的单位决定。

如果横坐标起点为零，则截距 b 的数值可由图中直接读出。如果横坐标起点不为零，则截距 b 的数值为

$$b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

外推法

直线的斜率知道了，我们还可以用“外推法”求得测量范围外的数据点。所谓“外推法”就是把图线向外延伸，对应于某一自变量 x 值，去求得函数 y 值的方法。例如，测量电阻温度系数时，则可以把直线延长外推而求得 0 时的电阻 R_0 。应注意的是，使用“外推法”时必须假定物理关系在外延范围内也是成立的。

(3) 函数关系的线性化和曲线改直

在实验中，许多物理量之间的关系都不是线性的。但经过适当的变换，可以使这两个函数具有线性关系，这种方法称为函数关系的线性化。如果原来的函数关系是用曲线表示的，则函数关系线性化后，可以用直线来表示，这称为“曲线改直”。现举例如下：

① $y = ax^b$ 其中 a, b 均为常数，两边取对数得 $\lg y = \lg a + b \lg x$ 。若以 $\lg x$ 为自变量， $\lg y$ 为函数（或因变量）则得到斜率为 b 截距为 $\lg a$ 的直线。

② $y^2 = 2px$ ，其中 p 为常数

把上式改写为 $y = \sqrt{2px}$ 则自变量为 \sqrt{x} 函数为 y 斜率为 $\pm\sqrt{2p}$ 。

③ $pV = C$ 其中 C 为常数, 把上式改写为 $p = C \frac{1}{V}$ 则 p 为 $\frac{1}{V}$ 的线性函数。

(4) 用对数坐标纸作图

常用的对数坐标纸有双对数坐标纸和单对数坐标纸。对数坐标纸的尺度与所标数的对数值成正比。对数坐标纸的每一级(一组 1, 2, 3, ..., 10) 对应一个数量级。现举例说明如何在对数坐标纸上作图。

【例 3】在落体法测刚体转动惯量的实验中, 扣除摩擦力矩后, 得到一组砝码的质量 m 与下落时间 t 的数据如表 8 所示。

表 8 物体质量 m 与下落时间 t 的关系

$m(\text{g})$	5.0	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0	40.0	45.5
$t(\text{s})$	14.20	9.50	7.55	6.70	5.97	5.40	4.70	4.35

现求 m 与 t 的关系。

解 用上表所列数据在二级双对数坐标纸上作图, 得一直线(见图 3)。说明 m 与 t 的关系是幂函数关系。设 $m = at^n$ 式中 a, n 为待定常数。对上式取对数后有

$$\lg m = \lg a + n \lg t$$

现求斜率 n 。在直线上取 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 两点, 量得纵向尺度差 $y_2 - y_1 = -8.89\text{cm}$, 横向尺度差 $(x_2 - x_1) = 4.45\text{cm}$, 故斜率

$$n = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{8.89}{4.45} = -1.998 \approx -2.0$$

可见, m 与 t^{-2} 成正比。系数 a 可从图中直接读得, 或从图中任选一点, 求出 t, m 值, 代入原函数式, 即可求得。

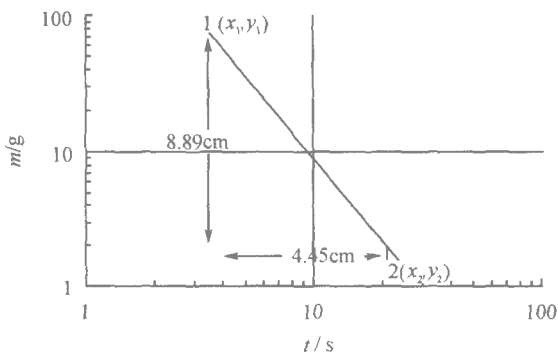


图 3 m 与 t 的关系图

3. 逐差法

逐差法是物理实验中经常使用的处理数据的一种方法。设有 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ 共 $(n+1)$ 个测量数据, 用逐差法处理这些数据时, 把它们对半分两组, 对应项相减, 再求平均值和误差。

例如 设有 x_0, x_1, \dots, x_7 共 8 个数据, 把它对半分为两组, 则对应项的差值为

$$\delta_1 = x_4 - x_0, \quad \delta_2 = x_5 - x_1$$

$$\delta_3 = x_6 - x_2, \quad \delta_4 = x_7 - x_3$$

再求平均值

$$\bar{\delta} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \delta_i = \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4}{4}$$

和算术平均绝对误差

$$\Delta \bar{\delta} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 |\delta_i - \bar{\delta}|$$

实际上, 这样处理的结果是达到了在大量数据中求平均, 以减少误差的目的。

当然, 也可采用相邻项逐差的方法(逐项逐差)再求其平均值和误差。例如 对上例进行