第一章　　绪论

第一节　　大学物理实验课的作用与任务

一、物理实验课的作用与地位

物理学是一门实验科学。物理规律的发现、物理概念的确立都来源于对实验的观察和研究，并受到实验的检验。例如，牛顿是在伽利略、开普勒等人的实验及其工作的基础上归纳总结出万有引力定律并完成了经典力学体系；电磁学中的一系列定律：库仑定律、安培定律、毕奥一沙伐定律、法拉第电磁感应定律等，也都是从大量的实验数据中综合、归纳出来的。麦克斯韦在大量实验的基础上总结并建立了电磁场理论， 14 年后赫兹的电磁波实验才使他的电磁场理论获得普遍承认；卢瑟福的 α 粒子散射实验揭开了原子的秘密；著名的迈克尔逊—莫雷实验为爱因斯坦的狭义相对论原理提供了强有力的证据，铺平了相对论发展的道路。而引力红移、光线弯曲、水星近日点的进动等实验验证，使广义相对论为人们所接受。黑体辐射、光电效应、原子光谱线系等实验，促使了量子理论的诞生，并为夫兰克一赫兹实验所证实。尤其是现代物理实验技术以及物理测量仪器，已被广泛地运用到大多数现代化科学研究、生产技术领域。根据一些实验物理学的统计，从 1947 年在物理实验室内创造出第一个晶体三极管以来到现在，许多现代物理实验技术和手段，如光谱分析、质谱、波谱、色谱以及半导体、 x 射线、电子显微镜、激光、全息、光导纤维、微波、红外、真空、超导、低温、核磁共振、电子衍射、自动控制等正朝气蓬勃地活跃在各种科研实验室及工业生产的前沿阵地上。可见物理实验对于推动科学与技术的发展起到了重要的作用，对于科技工作者来说，物理实验的有关知识与技能是必不可少的。

物理实验是人们借助特定的仪器设备,出于一定目的,人为地控制和模拟自然现象,并反复地观察和测试的一种研究方法。在其中需突出主要因素，忽略次要因素。物理实验的一项重要任务是培养学生以事实为依据，理论与实践相结合的科学态度；一丝不苟的工作作风；严密观察,勤于思考,勇于探索的精神。具有这样的素质,对于从事任何一项工作都是有所裨益的。

大学物理实验课是理工科学生首次进行科学实验基本训练的一门独立的必修基础课，认真学好实验课与学好物理理论课同等重要。

二、物理实验的任务与目的

（ 1 ）通过对实验的观察、测量与分析，从理论与实际相结合上加深认识物理原理、物理概念与物理规律，同时也要将已学的理论知识用于指导实验和分析实验

（2）对学生进行实验方法和实验技能的基本训练，其中包括：

①熟悉常用仪器的基本原理和性能，能够借助教材或仪器说明书正确地安装、调节、操作与读数。

②熟悉基本物理量常用的测量方法及其减小测量误差的方法。

③学会正确做实验记录、处理实验数据、分析判断实验结果、绘制曲线、写出合格的实验报告。

（3）培养学生严谨的工作作风、实事求是的科学态度、爱护公共财物、团结协作、遵守纪律的优良品德。

第二节　物理实验课的要求与规则

一、物理实验课的基本程序与要求

1. 实验前的预习

为了顺利、按时完成实验任务，学生一定要做好实验前的预习。

预习时应理解实验原理，搞清实验内容和要用的实验方法。为了使测量数据一目了然，防止遗漏，应根据实验要求预先画好或设计好数据表格。

不了解实验原理就动手操作，只能机械地按照教材所规定的步骤进行，尽管照猫画虎地取得了一些数据，但不能深入理解物理现象的实质，也不会注意实验方法中的技巧，当然更谈不上主动地分析实验中的各种现象了。

2. 实验操作

实验操作是物理实验课程中最重要的环节，学生要充分利用这个过程认真调节仪器，仔细观察实验现象，一丝不苟地记录数据，以求得到最大的收获。

进入实验室，首先要了解实验规则及注意事项；其次就是要熟悉和安装调整仪器，经教师检查电路后开始测量。测量的原始数据（一定不要加工或修改）应整齐地记录在实验数据表中，数据的有效位数由仪器的精度或分度值根据需要加以确定，数据之间要留有间隙，以便补充。若发现记录的数据有误应用笔划掉，并将正确数据写在旁边，不要在原数据上涂改，因为有时在仔细核对以后常发现它并没有错。不要忘记记录有关的实验环境条件，仪器的精度、规格及测量的单位。实验原始数据的优劣，决定着实验的成败，读数时务必认真仔细，运算的错误可以修改，原始数据则不能擅自改动。两人同做一个实验时，既要分工又要协作，共同配合完成实验。最后应关闭电源，整理实验仪器，清理桌面。

3. 实验报告

实验报告是实验工作的总结，要用简明的形式将实验情况及结果完整而又准确地表达出来。实验报告要求文字通顺、字迹端正、图表规矩、结果正确、讨论认真。应养成实验结束后尽早写出实验报告的习惯，因为这样做可以收到事半功倍的效果。

完整的实验报告应包括的内容：

(1)实验名称。

(2)实验目的。

(3)实验原理：应简要地说明并列出实验中使用的主要公式、电路或光路图，若实际所用与教材中列出的不符，应以实际采用的为准。

(4)仪器用具：列出主要仪器的型号、规格，并记录其编号。

(5)实验记录：全部实验中有用的数据要尽量以表格的形式列出，并正确地表示出有效数字和单位。

(6)数据处理：根据要求计算出最后的测量结果，可采用列表和作图法等手段，对所得的数据应进行误差分析。

(7)实验结果：最后的结果应包括测量值、误差和单位，如果实验是为了观察某一物理现象或者观察某一物理规律，可只扼要地写出实验结论。

(8)讨论分析：回答指定的实验思考题；描述实验中观察到的异常现象及可能的解释；分析实验误差的主要来源；对实验仪器和方法的改进建议等，还可以谈谈实验的心得体会。

以上是对报告的一般性要求，不同的实验，可以根据具体情况有所侧重和取舍，不必千篇一律。

二、实验室规则

(1)实验时应严格遵守操作规程，注意安全，爱护仪器，在未弄清楚注意事项和操作方法之前不要乱动仪器。

(2)细心操作：认真观察，及时记录实验原始数据，绝不允许事后追记。

(3)实验室要保持肃静和整洁，不得大声喧哗、抽烟和吃东西。

(4)无故迟到超过10分钟或没有预习者不得进入实验室做实验。

(5)如遇到自己不能处理的问题应及时报告教师，电学实验电路连接完毕要经过教师同意，方可接通电源。

(6)实验结束后应将仪器、用具整理好。原始数据须经教师过目并签字后才能离开实验室，原始数据一律要附在实验报告后面一起交给教师。

第二章　　测量误差与数据处理的基础知识

本章将介绍测量误差估计、实验数据处理和实验结果的表示等内容。所介绍的都是初步知识，这些知识不仅在每一个实验中都要用到，而且也是今后从事科学实验所必须掌握的。对这些内容的深入讨论是普通计量学和数理统计学的任务，本书只是引用其中的某些结论和公式。

第一节　　测量与误差

一、测量及其误差

1. 测　量

物理实验是以测量为基础的。研究物理现象、验证物理原理、了解物质特性等都要进行测量。所谓测量，就是通过各种方法对“被测量”进行赋值。测量通常分为直接测量和间接测量。“直接测量”是指可直接从仪器（或量具）上获知被测量大小的测量。例如，用米尺测量物体的长度，用天平和砝码测量物体的重量，用温度计测量温度，用电压表测量电压等都是直接测量。“间接测量”是指借助于直接测量的量与被测量的量之间已知的函数关系，由直接测量结果计算出被测量的量的数值。例如，直接测量一圆柱体的直径（d）和高度（h），再根据 $V=\frac{1}{4}\pi d^2h$ 计算出圆柱体的体积。

2. 测量的误差

实践证明，测量结果都存在误差，因为任何测量仪器、测量方法、测量环境、测量者的观察力等都不能做到绝对严密，这些就不可避免地伴随有误差产生。因此，分析测量中可能产生的各种误差，尽可能消除其影响，并对测量结果中未能消除的误差做出估计，这些都是物理实验和其他科学实验中必不可少的工作。因此，我们必须了解误差的概念、特性、产生的原因和估计方法等有关知识。

测量误差定义为测量值与被测量的真值（或约定真值）之差。测量误差可以用绝对误差表示，也可以用相对误差表示：

绝对误差 $\Delta x = x - x_0$

式中 Δx —— 绝对误差；

x —— 测量值；

x_0 —— 真值。

相对误差 $E = \left|\frac{\Delta x}{x_0}\right| \times 100\,\%$

被测量量的真值只是一个理想概念，是不可能知道的，在实际测量中常用算术平均值或被测量量的公认值或较高准确度仪器测量的值来代替真值，称为约定真值。

二、误差的分类和特点

误差主要分为系统误差和随机误差两大类。它们的性质和特点不同，需分别处理。

1. 系统误差

系统误差是在对同一被测量量的多次测量过程中，保持恒定的或以可预知的方式变化的测量误差分量。这种误差服从确定性规律。

产生系统误差的原因很多，最常见的有：

（1）测量仪器没有达到应有的准确度。例如，用秒表测量一匀速运动的物体通过某段路程所需的时间，若秒表走时较快，那么即使进行多次测量，测得的时间也总是偏大，而且总是偏大一个固定的量，这种因仪器不准确造成的误差，可通过修理仪器或标准读数来解决。

（2）实验装置或实验方法没有（或不可能）完全满足理论上的要求。例如，用伏安法测电阻时，因电压表内阻不可能无穷大，电流表内阻不可能为零，故若用理论计算公式 $R = U/I$ 去计算测量结果，则会因电表的接法不同，或者使测量的结果偏大，或者使测量的结果偏小，这种情况下，就要通过改进实验装置，如选用内阻更大的电压表、内阻更小的电流表来测量，或者是对测量结果进行修正，在计算公式中加上与电表内阻有关的修正项。

（3）温度、湿度等环境因素没有控制在预定的范围内。例如，欲测量导线 20℃ 时的电阻值，若环境温度控制不好，偏离 20℃ 太多，则会由于导线的热膨胀，使长度随温度改变，从而导致电阻值的测量产生系统性误差分量。

（4）测量者个人的生理特点或固有习惯带来的系统性误差分量。例如，在估读数据时总是偏大或偏小等。

发现和减小实验中的系统误差是一项困难而又重要的工作。实验者需要对整个实验依据的原理、方法，所用的测量仪器、测量步骤，实验中观察到的实验现象进行仔细分析，动手实验前就尽可能找出引起系统误差的主要因素，采取减少系统误差的措施，并在实验后尽可能对系统误差进行修正，以求得到正确的测量结果。

2. 随机误差

随机误差是指在多次测量同一物理量的过程中，误差时大时小，时正时负，以不可预知的方式变化着的测量误差分量。这种误差服从统计性规律。

这种误差是由实验中各种因素的微小变动性引起的。例如，实验装置在各次调整操作上的变动性，测量仪器指示数值的变动性，以及观测者本人在判断和估计读数的变动性等。

随机误差表现为，就某一次测量来说是没有规律的，是随机的，其大小和方向都不能预知，但对同一个量进行足够多次的测量、就会发现随机误差按一定的统计规律分布。在此只讨论一种最常见的分布——正态分布。

3. 随机误差的分布及处理

理论和实践表明，在大量、独立、均匀、微小的随机因素影响下，物理量的测量值服从正态分布（即高斯分布）规律。标准化的正态分布曲线如图 2.1 所示。

图中　x —— 某物理量的实验测量值；

$P(x)$ —— 测量值的概率密度，且有

$$P(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

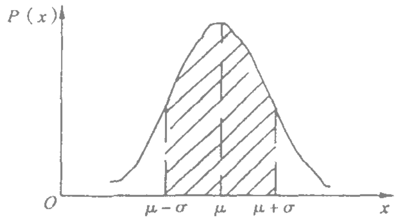

图 2.1　标准化的正态分布曲线

其中

$$\mu=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$

$$\sigma=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}} \tag{2.1}$$

曲线中峰值处的横坐标对应于测量次数 $n\to\infty$ 时被测量的平均值 μ，称为总体平均值。σ 为曲线上某点处的横坐标与 μ 值之差，σ 是正态分布函数最重要的参数之一，它表征了测量值的分散程度，σ 越小，表明测量数据越集中，测量的精密度越高；反之，表明测量数据越分散，测量精密度越低，σ 称为正态分布的标准偏差。作为一个概率密度函数，曲线和 x 轴间的面积表示被测量落在某区间的概率。例如，图 2.1 中阴影部分的面积，就是测量结果落在（$\mu-\sigma$，$\mu+\sigma$）区间内的概率。经计算证明，$P=\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma}P(x)\mathrm{d}x=68.3\%$；若将区间扩大到 $-2\sigma\sim+2\sigma$，则 x 落在（$\mu-2\sigma$，$\mu+2\sigma$）区间内的概率就提高到 95.5%；x 落在（$\mu-3\sigma$，$\mu+3\sigma$）区间内的概率为 99.7%。

从图 2.1 的分布曲线可知：①误差较小的数值出现的概率大；②正、负误差出现的机会均等，在多次测量中，正、负误差可大致抵消，因而常用多次测量的算术平均值 $\bar{x}$ 表示测量结果，以减小随机误差的影响。

实际实验中，测量次数 n 有限，则（2.1）式就变为

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{2.2}$$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} \tag{2.3}$$

这一公式称为贝塞尔公式。σ_x 表示这一测量列中某次测量 x 的标准偏差。

在测量同一量时，对于测量次数 n 相同的各组量中，σ_x 小的 $\bar{x}$ 较可靠，而 σ_x 大的 $\bar{x}$ 较不可靠。所以又定义算术平均值 $\bar{x}$ 的标准偏差为

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{2.4}$$

一般地，σ_x 大则 $\sigma_{\bar{x}}$ 也大，而 n 增大时，能使 $\sigma_{\bar{x}}$ 减小。

注：有的书上用 $S_{\bar{x}}$ 符号表示算术平均值 x 的标准偏差，用 S_x 表示标准偏差 σ_x，即

$$\sigma_{\bar{x}} \equiv S_{\bar{x}}, \quad \sigma_x \equiv S_x$$

（2.3）式的计算结果在计算器上常用 S 或 σ_{n-1} 键表示，在实验数据处理中要计算 S_x（即 σ_x）时，只需将几个测量值按规定的操作步骤输入计算器，计算器便可方便地给出平均值 x 及 S_x（即 σ_x），不必按（2.3）式一步步去进行繁琐的计算。

三、测量中常用到的一些术语及概念

1. 正确度

表示被测量的整体平均值与其真值符合的程度。它反映了系统误差的大小与随机误差无关。

2. 精密度

表示各次测量值之间彼此接近的程度。它反映了随机误差的大小与系统误差无关。

3. 准确度

表示对测量数据正确度与精密度的综合评定。它包括各测量值间的接近程度及总体平均值对真值的接近程度。

下面图 2.2 所示的打靶情况形象地表示了三者的区别：

图（a）表示精密度高而正确度低；（b）表示正确度高而精密度低；（c）表示精密度与正确度都高，即准确度高。

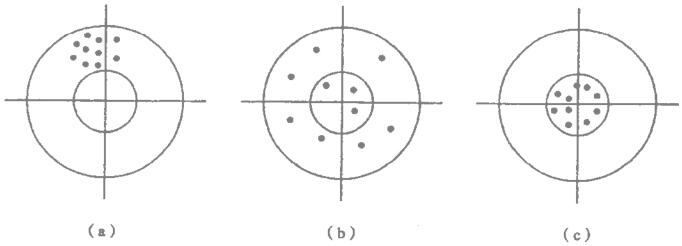

图 2.2　打靶情况分布图

第二节　测量的不确定度

在报告物理测量的结果时，不但要写明计量单位、测量结果，而且还有责任给出测量

结果的可信赖程度。然而，对于测量数据的处理，测量结果的表达，长期以来各个国家和不同学科有不同的看法和规定，有关术语的定义也不统一，从而影响了国际间的交流和对成果的相互利用。为此，1993 年国际计量局、国际标准化组织等 7 个国际组织正式发布了“测量不确定度表示指南”，为计量标准的国际比对和测量不确定度的表述奠定了基础。为了与国际接轨，我国于 1999 年 1 月 11 日发布了新的计量技术规范《JJF1059—1999 测量不确定度评定与表示》，对测量结果的评定用“不确定度”表示。

因此，我们必须学习“测量不确定度评定与表示”的有关理论和知识，并掌握它们的计算方法和表示方式。这对于今后的专业学习和工作是非常必要的。

一、测量不确定度的基本概念与分类

测量不确定度是与测量结果相联系的参数。表征合理地赋予被测量之值的分散性，用来表示测量结果有效性的可疑程度或肯定程度，即它表示了被测量的真值所处范围的估计值。不确定度小，表示测量结果可信赖程度高；不确定度大，则表示测量结果可信赖程度低。

1. 不确定度的分类

按评定方法的不同，不确定度分为：

（1）A类不确定度：用统计方法计算的不确定度分量。

（2）B 类不确定度：用其他方法估计出的不确定度分量。

测量结果的总不确定度称为合成不确定度，它是 A 类分量与 B 类分量按某种原则合成的结果。

2. 不确定度的表达方式

测量不确定度有两种表达方式：

（1）标准不确定度：用标准偏差给出的不确定度。

（2）扩展不确定度：用标准不确定度乘上一个包含因子（置信因子）给出的不确定度。表 2.1 所示为正态分布下的包含因子与概率的关系。

表 2.1 正态分布下的包含因子与概率的关系

包含因子	1	2	3
概　　率	68.3%	95.5%	99.7%

标准不确定度更便于国际间的交流和比对，本书约定，所有的实验数据处理，均采用标准不确定度。

二、A 类标准不确定度 Δ_A

这是用统计方法计算获得的不确定度分量。在实际工作中，人们往往关心的不是测量列数据的散布特性，而是测量结果，即算术平均值的离散程度。假设对某物理量进行了 n 次等精度测量，观测值记为 x_i（$i = 1, 2\cdots, n$）。由上一节讨论可知

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$$

此式的物理含义是：在这一测量列中，任意一次测量 x_i 落在（$\bar{x}-\sigma_x$，$\bar{x}+\sigma_x$）区间的概率为 68.3%，$\bar{x}$ 为最佳值。

如果我们增加测量次数，如（$n+m$）次，则可得到另一最佳值 $\bar{x}'$，如果继续增加测量次数，就会发现 $\bar{x}$ 也是一个随机变量。这样一来，算术平均值 $\bar{x}$ 本身的可靠性如何呢？我们用算术平均值的标准偏差 $\sigma_{\bar{x}}$ 来表示这一可靠性，$\bar{x}$ 显然比任何一次测量更可靠，由上一节内容可得

$$\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \tag{2.5}$$

$\sigma_{\bar{x}}$ 就作为 A 类标准不确定度分量，记为 Δ_A。注意，测量次数 n 要求至少大于 5 次。

例 1　在测量小球的体积实验中，对小球直径测量 10 次，数值如下表所示，试求测定直径 D 的 A 类标准不确定度分量。

序　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D（cm）	2.00	2.01	2.02	1.99	1.99	2.00	1.98	1.99	1.97	2.00

解　由（2.2）式可知

$$\overline{D}=\frac{2.00+2.01+\cdots+2.00}{10}=1.995 \quad (\text{cm})$$

又由（2.4）式得直径的标准偏差

$$\sigma_{\overline{D}}=\sqrt{\frac{(2.00-1.995)^2+\cdots+(2.00-1.995)^2}{10(10-1)}}=0.045 \quad (\text{cm})$$

即直径 D 的 A 类标准不确定度分量 $\Delta_A=0.045$ cm。

三、B 类标准不确定度 Δ_B

Δ_B 是用非统计方法评定获得的不确定度分量。B 类不确定度产生的原因较多，一般可分为两种情况：一是由测量仪器的所谓“最大允差”$\Delta_{仪}$ 来表示；另一种为测量的估计误差 $\Delta_{估}$。但在一般情况中，$\Delta_{估}$ 比 $\Delta_{仪}$ 小得多（有些时候 $\Delta_{估}$ 也大于甚至远大于 $\Delta_{仪}$），所以我们只讨论第一种情况产生的不确定度作为 B 类不确定度 Δ_B。

制造厂在制造某种仪器时，在其技术规范中预先设计了允许误差的极限值，终检时误差不超出此极限的产品为合格品，此误差的极限称为测量仪器的“最大允差”，记为 $\Delta_{仪}$。它的物理含义是，用此仪器进行一次测量时，测量值的误差落在 $[-\Delta_{仪},\ \Delta_{仪}]$ 之内的概率为 1。

实际上，仪器的误差在 $[-\Delta_{仪},\ \Delta_{仪}]$ 内是按一定几率分布的。若几率分布服从正态分布规律，由正态分布函数的性质可知，误差落在 $[-3\sigma,\ +3\sigma]$ 内的概率为 $0.997\approx1$，所以质

量指标服从正态分布的产品，一次测量值的 B 类标准不确定度$\Delta_B=\Delta_{仪}/3$。但有些仪器的质量指标在$[-\Delta_{仪},\ \Delta_{仪}]$内不服从正态分布，而是服从其他的一些分布规律，如均匀分布、三角分布函数等。

因此，一般而言，Δ_B与$\Delta_{仪}$的关系为

$$\Delta_B=\Delta_{仪}/C \tag{2.6}$$

式中 C—— 置信系数。

对于均匀分布函数，$C=\sqrt{3}$，即$\Delta_B=\Delta_{仪}/\sqrt{3}$；对于三角分布函数，$C=\sqrt{6}$，即$\Delta_B=\Delta_{仪}/\sqrt{6}$。对于初学者来说，考虑到估计误差在其分布区间内的分布比较困难，所以本书规定，一律假设为服从均匀分布，即取$C=\sqrt{3}$.

故
$$\Delta_B=\frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}} \tag{2.7}$$

测量仪器的最大允差$\Delta_{仪}$一般可在仪器的说明书中或仪表面板中查找。有时，仪器通常给出准确度等级。

则
$$\Delta_{仪}=\frac{量程\times准确度等级}{100} \tag{2.8}$$

四、合成标准不确定度Δ

由于 A 类与 B 类不确定度都具有统计特征，由概率统计理论可知，由“方和根”的方法来合成不确定度是最可取的。因此，在科学实验中，合成标准不确定度为

$$\Delta=\sqrt{\Delta_A^2+\Delta_B^2} \tag{2.9}$$

例 2 用量程为 25 mm，准确度等级为 0.01 的千分尺测一小球的直径，测量数值如下表所示，求测量结果的合成标准不确定度。

序 号	1	2	3	4	5
d（mm）	1.038	1.039	1.033	1.041	1.030

解

① 求Δ_A,由题可知

$$\bar{d}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i=\frac{1}{5}(1.038+\cdots+1.030)=1.036\,2\quad（mm）$$

故
$$\Delta_A=\sigma_{\bar{d}}=\sqrt{\frac{\sum(d_i-\bar{d})^2}{n(n-1)}}=\sqrt{\frac{(1.038-1.036\,2)^2+\cdots+(1.030-1.036\,2)^2}{5(5-1)}}$$
$$=0.002\,0\quad（mm）$$

② 求Δ_B

$$\Delta_{仪}=\frac{量程\times准确度等级}{100}=\frac{25\times0.01}{100}=0.0025\quad(\text{mm})$$

故

$$\Delta_B=\frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}}=\frac{0.0025}{\sqrt{3}}=0.0014\quad(\text{mm})$$

③ 求 Δ

$$\Delta=\sqrt{\Delta_A^2+\Delta_B^2}=\sqrt{(0.0020)^2+(0.0014)^2}=0.0024\quad(\text{mm})。$$

五、间接测量量的标准不确定度

设间接测量量为

$$y=f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

其中，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为相互独立的直接测量量，各自的标准不确定度相应记为$\Delta(x_1), \Delta(x_2), \cdots, \Delta(x_n)$，则总标准不确定度记为

$$\Delta=\sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta(x_1)\right]^2+\cdots+\left[\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta(x_n)\right]^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\cdot\Delta^2(x_i)}\tag{2.10}$$

例 3　求和或差的不确定度。

解　设函数 $y=ax_1+bx_2$

先求 $\frac{\partial y}{\partial x_1}=a$，$\frac{\partial y}{\partial x_2}=b$，再按(2.10)式合成，得

$$\Delta=\sqrt{a^2\Delta_1^2+b^2\Delta_2^2}\tag{2.11}$$

若 $a=1$，$b=1$，则

$$\Delta=\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_2^2}$$

差的不确定度从略。

例 4　求积或商的不确定度。

解　设函数 $y=x_1\cdot x_2$

先求 $\frac{\partial y}{\partial x_1}=x_2$，$\frac{\partial y}{\partial x_2}=x_1$，再按(2.10)式合成，得

$$\Delta=\sqrt{x_2^2\Delta_1^2+x_1^2\Delta_2^2}=\sqrt{x_1^2x_2^2\cdot\left[\left(\frac{\Delta_1}{x_1}\right)^2+\left(\frac{\Delta_2}{x_2}\right)^2\right]}$$

$$=x_1\cdot x_2\sqrt{\left(\frac{\Delta_1}{x_1}\right)^2+\left(\frac{\Delta_2}{x_2}\right)^2}\tag{2.12}$$

即得相对标准不确定度为

$$\frac{\Delta}{y}=\sqrt{\left(\frac{\Delta_1}{x_1}\right)^2+\left(\frac{\Delta_2}{x_2}\right)^2} \tag{2.13}$$

商的不确定度从略。

第三节 测量结果的表示与有效数字

一、测量结果的表示

对于科学实验中任何一个测量结果，只有同时给出它的最佳值、不确定度和单位时，这个结果才是完整的和有价值的。因此对测量结果的正确表示都应包括这三个部分，有时甚至还要给出测量结果的置信概率

$$X=\bar{x}\pm\Delta \quad \text{（单位）}$$

或

$$\begin{aligned}&X=\bar{x}\pm\Delta_{0.68} \quad \text{（单位）}\\&P=0.68\end{aligned} \tag{2.14}$$

式中 $\bar{x}$ —— 最佳值，通常为算术平均值；

Δ —— 合成标准不确定度；

$P=0.68$ —— 真值落在 $[\bar{x}-\Delta,\ \bar{x}+\Delta]$ 内的置信概率为 0.68。

例如对某个长度量进行测量，测量平均值 $l=28.251\ \mathrm{mm}$，合成标准不确定度 $\Delta=0.023\ \mathrm{mm}$，则测量结果可表示为

$$l=28.251\pm0.023\ \text{（mm）}$$

二、有效数字

1. 有效数字的一些概念

通常把测量数据中几位可靠的数和最后一位有误差的数（或可疑的数）统称为有效数字。

在读取数据时，一般要估读到最小分格的 1/10，估读的那位为可疑数字，前面的几位数为可靠数字。例如，用最小分格为 1 mm 的钢尺测量一物体的长度为 35.4 mm，则其中 35 是准确可靠的，属可靠数字；4 是估计出来的，属可疑数字；而 3、5、4 三位均为有效数字。若长度估计位数字为 0，如 55.0 mm，末位“0”，仍为有效数字，不能舍弃，该数据有效数字仍为三位，若舍弃“0”，数字变为 55 mm，则表明该数据只有两位有效数字。

换算单位时，有效数字的位数应保持不变。如 $9.80\ \mathrm{mm}=0.980\ \mathrm{cm}=9.80\times10^{-3}\ \mathrm{m}=9.80\times10^{-6}\ \mathrm{km}$，其有效数字都为三位。为表示方便，特别是对较大或较小的数值，常采用科学记数法：$a\times10^{\pm n}$ 表示，其中 n 为整数，a 为 $1\leqslant a<10$ 的数。例如，地球的半径为 6 371 km，可写为 $6.371\times10^{6}\ \mathrm{m}$，电子的电量为 $1.602\times10^{-19}\ \mathrm{C}$。

2. 计算量的有效数字

在科学实验中，最终结果都要用最佳估值与不确定度来表示，但它们均是经计算而得到的。在计算中，一般都会有更多的位数，我们不能用所有的这些位数来表示结果，而应该对它进行取舍。本书的取舍原则有以下几条：

（1）不确定度的有效数字位数：按照国际《测量不确定度表示指南》和我国的《JJF1059—1999》文件，不确定度的有效数字的位数可以取一位或二位，不能取三位及以上。例如，某被测量量的结果的合成不确定度计算值为 0.148，如取一位，则变为 0.1，这时修约误差占给出的不确定度的 1/2，实在太大，显然取二位较合理。因此有些国家规定，当不确定度的第一位有效数字为 1 或 2 时，应取二位，而 3 以上则可只取一位。本书为方便起见，一般都采用二位有效数字来表示不确定度。

（2）最佳估值的有效数字位数：最佳估值的末位应与不确定度的末位对齐。例如，某测量结果表示为（35.75 ± 0.14）g，不确定度的末位在克的百分位，因此最佳估值的末位也应保留在克的百分位。但在中间运算结果时，一般要多保留 1 ~ 2 位，以减小计算中的舍入误差。

（3）有效数字的数字修约：数字修约是指使用舍入规则减少数字位数的约定。为使舍与入的误差概率相等，本书采用“四舍六入五凑偶”的方法进行数字修约。例如：

25.434 6 →25.43　（小于 5 舍，舍 0.004 6）
3.588 →3.59　（大于 5 则入，舍 0.008）
0.735 →0.74　（等于 5 凑偶，实际入）
0.745 →0.74　（等于 5 凑偶，实际舍）

例 5　某间接测量量 Y 的表达式为

$$Y = 800.421 \div (6.048 - 4.634) + 30.9 \quad (\mathrm{mm})$$

设式中各量的不确定度依次为 0.012，0.012，0.012　1.2，且各量误差独立。试写出测量结果的表示。

解

① 计算

设
$$x_1 = 800.421, \quad x_2 = 6.048, \quad x_3 = 4.634, \quad x_4 = 30.9$$
$$\Delta_1 = 0.012, \quad \Delta_2 = 0.012, \quad \Delta_3 = 0.012, \quad \Delta_4 = 1.2$$

则
$$Y = \frac{x_1}{x_2 - x_3} + x_4$$

用计算器计算，Y 的显示值为 596.968 599 7。

再利用（2.10）式，并考虑到求和及求商的不确定度算例，可得

$$\Delta_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\partial_y}{\partial x_i}\Delta_i\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{\Delta_1}{x_2 - x_3}\right)^2 + \left(\frac{x_1\Delta_2}{(x_2 - x_3)^2}\right)^2 + \left(\frac{x_1\Delta_3}{(x_2 - x_3)^2}\right)^2 + \Delta_4^2}$$

用计算器计算得 Δ_y 的显示值为 6.899 018 642

②数字修约

不确定度取 2 位，得

$$\Delta_y = 6.9$$

最佳估值末位与不确定度末位对齐，得

$$Y = 597.0 \pm 6.9 \quad (\mathrm{mm})$$

第四节　数据处理

对于实验中测得的大量数据，需要正确地进行整理和分析，并从中得到实验的最后结果和实验的规律。处理实验数据是从实践上升到理论的一次飞跃，是实验报告的基本要求。根据不同的实验内容、不同的要求，可采用不同的数据处理方法。下面介绍几种常用的实验数据处理方法。

一、列表法

列表法是记录数据最常用的方法。数据列成表格，“成行成列，一目了然”。此方法简单明了，便于比较、分析和查找，也有助于找出各物理量间的关系。列表时要注意以下几点：

（1）表格中的设计要利于记录、运算和检查。

（2）表中涉及的各物理量，其符号、单位均应说明清楚，单位应写在符号后面（不要重复写在各数字后面）。

（3）表中的直接测量值和最后结果应能正确反映测量误差，即应当将有效位数填写正确。

例如，用伏安法测量线性电阻时，得到的实验数据及运算结果如表 2.2 所示。

表 2.2　伏安法测量线性电阻时的实验数据

U（V）	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	平　均
I（mA）	0.50	1.02	1.49	2.05	2.51	2.98	
R（Ω）	2 000.0	1 960.8	2 013.4	1 951.2	1 992.0	2 013.4	

二、作图法

作图法是用几何图形来表示物理量之间关系的一种方法。这种方法可以直观地表示出物理量的变化规律，便于寻找实验规律和总结经验公式。作图时要注意以下几点：

（1）作图必须用坐标纸。

（2）坐标纸的最小分格应与实验数据的最后一位准确数字相当，图形的大小和位置应

适当（横轴与纵轴交点的标度值不一定是零）。

（3）要标出坐标轴所代表的物理量的名称（或符号）和单位，标明分度值。

（4）描点和连线。根据测量数据，用削尖的铅笔在坐标线上用“ + ”或“ × ”(一般不用点）标出各测量点，在同一张图上，不同的曲线应当用不同的符号标记实验点。连线要连成光滑的曲线或直线，不应强求通过每一个实验点，但应使曲线两旁的点分布均匀。

（5）在图下方写上图名，所标文字应当用仿宋体。

例如，根据表 2.2 作曲线，并求电阻 R。

令横轴代表电流 I，在横轴右端标上 I/mA 或 I（mA），以 1 mm 代表 0.05 mA，原点标度值为 0；令纵轴代表电压 U，在上端标上 U/V 或 U（V），以 1 mm 代表 0.1 V，原点标度为 0。

按表 2.2 的数据描点，用“ + ”描出各测量点，然后用直尺划一条直线，注意要使测量点靠近直线且均匀地分布在该直线两侧。在图下标上图名“电阻的伏安特性曲线”，如图 2.3 所示。

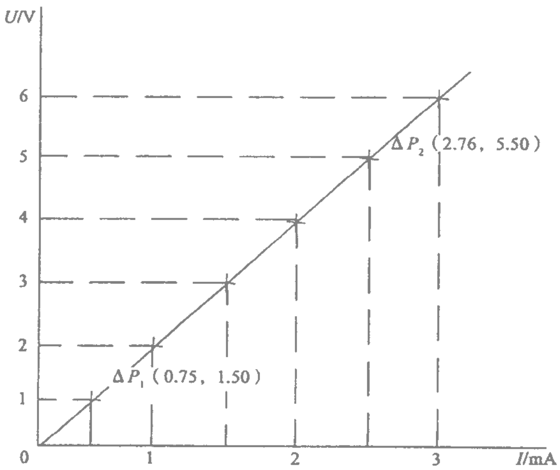

图 2.3　电阻的伏安特性曲线

在图中直线上选取两点 P_1（0.75，1.50）和 P_2（2.76，5.50）应当指出，P_1、P_2不能选用已标数据点，要在图线上重新取点，且 P_1、P_2应尽量距离远些），得

斜率 $$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{5.50-1.50}{2.76-0.75}=1.990\,0 \quad (\text{V/mA})$$

电阻 $$R=k\times 1\,000=1.99\times 10^3 \quad (\Omega)$$（仅保留三位有效数字）

在实验中，许多函数关系可以通过适当的变换得到线性关系，即可把曲线改为直线，称为曲线改直。

如，玻—玛定律

$$PV=C$$

是个双曲线，图很不容易作好。如以 P 为纵轴，$1/V$ 为横轴，作图为直线，斜率即为 C，很容易求出。

又如对匀加速直线运动有

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

式中　a、v_0、s_0——常数。

s与 t 的关系为一条抛物线，若将函数改写为

$$s = \frac{1}{2} a\left(t + \frac{v_0}{a}\right)^2 + \left(s_0 - \frac{v_0^2}{2a}\right)$$

作s-$\left(t + \frac{v_0}{a}\right)^2$ 函数图，则得到一条直线，其斜率为 $\frac{1}{2}a$，截距为 $s_0 - \frac{v_0^2}{2a}$。

表 2.3 列出了几种常用的曲线改直的函数关系。

表 2.3　几种常用的曲线改直函数关系

函　数	坐　标	斜　率	截　距	坐标纸
$y = \frac{a}{x}$	$y - \frac{1}{x}$	a	0	直　角
$y = ax^2 + b$	$y - x^2$	a	b	直　角
$y = a\sqrt{x} + b$	$y - \sqrt{x}$	a	b	直　角
$y = a^x b$	$\lg y - x$	$\lg a$	$\lg b$	单对数
$y = ax^b$	$\lg y - \lg x$	b	$\lg a$	双对数

三、逐差法

当两物理量的函数关系满足多项式的形式，自变量 x 等间距变化时，常用逐差法来处理数据。这种方法的优点是可以充分利用各次测量数据。这里我们仅讨论一次逐差法，即线性函数的逐差法。下面以一个例子来讨论逐差法。

仍以伏安法测电阻为例，得到的实验数据如表 2.2 所示。

求 :(1) 电压每增加 1 V，电流增量的平均值。

(2) 电阻 R。

若以一般方法来处理，则 (1) 有

$$\begin{aligned}\Delta\bar{I} &= \frac{1}{5}(\Delta I_1 + \Delta I_2 + \cdots + \Delta I_5) \\ &= \frac{1}{5}[(I_2 - I_1) + (I_3 - I_2) + \cdots + (I_6 - I_5)] \\ &= \frac{1}{5}(I_6 - I_1) = \frac{1}{5}(2.98 - 0.50) = 0.496 \quad (\text{mA})\end{aligned}$$

上式表明中间值全部抵消，中间测量值均未有效利用。此例电压 U 是等间距变化，电流 I 是 U 的线性函数，共有 6 组数据（偶数组数据），符合逐差法条件。则有

（1）
$$\Delta\bar{I}_3=\frac{1}{3}[(I_4-I_1)+(I_5-I_2)+(I_6-I_3)]$$
$$=\frac{1}{3}[(2.05-0.50)+(2.51-1.02)+(2.98-1.49)]$$
$$=1.51\quad(\text{mA})$$

故
$$\Delta\bar{I}=\frac{1}{3}\Delta\bar{I}_3=0.503\quad(\text{mA})$$

此式表明所有测量数据均有效的利用上了，应更加准确。

（2）
$$R=\frac{\Delta U}{\Delta\bar{I}}\quad 或\quad R=\frac{3\Delta U}{\Delta\bar{I}_3}$$

利用后者可得

$$R=\frac{3\Delta U}{\Delta\bar{I}_3}=\frac{3\times1.00}{1.51\times10^{-3}}=1.99\times10^3\quad(\Omega)$$

四、最小二乘法

在科学实验中，物理量之间的函数关系往往是未知的，那么如何来确定这种具体的函数关系呢？最小二乘法是人们常用的一种方法，它的思路是：由实验测量的一组数据，根据数据的变化趋势以及自己的理论知识、经验等预先假设存在某种函数关系 $y=f(x)$,（如一次关系 $y=a+bx$;二次关系 $y=a+bx+cx^2$ 等），然后利用“最小二乘法原理”计算出预设函数的各项参数，最后将参数代入函数关系式，检验其合理性。

1. 最小二乘法

设以 n 个 x 值 x_1，x_2，…，x_n为实验点，测量得到一组 n 个相互独立的 y 值 y_1，y_2，…，y_n，相应的近真值为 $\hat{y}_1$，$\hat{y}_2$，…，$\hat{y}_n$为未知，又由预设函数有 $\hat{y}_i=f(x_i, a, b, \cdots)$，第 i 次测量值 y_i的偏差则为

偏差 $=y_i-\hat{y}_i$

最小二乘法原理：最佳的近真值是能使各次测量值误差平方和为最小的那个值；或者，最佳近真值是能使所得曲线最好地拟合于各实验点，如图 2.4 所示。即，预设参数为最佳值的条件是

$$R=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2=\min \qquad (2.15)$$

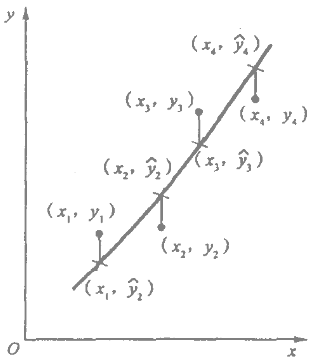

图 2.4

2. 用最小二乘法来求解线性关系

这里只讨论最简单的线性关系问题，以此说明最小二乘法的应用。

设由实验测得一组数据(x_1, y_1)，(x_2, y_2), …，(x_n, y_n) 又设待求函数关系为

$$\hat{y}=a+bx,$$