绪　　论

物理学是一门实验科学.物理学新概念、规律的发现和确立主要依赖于实验，物理学上的新突破也常常是基于新的实验技术和方法的发展.物理实验的方法、思想、仪器和技术已经被普遍地应用在各个自然科学领域，乃至自然科学以外的学科.

“大学物理实验”是理工科院校各专业的一门必修的、独立设置的基础实验课，是学生在大学接受系统实验方法和实验技能训练的开端.通过本课程的学习，不仅可以加深对理论的理解，更重要的是使学生获得基本的实验知识，掌握一定的实验方法和技能，为进一步学习后续实验课程和日后的工作打下良好的基础.

一、物理实验课的目的

(1)培养与提高学生从事科学实验的基本能力.物理实验是一项非常细致和复杂的工作.在实验前的资料收集、阅读和设计实验方案，实验中的仪器的调整和使用、数据的正确采集、各种故障的分析和排除，实验后的数据处理、实验结果评估、写出一份较为完备的实验报告等诸方面，都有大量的理论与知识.只有掌握了这些最基本的技能，才能为将来进行科学研究和工程技术工作打下良好的基础

(2)培养学生观察、分析实验现象的能力以及理论联系实际的学风.实验中常遇到各类问题，观察到各种现象，应用理论知识对之加以分析，不仅能加深对已有理论知识的理解，同时也能提高学生发现问题、分析问题和解决问题的能力.

(3)培养学生严肃认真的工作作风、实事求是的科学态度和良好的工作习惯.

二、怎样学好物理实验

物理实验课是一门实践性课程，学生基本是在自己独立工作的过程中增长知识、提高能力的，而实现能力的提高要靠平时一点一滴的积累.所以要求：

(1) 要注意掌握实验中所采用的实验方法，特别是一些基本的测量方法.因为这些方法在日后的工作中要经常用到，而且它又是复杂测量的基础，我们在学习时不仅要掌握它的原理，而且要知道它的适用条件及优、缺点，这些知识只有通过亲身实践才能真正体会到.

(2) 要有意识地培养良好的实验习惯例如，应正确地记录原始数据和处理数据，注意记录实验的客观条件，如温度、湿度、气压、日期等.要认真地学习与培养操作习惯、操作姿势，因为这些良好的习惯是经过许多实验总结出来的，它是保证实验安全、避免差错的基础.

(3) 要逐步学会分析、排除实验中出现的某些故障.实验最后总有实验结果，对这些结果的评估，应从多方面人手.一是分析实验方法是否正确；二是分析仪器可能带来多大误差；三是实验环境等因素对实验的影响，必要时请教师当场检查指导.在实验中切忌拼凑数据、弄虚作假.

(4) 要注意掌握重点. 每一个实验往往都要涉及到很多的理论与实验技能，不可能通过一次实验就全部掌握，只有通过大量的实验才能搞清弄懂. 因此,对每一个实验都应有所侧重,注意掌握重点要求.

三、物理实验课的要求

为了更好地上好物理实验课，我们把实验课分为三个阶段来作扼要的说明.

1. 课前预习

通过阅读实验教材及有关参考书，弄清实验的目的、原理、使用的仪器，明确实验方法、操作步骤及注意事项，在此基础上写出预习报告. 预习报告的内容大致包括：实验名称、原理、仪器、数据表格、预习思考题解答等. 同时可将不清楚的问题也写在预习报告中.

2. 实验阶段

实验前先清点仪器、熟悉仪器、了解仪器性能及使用方法,然后按照要求进行组装、调试. 实验中要注意观察现象、记录必要的现象和数据. 实验完毕，原始记录应交教师审阅签字，再将仪器整理复原后方可离开实验室.

3. 课后总结

做完实验后,应及时处理实验数据,根据要求写出实验报告. 写实验报告力求做到文字简练、通顺,数据齐全,图表规范正确. 实验报告的具体内容包括:(1)实验名称;(2)实验时间;(3)实验目的;(4)实验仪器(包括名称、规格、编号);(5)实验原理[包括公式、电(光)路图等];(6)操作步骤;(7)数据表格;(8)数据处理及结果表示;(9)结果的评估与问题的讨论（包括教师指定的思考题、实验中发现的现象及解释、对实验装置和方法的改进意见等). 一份好的实验报告从内容上讲，可能要比上述更详细些. 因此,在写实验报告时,要结合具体的实验按需要逐项写清，不一定受上述具体内容的限制.

第一章　测量误差与数据处理的基础知识

第一节　测量与误差的基本概念

一、测量

一切物理量都是通过测量得到的.测量就是将待测量与选作标准的同类量进行比较，得出倍数值.称该标准量为单位，倍数值为数值.因此，一个物理量的测量值应由数值和单位两部分组成,缺一不可.

按测量方法进行分类，测量可分为直接测量和间接测量两大类.

可以用测量仪器或仪表直接读出测量值的测量称为直接测量.如用米尺测长度,用温度计测温度,用电表测电流、电压等都是直接测量,所得的物理量如长度、温度、电流、电压等称为直接测量值.

有些物理量很难进行直接测量，而需依据待测量和某几个直接测量值的函数关系求出,这样的测量称为间接测量.如单摆法测重力加速度 g 时,$g=4\pi^2 l/T^2$,T(周期)、l(摆长)是直接测量值,而 g 是间接测量值.

随着实验技术的进步,很多原来只能间接测量的物理量,现在也可以直接测量,例如电功率、速度等量的测量.

二、误差

1. 真值与误差

我们把某物理量在一定客观条件下的真实大小，称为该物理量的真值.由于实验理论的近似性、实验仪器灵敏度和分辨能力的局限性、环境的不稳定性等因素的影响，待测量的真值是不可能测得的，测量结果和真值之间总有一定的差异，我们称这种差异为测量误差.测量误差的大小反映了测量结果的准确程度，测量误差可以用绝对误差表示，也可以用相对误差表示.

$$\text{绝对误差}(\delta) = \text{测量值}(x_0) - \text{真值}(a) \tag{1-1}$$

$$\text{相对误差}(E_r) = \frac{\text{绝对误差}(\delta)}{\text{真值}(a)} \times 100\% \tag{1-2}$$

测量所得的一切数据，都包含着一定的误差，因此误差存在于一切科学实验过程中，并会因主观因素的影响、客观条件的干扰、实验技术及人们认识程度的不同而不同.

2. 误差的分类

根据误差性质和产生原因可将误差分为以下几类.

(1) 系统误差

在偏离规定的测量条件下多次测量同一量时，符号和绝对值保持不变的误差，或在该测量条件改变时，按某一确定的规律变化的误差称为系统误差.

系统误差的特点是它的出现是有规律的，在测量条件不变时有确定的大小和方向，增加测量次数并不能减小系统误差.在实验之前,要对可能产生的系统误差加以充分的分析和估计，并采取必要的措施尽量消除其影响.测量后应设法估计未能消除的系统误差之值,对测量结果加以修正.

(2) 随机误差

在极力消除或修正了一切明显的系统误差之后，在相同的测量条件下，多次测量同一量时，误差的绝对值和符号的变化时大时小、时正时负，以不可预定的方式变化着的误差称为随机误差.

随机误差是由于人的感观灵敏程度和仪器精密程度有限、周围环境的干扰以及一些偶然因素的影响产生的.如用毫米刻度的米尺去测量某物体的长度时往往将米尺去对准物体的两端并估读到毫米以下一位读数值，这个数值就存在一定的随机性，也就带来了随机误差.由于随机误差的变化不能预先确定，所以对待随机误差不能像对待系统误差那样找出原因排除，只能作出估计.

虽然随机误差的存在使每次测量值偏大或偏小，但是，当在相同的实验条件下，对被测量进行多次测量时，其大小的分布却服从一定的统计规律，可以利用这种规律对实验结果的随机误差作出估算.这就是在实验中往往对某些关键量要进行多次测量的原因.

(3)粗大误差

凡是用测量时的客观条件不能合理解释的那些突出的误差，均可称为粗大误差.

粗大误差是由于观测者不正确地使用仪器、观察错误或记录错数据等不正常情况下引起的误差.它会明显地歪曲客观现象，在数据处理中应将其剔除.所以,在作误差分析时，要估计的误差通常只有系统误差和随机误差.

三、测量的精密度、准确度和精确度

对测量结果做总体评定时，一般均应把系统误差和随机误差联系起来看.精密度、准确度和精确度都是评价测量结果好坏的，但是这些概念的含义不同，使用时应加以区别.

(1) 精密度：表示测量结果中的随机误差大小的程度.它是指在一定的条件下进行重复测量时，所得结果的相互接近程度，是描述测量重复性的.精密度高,即测量数据的重复性好,随机误差较小.

(2) 准确度：表示测量结果中的系统误差大小的程度.用它描述测量值接近真值的程度准确度高即测量结果接近真值的程度高，系统误差较小.

(3) 精确度：是对测量结果中系统误差和随机误差的综合描述.它是指测量结果的重复性及接近真值的程度.对于实验和测量来说,精密度高准确度不一定高 而准确度高精密度也不一定高；只有精密度和准确度都高时，精确度才高.

现在以打靶结果为例来形象说明三个“度”之间的区别.图 1-1 中，(a)图表示子弹相互之间比较靠近，但偏离靶心较远，即精密度高而准确度较差;(b)图表示子弹相互之间比较分散，但没有明显的固定偏向，故准确度高而精密度较差;(c)图表示子弹相互之间比较集中,且都接近靶心,精密度和准确度都很高,亦即精确度高.

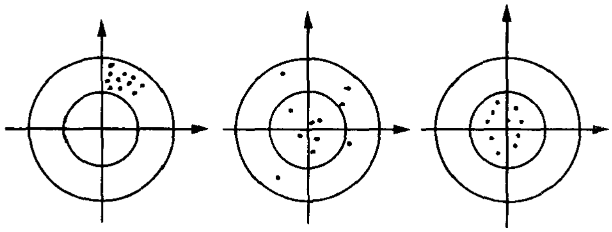

图 1-1　测量的精密度、准确度和精确度图示

四、不确定度与置信概率

有时我们可以把具有足够准确度的值作为约定真值.约定真值可以用系统误差明显较小的计量器具和（或）测量方法得到，这样就可以求得测量值的误差.但一般来说，真值是无法测得的，因此误差也就无法得到.我们只能通过一定的方法对测量误差进行估计，这就需要引入不确定度的概念.不确定度是指由于测量误差的存在而对被测量值不能肯定的程度，是表征被测量的真值所处的量值范围的评定.我们在表示完整的测量结果时，除给出被测量 x_0 的量值，还要同时标出测量的总不确定度 Δ，写成

$$x = x_0 \pm \Delta \qquad (P = \rho) \tag{1-3}$$

的形式括号内的 ρ 是一个表示可能性大小的概率值，称之为置信概率.结果表示式(1-3)的含义是：区间($x_0 - \Delta, x_0 + \Delta$)内包含被测量 x 的真值的可能性有 ρ. 由式(1-3)可知，我们可以将不确定度理解为一定概率下的误差限值.

为了直观地评定测量结果，也常采用相对不确定度的概念.用 U_r 表示相对不确定度，则有

$$U_r = \Delta / x_0 \tag{1-4}$$

对不同的要求，置信概率可取不同的值，常见的取值有 0.68，0.90，0.95，0.99 等.在 $P=0.95$ 时，不必注明 P 值.多数的工业和商业用途上所用的约定概率为 0.95. 在本教材中，不确定度用的置信概率一般为 0.95.

根据估计方法的不同，总不确定度可分为两类分量，一类是可以通过多次重复测量用统计学方法估算出的 A 类分量 Δ_A，另一类是用其它方法估算出的 B 类分量 Δ_B.将两类分量按方和根的方法合成，就得到测量结果的总不确定度：

$$\Delta = (\Delta_A^2 + \Delta_B^2)^{1/2}$$

第二节　系统误差

一、系统误差的来源

系统误差的来源有以下三个方面：

(1) 由于仪器本身的缺陷或没有按规定的条件使用仪器而造成的误差. 例如,仪器的零点不准造成的误差；等臂天平两臂不等长造成的误差；在 20℃下标定的标准电阻在 30℃的条件下使用造成的误差.

(2) 由于测量所依据的理论公式本身的近似性；或者实验条件不能达到理论公式所规定的要求；或者由于测量方法所带来的误差. 例如，利用单摆测量重力加速度 g ,所依据的公式为 $g = 4\pi^2 l / T^2$(式中，l 为单摆的摆长，T 为单摆的摆动周期),此公式成立的条件是摆角趋于零. 而在测量周期时又必然要求有一定的摆角，这就决定了测量结果中必然含有系统误差.

(3) 由于测量者本人的生理或心理特点所造成的误差. 例如,测量一段时间,观测者计时有超前或落后习惯所带来的误差；对准标志时，观测者总是偏左或偏右所造成的误差等.

系统误差经常是一些实验主要的误差来源，依靠多次重复测量一般不能发现系统误差是否存在. 系统误差处理不当往往会给实验结果带来重大影响. 因此，我们要经常总结经验，掌握各种因素引起的系统误差的规律，以提高自己的实验水平.

二、系统误差的发现

系统误差产生的原因往往是已知的，它的出现一般也是有规律的，人们通过长期的实践和理论研究总结出一些发现系统误差的方法. 下面简述两种常用的方法.

1. 理论分析法

所谓理论分析法就是观测者凭借所掌握的实验理论、实验方法和实验经验等，对实验所依据的理论公式的近似性、所采用的实验方法的完善性进行研究与分析，从中找出产生系统误差的某些主要根源，从而找出系统误差的方法. 例如,气垫导轨实验中,经理论分析知道，由于滑块与导轨之间存在一定的摩擦阻力，如果实验中作为无摩擦的理想情况来处理，就会产生与摩擦阻力有关的系统误差. 理论分析法是发现、确定系统误差的最基本的方法.

2. 对比法

对比法就是改变实验的部分条件、甚至全部条件进行测量，分析改变前后所得的测量值是否有显著的不同，从中去分析有无系统误差和探索系统误差来源的方法. 对比的方法有多种，其中包括不同实验方法的对比，使用不同测量仪器的对比，改变测量条件的对比，以及采用不同人员测量的对比等. 例如，将物体分别放在天平的左盘和右盘上进行称衡，可以发现天平不等臂引入的误差；精确地测量同一单摆在不同摆角时的周期值，可以发现周期与摆角有关.

以上介绍了两种发现系统误差的方法. 除此之外,还有一些发现系统误差的方法,在具体的实验中，我们应该注意学习

三、系统误差的处理

处理系统误差没有通用的一般方法，下面介绍几个具有一定意义的原则.

1. 消除产生系统误差的因素

这要求我们对整个测量过程及测量装置进行必要的分析与研究，找出可能产生系统

误差的原因. 例如,是否有近似公式或近似计算 测量仪器结构是否合理 测量环境方面是否有由于温度、湿度、气压、振动、电磁场等所引起的影响 观测者是否有估读刻度偏高或偏低的习惯等. 经过分析与研究，如果确认实验中有系统误差，则针对具体原因，采取相应措施使系统误差得以减小或消除.

2. 对测量结果加以修正

计算出要处理的系统误差之值，取其反号为修正值，加到测量结果上，使测量结果得到修正；或者在计算公式中加入修正项去消除某项系统误差；或者用更高一级的标准仪器校准一般仪器，得到修正值或修正曲线，从而使测量结果得以修正.

3. 采用适当的测量方法

在测量过程中，根据系统误差的性质，选择适当的测量方法，使测得值中的系统误差相互抵消，从而消除系统误差对测量结果的影响例如，天平只有在两臂严格等长时，砝码的质量才等于被测物体的质量. 而事实上，天平两臂总不是严格等长的，即砝码的质量与物体的质量并不严格相等. 为了消除这种系统误差，可以采用所谓复称法称衡. 设天平左臂和右臂的长度分别为 l_1 与 l_2,物体的质量为 m ,先将物体放在天平的左盘上,砝码放在右盘上进行称衡. 天平平衡时,砝码的质量为 m',于是可得到 $ml_1 = m'l_2$. 然后将砝码放在天平的左盘上，物体放在右盘上进行称衡. 天平平衡时，砝码的质量为 m'',于是可得到 $m''l_1 = ml_2$. 根据以上两式,可得 $m = \sqrt{m'm''}$.

总的说来，消除系统误差影响的原则就是首先设法使它不产生，如果做不到就修正它或减小它，或者在测量过程中设法消除它的影响.

我们在处理系统误差时，常将它分为两类来考虑，即已定系统误差和未定系统误差. 已定系统误差是指误差的绝对值和符号已经确定的系统误差；未定系统误差是指误差的绝对值和符号未确定的系统误差. 处理数据时，需将已定系统误差从测量值中减去，得到修正后的测量值. 修正值的误差再被划分为 A 类不确定度分量和 B 类不确定度分量来分别加以估算，最后将两类不确定度合成，得到修正值的总不确定度.

第三节　不确定度的估算

一、随机误差与 A 类不确定度分量的估算

1. 随机误差的正态分布与标准误差

(1) 随机误差的正态分布规律

在相同的测量条件下，对某一被测量进行多次重复测量，假设系统误差已被减弱到可以被忽略的程度,由于随机误差的存在,测量结果 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 一般存在着一定的差异. 如果该被测量的真值为 a,则根据误差的定义,各次测量的误差为

$$\delta_i = x_i - a \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{1-5}$$

大量的实验事实和统计理论都证明，在绝大多数物理测量中，当重复测量次数足够多时,随机误差 δ 服从或接近正态分布（或称高斯分布）规律. 正态分布的特征可以用正态分布曲线形象地表示出来，见图 1-2,横坐标为误差 δ,纵坐标为误差的概率密度分布函数 $f(\delta)$. 当测量次数 $n\to\infty$时,此曲线完全对称. 正态分布具有以下的性质：

①单峰性 绝对值小的误差出现的可能性(概率)大,绝对值大的误差出现的可能性小.

②对称性：大小相等的正误差和负误差出现的机会均等，对称分布于真值的两侧.

③有界性：非常大的正误差或负误差出现的可能性几乎为零.

④抵偿性 当测量次数非常多时,正误差和负误差相互抵消,于是,误差的代数和趋向于零.

根据误差理论可以证明函数 $f(\delta)$ 的数学表达式为

$$f(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} \tag{1-6}$$

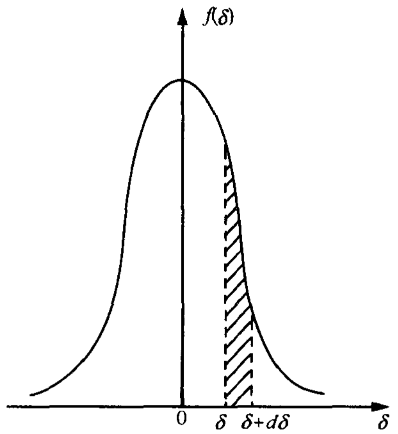

图 1-2 随机误差的正态分布曲线

测量值的随机误差出现在（$\delta,\delta+d\delta$)区间内的可能性为 $f(\delta)d\delta$,即图 1-2 中阴影线所包含的面积元.式(1-6)中的 σ 是一个与实验条件有关的常数,称之为标准误差.

(2) 标准误差的物理意义

按照概率理论，误差 δ 出现在区间（$-\infty$, $+\infty$)的事件是必然事件,所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\delta)d\delta = 1$ 即曲线与横轴所包围的面积恒等于 1.当 $\delta=0$ 时,由式(1-6)得

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \tag{1-7}$$

由式(1-7)可见，若测量的标准误差 σ 很小,则必有 $f(0)$很大.由于曲线与横轴间围成的面积恒等于 1,所以如果曲线中间凸起较大,两侧下降较快，相应的测量必然是绝对值小的随机误差出现较多，即测得值的离散性小，重复测量所得的结果相互接近，测量的精密度高；相反,如果 σ 很大,则 $f(0)$就很小,误差分布的范围就较宽，说明测得值的离散性大，测量的精密度低.这两种情况的正态分布曲线如图 1-3 所示.因为 σ 反映的是一组测量数据的离散程度，因此常称它为测量列的标准误差.它的数学表达式为

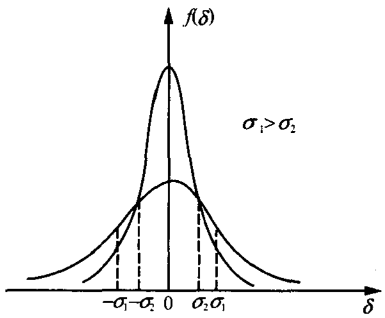

图 1-3 σ 与 δ 的离散性关系

$$\sigma = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2}{n}} \tag{1-8}$$

可以证明，$P(|\delta|<\sigma) = \int_{-\sigma}^{\sigma} f(\delta)d\delta = 0.682689 \approx 68.3\%$,即由 $-\sigma$ 到 σ 之间正

态分布曲线下的面积占总面积的 68.3%．这就是说，如果测量次数 n 很大，则在所测得的数据中，将有占总数 68.3% 的数据的误差落在区间($-\sigma$，$+\sigma$)之内.也可以这样讲，在所测得的数据中，任一个数据 x_i 的误差 δ_i 落在区间($-\sigma$，$+\sigma$)之内的概率为 68.3%．

也可证明，$P(|\delta|<3\sigma)=0.9973\approx99.7\%$．这表明，在 1000 次测量中，随机误差超过 $\pm3\sigma$ 范围的测得值大约只出现 3 次左右.在一般的十几次测量中，几乎不可能出现.依据这点，可对多次重复测量中，由于过失引起的异常数据加以剔除.这被称为剔除异常数据的"3σ"准则.它只能用于测量次数 $n>10$ 的重复测量中，对于测量次数较少的情况，需要采用另外的判别准则.

同时，由概率积分表可得如下一些典型数据：

$P(|\delta|<1.96\sigma)=0.9500$，　　　$P(|\delta|<2\sigma)=0.9545$

$P(|\delta|<2.58\sigma)=0.9901$，　　　$P(|\delta|<4\sigma)=0.9999$

2．算术平均值和标准偏差

(1) 算术平均值

由于测量误差的存在，真值实际上是无法测得的.根据随机误差的正态分布规律，测得值偏大或偏小的机会相等，即绝对值相等的正负误差出现的概率是相等的.因此，在排除掉系统误差后，各次测得值的算术平均值

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} \tag{1-9}$$

必然最为接近被测量的真值，而且当测量次数趋于无限多时（$n\to\infty$），平均值无限接近真值，所以算术平均值是真值的最佳估计值.

(2) 算术平均值的标准误差

我们通过多次重复测量获得了一组数据，并把求得的算术平均值 $\bar{x}$ 作为测量结果.如果我们在完全相同的条件下再重复测量该被测量时，由于随机误差的影响，不一定能得到完全相同的 $\bar{x}$，这表明算术平均值本身具有离散性.为了评定算术平均值的离散性，我们引入算术平均值的标准误差 $\sigma_{\bar{x}}$，可以证明

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{1-10}$$

式中，n 为重复测量次数.算术平均值的标准误差表示算术平均值的误差（即 $\bar{x}-a$)落在区间($-\sigma_{\bar{x}}$，$+\sigma_{\bar{x}}$)之内的概率为 68.3%，或者说区间($\bar{x}-\sigma_{\bar{x}}$，$\bar{x}+\sigma_{\bar{x}}$)包含真值 a 的概率为 68.3%．

由式(1-10)可见，$\sigma_{\bar{x}}$ 是测量次数 n 的函数，测量次数越多，算术平均值的标准误差越小，所以多次测量提高了测量的精度.但也不是测量次数越多越好.因为 n 增大只对随机误差的减小有作用，对系统误差则无影响，而测量误差是随机误差与系统误差的综合.所以，增加测量次数对减小误差的价值是有限的；其次，$\sigma_{\bar{x}}$ 与测量次数 n 的平方根成反比，σ 一定时，当 $n>10$ 以后，$\sigma_{\bar{x}}$ 随测量次数 n 的增加而减小得很缓慢.另外，测量次数过多，观测者将疲劳，测量条件也可能出现不稳定，因而有可能出现增加随机误差的趋势.实际上，

只有改进实验方法和仪器，才能从根本上改善测量的结果.

(3)标准偏差

真值一般是无法测得的，因此前面对误差的讨论只有理论上的价值.下面我们讨论误差的实际估算方法.

由于算术平均值最接近真值，因此可以用算术平均值参与对标准误差的估算.我们常用如下的贝塞尔公式去估算标准误差：

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}{n-1}} \tag{1-11}$$

式中,测得值 x_i 与平均值 $\bar{x}$ 之差 v_i(即 $v_i=x_i-\bar{x}$)称为测得值 x_i 的残余误差,简称残差.

贝塞尔公式是用残差去求标准误差 σ 的估计值 S ,称此估计值为测量列的标准偏差.

可以证明,当测量次数 n 足够大时，可以用式(1-11)中 S 的值代替按式(1-8)定义的 σ 值.

算术平均值的标准误差 $\sigma_{\bar{x}}$ 的估计值为算术平均值的标准偏差 $S_{\bar{x}}$,若测量列的标准偏差为 S ,则

$$S_{\bar{x}}=\frac{S}{\sqrt{n}} \tag{1-12}$$

通过前面的讨论我们看到，误差一词有两重意义.一是它定义为测量值与真值之差，是确定的，但是一般不可能求出具体的数值；二是当它与某些词构成专用词组时（如标准误差),不指具体的误差值,而是用来描述误差分布的数值特征,表示和一定的置信概率相联系的误差范围.这个问题应引起初学者的注意.

3. A类不确定度分量的估算

把算术平均值 $\bar{x}$ 作为测量结果,根据误差理论,当重复测量次数足够多时,可求得置信概率为 0.95 的 A 类不确定度分量

$$\Delta_A=1.96S_{\bar{x}} \tag{1-13}$$

但当重复测量次数较少时，随机误差不再符合正态分布.这样，需对式(1-13)做一修正.根据误差理论，可以求得置信概率为 0.95 时,测量次数 n 与 A类不确度分量 Δ_A 之间的关系,见表 1-1(表中 $t=\frac{\Delta_A}{S_{\bar{x}}}$).

表 1-1　测量次数 n 与 A 类不确定度分量 Δ_A 之间的关系

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	∞
t	12.7	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.36	2.31	2.26	2.14	2.09	1.96

根据重复测量次数 n ,可从表 1-1 中查出相应的 t 值，这样便得到修正后的置信概率为 0.95 的 A类不确定度分量

$$\Delta_A=tS_{\bar{x}} \tag{1-14}$$

二、仪器误差与 B 类不确定度分量的估算

测量仪器和量具本身总是存在一定误差，我们习惯上称之为仪器误差，用符号 $\Delta_{仪}$ 表示. 它是指仪器在规定条件下使用时，所允许的误差限值.

仪器误差是一个统称，对于具体的各类仪器和量具具有不同的表示方式. 例如，游标卡尺和螺旋测微计的仪器误差用示值误差表示. 国家标准规定，量程为 0～300mm 以下的游标卡尺，其示值误差在数值上等于该尺的最小分度值. 螺旋测微计分零级、一级和二级三种精度级别，通常实验室使用的为一级螺旋测微计，其示值误差随量程而异. 量程为 0～25mm的一级螺旋测微计，示值误差为 ±0.004mm.

对物理天平而言，仪器误差用指示值变动性误差来表示天平称衡结果的可靠程度，这是由于天平调节、操作、温差、气流以及振动等原因，致使重复称衡时各次平衡位置产生差异. 按规定，合格天平的示值变动性误差不应大于该天平的最小分度值

电表的仪器误差用准确度等级 K 表示. 在规定条件下使用电表测量，其示值的误差限为电表量程与准确度等级百分数即 $K\%$ 的乘积. 可见，电表的仪器误差大小由电表准确度等级和电表量程二者决定.

$\Delta_{仪}$ 可在仪器出厂说明书或仪器标牌上查到，对于精度较低的仪器，$\Delta_{仪}$ 可取为其最小分度值的一半. 在工业和商业用途上，仪器误差的置信概率一般为 0.95.

在大多数情况下，普通物理实验中把 $\Delta_{仪}$ 简化地直接当作总不确定度中用非统计方法估计的 B 类不确定度分量 Δ_B，即

$$\Delta_B = \Delta_{仪} \tag{1-15}$$

三、间接测量的不确定度估算

在很多实验中，我们进行的测量都是间接测量. 因为间接测量量是各直接测量量的函数，所以直接测量量的误差必定会给间接测量量带来误差，这被称为误差的传递（播）. 这样一来，直接测量结果的不确定度就必然会影响到间接测量结果，这种影响的大小可以由相应的数学公式估算出来.

1. 间接测量的不确定度合成公式

设间接测量量 y 是各相互独立的直接测量量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的函数，其函数形式为

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_m) \tag{1-16}$$

设各直接测量量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的测量结果分别为 $\bar{x}_1 \pm \Delta_{x_1}, \bar{x}_2 \pm \Delta_{x_2}, \cdots, \bar{x}_m \pm \Delta_{x_m}$. 则间接测量量 y 的最佳估计值为

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, x_m) \tag{1-17}$$

由于不确定度都是微小的量，相当于数学中的"增量"，因此间接测量量的不确定度的计算公式与数学中的全微分公式基本相同. 不同之处是：①要用不确定度 Δ_{x_1} 等替代微分

dx_1 等；②要考虑到不确定度合成的统计性质.

具体做法如下：

首先对函数式(1-16)求全微分：

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}dx_m \tag{1-18}$$

然后用不确定度 Δ_y, Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, $\cdots$, Δ_{x_m} 替代 dy, dx_1, dx_2, $\cdots$, dx_m 并将等式右端进行方和根合成，得到间接测量量的不确定度方和根合成公式：

$$\Delta_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta_{x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\Delta_{x_m}\right)^2} \tag{1-19}$$

对于积商形式的函数,为计算方便,可先对函数式(1-16)取对数,得

$$\ln y = \ln f(x_1, x_2, \cdots, x_m) \tag{1-20}$$

再对上式求全微分：

$$\frac{dy}{y} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{f} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{f} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{dx_m}{f} \tag{1-21}$$

用不确定度 Δ_y, Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, $\cdots$, Δ_{x_m} 替代 dy, dx_1, dx_2, $\cdots$, dx_m 后,再进行方和根合成,得到的是间接测量量的相对不确定度的方和根合成公式：

$$\frac{\Delta_y}{y} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\Delta_{x_1}}{f}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\Delta_{x_2}}{f}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\Delta_{x_m}}{f}\right)^2} \tag{1-22}$$

作粗略的不确定度估算时，也可采用间接测量量的不确定度算术合成公式：

$$\Delta_y = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta_{x_1}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta_{x_2}\right| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_m}\Delta_{x_m}\right| \tag{1-23}$$

$$\frac{\Delta_y}{y} = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\Delta_{x_1}}{f}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\Delta_{x_2}}{f}\right| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\Delta_{x_m}}{f}\right| \tag{1-24}$$

用算术合成公式估算出的间接测量量的不确定度偏大.

用式(1-19)～(1-22)估算间接测量量的不确定度时，应使式中各直接测量量的不确定度具有相同的置信概率.

[例 1]　求函数式(1) $N = A + B - C$ 和(2) $N = AB/C$ 的不确定度传递公式,式中 A、B、C 为变量.

[解]

(1)对函数式 $N = A + B - C$ 求全微分得

$$dN = dA + dB - dC$$

用不确定度代替微分，再方和根合成便得到不确定度传递公式：

$$\Delta_N = \sqrt{\Delta_A^2 + \Delta_B^2 + \Delta_C^2}$$

(2)因为函数式 $N = AB/C$ 是积商的形式,所以先对其取对数,可得

$$\ln N = \ln A + \ln B - \ln C$$

再求全微分：

$$\frac{dN}{N} = \frac{dA}{A} + \frac{dB}{B} - \frac{dC}{C}$$

用不确定度代替微分，再方和根合成便得到相对不确定度传递公式：

$$\frac{\Delta_N}{N} = \sqrt{\left(\frac{\Delta_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_B}{B}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_C}{C}\right)^2}$$

2. 不确定度分析与实验设计

间接测量量的不确定度合成公式除了用来估算间接测量值的不确定度之外，还有一个重要的功能，就是可以用它来分析各直接测量值的不确定度对间接测量结果不确定度影响的大小，为合理选用测量仪器和实验方法提供依据．

(1) 不确定度的分配与仪器的合理选配

在实际测量中，通常要事先确定待测物理量的不确定度．当对间接测量量不确定度的要求确定后，对各直接测量量的不确定度的要求仍是不定的，只能在某些假定条件下进行不确定度的分配．我们这里只介绍比较简单的不确定度等作用假设．它是假定各个分不确定度对总不确定度的影响相等，由此得到各直接测量量的不确定度，进而确定测量各个直接测量量应选用的仪器．

比如,若用合成公式

$$\Delta_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta_{x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\Delta_{x_m}\right)^2}$$

来作不确定度分析，则假设

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta_{x_1}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta_{x_2}\right| = \cdots = \left|\frac{\partial f}{\partial x_m}\Delta_{x_m}\right| = \frac{\Delta_y}{\sqrt{m}} \qquad (1-25)$$

[例 2]　据公式 $\rho = \frac{4m}{\pi D^2 H}$测量圆柱体的密度,其中 m、D、H 分别是圆柱体的质量、底面直径和高．现要求 $\frac{\Delta_\rho}{\rho} \leqslant 0.5\%$,若 $m \approx 33\text{g}, D \approx 12\text{mm}, H \approx 35\text{mm}$,则 m、D、H 各应选择何等级别的仪器进行测量？

[解]

$$\frac{\Delta_\rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\Delta_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_H}{H}\right)^2}$$

根据不确定度等作用假设，令

$$\frac{\Delta_m}{m}=\frac{2\Delta_D}{D}=\frac{\Delta_H}{H}=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\Delta_\rho}{\rho}$$

则

$$\frac{\Delta_m}{m}\leqslant\frac{0.5\%}{\sqrt{3}},\quad \frac{2\Delta_D}{D}\leqslant\frac{0.5\%}{\sqrt{3}},\quad \frac{\Delta_H}{H}\leqslant\frac{0.5\%}{\sqrt{3}}$$

将 m、D、H 的数值分别代入上面三式，计算得

$$\Delta_m\leqslant 0.095\text{g},\quad \Delta_D\leqslant 0.017\text{mm},\quad \Delta_H\leqslant 0.1\text{mm}$$

由量具说明书可查得 感量为 0.05g 的物理天平的仪器误差为 0.05g; 0～100mm 的一级千分尺的仪器误差为 0.004mm; 0～300mm、分度值为 0.05mm 的游标卡尺的仪器误差为 0.05mm. 因此,称衡圆柱体的质量选用感量为 0.05g 的物理天平 测量底面直径选用 0～100mm 的一级千分尺 测量高度选用 0～300mm、分度值为 0.05mm 的游标卡尺便可满足要求.

按等作用假设对不确定度进行分配后，有可能对某些值的测量要求过于严格，有些则过于宽松.这样，有时还需要根据具体情况进行调整，直至满足要求.

(2) 最佳方案的选择

所谓最佳方案就是使总不确定度为最小的实验方案.

[例 3]　通过电流、电压及电阻的测量来间接测量功率.现有的测量精度为

$$\frac{\Delta_I}{I}=2.5\%,\quad \frac{\Delta_U}{U}=2.0\%,\quad \frac{\Delta_R}{R}=1.0\%$$

试选择最佳测量方案.

[解] 利用电流、电压及电阻的测量来间接测量功率的方法有三种：

①$P=IU$，则 $\frac{\Delta_P}{P}=\sqrt{\left(\frac{\Delta_I}{I}\right)^2+\left(\frac{\Delta_U}{U}\right)^2}=3.2\%$；

②$P=U^2/R$，则 $\frac{\Delta_P}{P}=\sqrt{\left(\frac{2\Delta_U}{U}\right)^2+\left(\frac{\Delta_R}{R}\right)^2}=4.1\%$；

③$P=I^2R$，则 $\frac{\Delta_P}{P}=\sqrt{\left(\frac{2\Delta_I}{I}\right)^2+\left(\frac{\Delta_R}{R}\right)^2}=5.1\%$.

第一种方法可使功率的不确定度最小，因此是最佳测量方案.

四、数据处理程序与实例

1. 单次直接测量的数据处理

在实际测量过程中,有的被测量是随时间变化着的,我们无法对其进行重复测量,只能进行单次测量.还有些被测量，对它们的测量精度要求不高，只要进行单次测量就可以了.

在单次测量中，用单次测量值 $x_{测}$ 作为被测量的最佳估计值.测量值的不确定度与所用测量仪器的精度、测量者的估读能力及测量条件等很多因素有关，因此它的合理估计是

比较复杂的.在一般情况下，对随机误差很小的测量，可以只估计不确定度的 B 类分量，用仪器误差 $\Delta_{仪}$ 作为 $x_{测}$ 的总不确定度，测量结果表示为

$$x = x_{测} \pm \Delta_{仪} \tag{1-26}$$

有的测量随机误差可能比较大，此时可以估计一个误差限来作为单次测量的不确定度 Δ.例如,用 0.1s 分度的秒表计时，由于人的感观灵敏度的限制与技术上的不熟练，常常造成'启动'和'停止'秒表所用的时间超过 0.1s,这必然使测量误差限超过秒表的仪器误差限.这时可依据实际情况来估计误差限，比如可取 $\Delta=0.2$s.又如，用钢卷尺测量较长的距离,不可能保证尺子拉直拉平,则可依实际情况取 $\Delta=5$mm 或更大.总之要根据测量的不同情况以及观测者实验技巧的高低来对单次测量的总不确定度作出估计.

2.多次直接测量的数据处理

对多次直接测量的数据 x_1, x_2, …, x_n 进行处理的一般步骤是：

(1)计算被测量的算术平均值 $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n$，把 $\bar{x}$ 作为被测量的最佳估计值.

(2)求出各测量值的残差 $v_i = x_i - \bar{x}$.

(3)用贝塞尔公式求出测量列的标准偏差 $S = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}}$.

(4)审查测量数据，如发现有异常数据，应予以舍弃舍弃异常数据后，再重复步骤(1)(2)(3)(4),直至完全剔除异常数据.

(5)求出算术平均值的标准偏差 $S_{\bar{x}} = \dfrac{S}{\sqrt{n}}$,并查表 1-1 求出总不确定度的 A 类分量 $\Delta_A = tS_{\bar{x}}$.

(6)求出总不确定度 $\Delta = \sqrt{(tS_{\bar{x}})^2 + \Delta_{仪}^2}$.

(7)表示出最后测量结果 $x = \bar{x} \pm \Delta$, $U_r = \Delta / \bar{x}$.

注 利用计算器的统计计算功能,将多次测量结果输入后,可直接求得 $\bar{x}$ 及 S.

[例 4] 有一组以 cm 为单位的长度测量数据为 2.20,2.25,2.30,2.15,2.10,2.15,2.25,2.10,2.20,2.20,2.10,2.15,2.25,2.20,2.20,2.15,2.25,2.20,2.20,3.50,据"3σ"准则判断其中是否有异常数据需剔除.

[解] 因为测量次数 $n>10$,所以可以用"3σ"准则剔除异常数据.

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{20} \frac{x_i}{20} = 2.26\text{cm}$$

根据贝塞尔公式，用标准偏差 S 代替标准误差 σ：

$$S = 0.3\text{cm}$$

$$3S = 0.9\text{cm}$$

根据'3σ'准则,因为 $v_{20} = 1.24\text{cm} > 3S$,所以 3.50 应舍去.舍去 3.50 后，再重新计算测量数据,得

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{19} \frac{x_i}{19} = 2.19\text{cm}$$

$$S = 0.06\text{cm}$$

$$3S = 0.18\text{cm}$$

在这 19 个数据中,没有一个数据的残差大于此 $3S$,所以,根据"3σ"准则,这 19 个数据中没有异常数据.

[例 5] 用量程为 0～25mm 的一级螺旋测微计($\Delta_{仪} = 0.004\text{mm}$)对一铁板的厚度进行了 8 次重复测量,以 mm 为单位,测量数据为:3.784,3.779,3.786,3.781,3.778,3.782,3.780,3.778,求测量结果.

[解] 可求得

$$\bar{L} = 3.781\text{mm}$$

$$S = 0.0029\text{mm}$$

$$S_{\bar{L}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = 0.0011\text{mm}$$

查表 1-1 知,$n = 8$ 时,$t = 2.36$,计算得:

A类不确定度分量 $\Delta_A = tS_{\bar{L}} = 0.0025\text{mm}$

B 类不确定度分量 $\Delta_B = \Delta_{仪} = 0.004\text{mm}$

总不确定度 $\Delta_L = \sqrt{\Delta_A^2 + \Delta_B^2} = 0.005\text{mm}$

测量结果为

$$L = \bar{L} \pm \Delta_L = (3.781 \pm 0.005)\text{mm}$$

$$U_r = \frac{\Delta_L}{\bar{L}} = 0.13\%$$

3. 间接测量的数据处理

间接测量的数据处理步骤是:

(1) 按照直接测量量的数据处理程序求出各直接测量量的结果:

$$x_1 = \bar{x}_1 \pm \Delta_{x_1},\ x_2 = \bar{x}_2 \pm \Delta_{x_2}, \cdots,\ x_m = \bar{x}_m + \Delta_x$$

(2) 将各直接测量量的最佳估计值代入函数关系式中,求得间接测量量的最佳估计值:

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1,\ x_2, \cdots, x_m)$$

(3) 求出间接测量不确定度的方和根合成公式:

$$\Delta_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta_{x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\Delta_{x_m}\right)^2}$$

或

$$\frac{\Delta_y}{y}=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\Delta_{x_1}}{f}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\Delta_{x_2}}{f}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\Delta_{x_m}}{f}\right)^2}$$

(4)求出间接测量值的不确定度 Δ_y.

(5)表示出最后测量结果 $y=\bar{y}\pm\Delta_y$, $U_r=\frac{\Delta_y}{\bar{y}}$

[例 6] 用流体静力称衡法测固体密度，$\rho=\frac{m}{m-m_1}\rho_0$,测得

$$m=(2.706\pm0.002)\times10\text{g}\ ,\ m_1=(1.703\pm0.002)\times10\text{g}$$

$$\rho_0=(9.997\pm0.003)\times10^{-1}\text{g/cm}^3$$

求固体密度的测量结果.

[解] 由已知条件得

$$\rho=\frac{m}{m-m_1}\rho_0=2.697\text{g/cm}^3$$

再求 ρ 的不确定度.

对函数式 $\rho=\frac{m}{m-m_1}\rho_0$ 先取对数,再求全微分：

$$\ln\rho=\ln m-\ln(m-m_1)+\ln\rho_0$$

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{dm}{m}-\frac{dm-dm_1}{m-m_1}+\frac{d\rho_0}{\rho_0}$$

合并同一变量的系数：

$$\frac{d\rho}{\rho}=-\frac{m_1}{m(m-m_1)}dm+\frac{1}{m-m_1}dm_1+\frac{1}{\rho_0}d\rho_0$$

用不确定度替代微分，再方和根合成：

$$\frac{\Delta_\rho}{\rho}=\sqrt{\left[\frac{m_1}{m(m-m_1)}\right]^2\Delta_m^2+\left(\frac{1}{m-m_1}\right)^2\Delta_{m_1}^2+(\frac{1}{\rho_0})^2\Delta_{\rho_0}^2}$$

代入已知条件,得相对不确定度为

$$U_r=\frac{\Delta_\rho}{\rho}=0.24\%$$

不确定度为

$$\Delta_{\rho=}\rho\times0.24\%=7\times10^{-3}\text{g/cm}^3$$

最后结果为

$$\rho=(2.697\pm0.007)\text{g/cm}^3$$

$$U_r=0.24\%$$