绪　　论

§1　物理实验课的地位和任务

物理学是建立在实验基础上的一门科学。物理规律的发现和物理理论的建立，都必须以严格的物理实验为基础，并受到实验的检验 同时，物理学研究中的一些新的假设、预言，最终要在实验中进行验证，以判断它们的正确性。例如，英国的托马斯·杨和法国的菲涅耳的干涉实验及衍射实验，为光的波动学说奠定了基础 由于对黑体辐射实验事实的研究，法国物理学家普朗克给出了黑体辐射定律并提出了能量量子化的概念，从而诞生了量子力学 又如 1919 年，英国的爱丁顿拍出日全蚀照片，用于分析光线在太阳附近的弯曲情况，从而为爱因斯坦在 1915 年提出的广义相对论提供了有力的证据；著名的物理学家杨振宁、李政道提出了弱相互作用宇称不守恒理论，经实验物理学家吴健雄实验验证后，在 1957 年获得了诺贝尔物理学奖。

物理学的发展史是理论和实验相辅相成的历史。作为培养高级工程技术人员的高等工程院校，不仅要使学生具有深广的基础理论知识，而且要有从事现代化科学实验的较强能力，以适应‘面向现代化、面向未来’的要求。本课程的具体任务是：

一、学习和掌握物理实验的基本知识

通过对物理实验现象的观察、分析和物理量的测量，学习和掌握物理实验的基本知识、基本方法和基本技术；掌握如何运用实验原理和方法去研究某个物理问题；熟悉常用仪器的基本原理、结构性能及使用方法。

二、培养和提高学生的科学实验能力

1. 自学能力 通过提前阅读实验教材或说明书、参考资料等，做好实验前的准备，培养学生的自学能力。

2. 动手能力 熟悉一些常用仪器的使用 掌握一些基本的实验技能，如水平、垂直的调节，光路的共轴、视差消除的调节，电路中分压、限流方法的使用以及如何排除实验故障等。

3. 分析和表达能力 能够正确合理地列出实验数据表格、记录和处理实验数据，绘制实验曲线，分析实验结果，撰写一定水平的实验报告。

4. 设计能力 对于简单问题，能够从研究对象或课题要求出发，自己查阅资料，依据某个原理，设计实验方案，确定实验参数，选配仪器，拟定实验程序。

三、培养和提高学生的科学实验素质

通过实验培养学生实事求是、理论联系实际的科学作风 严肃认真、不怕困难、艰苦努力的科学态度 勇于探索、创新的科学精神 以及遵守纪律、团结协作、爱护公共财产的优良品德。

§2　物理实验课的基本环节

一、预习

由于实验课时间有限，为保证顺利和高质量地完成实验，实验前必须认真阅读实验教材，明确实验目的、原理、实验方法和条件，了解实验步骤，根据实验要求画出数据记录表格，完成实验预习思考题并写出预习报告。

二、操作

操作是实验课的中心环节，教师用一定的时间讲解有关的实验内容和要求，使用仪器的方法和注意事项，对实验中的难点给出提示。要求学生严格按照仪器设备和操作规程进行实验，掌握正确的调整和操作方法，实验中要善于多观察、多分析，反对蛮干。若发现异常现象或仪器故障，应立即向教员报告。

把实验测量的原理数据和实验现象及时记录下来，如实验的条件，仪器的规格、型号和参数等，注意按有效数字规则记录实验数据并注意标明物理量的单位。如要更改数据，需注明原因，以便在实验结束后分析、核对。测试结束后，数据要经教员检查合格并签名后，方可整理仪器、离开实验室。

三、实验报告

实验报告是对实验工作的全面总结，实验报告一律采用学校统一的实验报告纸书写。要求 字体工整、语句简练、阐述清楚、图表规范、结果正确、分析客观。一份完整的实验报告应包括以下几个方面：

1. 实验名称。
2. 实验目的。
3. 实验仪器 包括型号、规格、参数等。
4. 实验原理 写出简要的实验理论依据、实验方法及公式，画出电路图、光路图等。设计性实验要求写出自拟的实验方案、设计的实验线路、选择的仪器等。注意，不要照抄讲义，应用自己的语言叙述。
5. 实验步骤：扼要说明实验的关键步骤和主要注意事项。

以上各项均写在预习报告中。

6. 实验数据、表格、作图及计算 表格要简单明了，分类清楚而有条理。
7. 误差分析：包括确定实验结果的误差范围，分析产生误差的原因及减小误差可采取的措施。
8. 实验结果 包括测量值 N、绝对误差 ΔN 和相对误差 E，并写成 N。 $N\Delta \pm \Delta N$ 的形式。若有观察某现象或验证某些物理规律的内容时，要写出实验结论。
9. 问题讨论 包括对实验中的现象解释、对实验方法的改进及建议、作业题、实验后的体会等。

第一章　误差理论和数据处理方法

任何测量和实验都受到误差的影响，估算并分析误差是科学实验过程中极为重要的组成部分。有关误差理论及其应用已发展成为一门专门的学科。

任何实验结果，如果没有标明误差，它几乎没有用，因为人们将对它的可靠性提出质疑，所以误差是评价测量结果必不可少的依据。物理实验课应赋予学生正确的、最基本的误差理论知识,包括误差的成因及分类、减少测量误差的基本方法,以及如何评价、正确地表达和估算误差等。本章虽为物理实验而写，亦适用于其他实验过程，是一切实验的基础知识。

测量及其误差

一、直接测量和间接测量

测量就是用一定的量具或仪器，通过一定的方法，直接或间接地与被测对象进行比较。测量分直接测量和间接测量。直接从仪器或量具上读出待测量的方法，称为直接测量。由若干个直接测量量经过一定的函数关系运算后获得待测量的方法，称为间接测量。

二、绝对误差和相对误差

任何测量值与真值之间都有偏差，这一偏差称为测量值的误差，用 Δx 表示。

$$\Delta x = x - x_0$$

任何测量都存在着误差，间接测量的误差来源于直接测量的误差。

任何一个测量结果表示为

$$x \pm \Delta x \qquad (1-1-1)$$

Δx反映的是测量结果总的绝对误差,一般取正值(绝对值),$\pm$号说明 Δx 是个范围,所以(1-1-1)式表示 x 的真值（一般是多次测量的算术平均值）有较大的概率出现在（x - Δx）~（$x+\Delta x$）区间。

真值是一个理想的概念，一般不可能准确知道。有关真值可以从以下几种情况得出：

1.理论值：如三角形三个内角的和为 180°等。

2. 公认值 世界公认的一些常数值,如普朗克常数等。

3. 相对真值：用准确度高一个数量级的仪器校准的测定值。

规定：校准仪器的误差应比测量仪器误差小一个数量级，即二者误差的比值应为 1:3 ~ 1:20。

4. n 次测量的算术平均值：对一个不变的量进行 n 次测量后，其算术平均值 $\bar{x}$ 可视为真值的最佳近似值。

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (1-1-2)$$

必须指出：这样的计算方法是以等精度测量为前提，即每次重复测量的测量人员、工具、方法及环境必须保持不变。当用算术平均值 $\bar{x}$ 代替真值时，所求的误差称为偏差。

多次测量的平均值最接近于真值，各次测量值与 $\bar{x}$ 的偏差也很接近于它们的误差，可以不去区分偏差与误差的细微区别，统称为误差。仅以绝对误差来评价测量结果是不全面的。例如，用米尺测量两个物体的长度，得出一个是 5cm，一个是 25cm，测量的绝对误差为 0.05cm，二者的绝对误差相同，但前者误差占测量值的 $\frac{0.05}{5}=1\%$，后者占 $\frac{0.05}{25}=0.2\%$，显然测量误差的严重程度不同。为了全面评价测量的优劣，必须同时表示出其测量结果的相对误差 E，即

$$E=\frac{\text{绝对误差}\ \Delta x}{\text{测量算术平均值}\ \bar{x}}\times 100\% \qquad (1-1-3)$$

三、误差的分类

根据误差产生的原因和性质不同，将误差分为两大类，即系统误差和偶然误差。

(一)系统误差

在同一条件下多次测量同一量时，误差的大小和方向保持恒定，或在条件改变时，误差的大小和方向按一定规律变化。

系统误差来源于以下几个方面：

1.仪器误差:由于仪器设计、制造、装配等方面引起的误差。如零点不准、气垫导轨没有调到水平、天平不等臂等。

2 环境误差：由于各种环境因素与仪器要求的工作状态不一致而引起的。如磁电式仪表旁有强磁场存在，环境温度不符合标准电池使用的温度范围等。

3 理论和方法误差：由于实验理论和实验方法的不完善带来的误差。如测量电压时没有考虑电压表内阻对电路的影响，测量温度时没有考虑热量的散失等。

由于系统误差的特点是它的确定性，因此不能用多次重复测量的方法来减小或消除它，处理系统误差要根据具体情况采取相应的方法加以消除。

(二)偶然误差

在同一条件下多次测量同一个量时，每次出现的误差的大小和正负没有确定的规律，但就总体来说仍服从一定的统计规律，如图 1-1-1，$f(\bar{x})$ 为误差的概率分布函数，Δx 为绝对偶然误差。从图中可看出偶然误差具有以下特点：

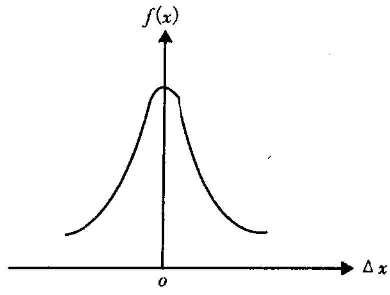

图 1-1-1

1.单峰性：测量值与真值相差愈小，可能性愈大；与真值相差很大的，可能性较小。

2.对称性：偶然误差大小和方向出现的概率相等。

3.有界性：在一定测量条件下，误差的绝对值不会超过一定的限度。

4.抵偿性：偶然误差的算术平均值随着测量次数增加而越来越小。

根据以上特点，可通过多次测量求平均值的方法，使偶然误差相互抵消，算术平均值

是与真值较为接近的数值，可作为测量的结果。

偶然误差来源于多种因素的扰动，例如，环境的温度、气压、磁场等不确定的因素，以及读数时每次对准标志(刻线、指针等)的不一致，估读数的不一致，被测对象本身的微小起伏变化等。

应该指出，从原则上讲，系统误差可以消除，而偶然误差不能消除。一个具体的测量中出现的误差往往既含有偶然误差，又含有系统误差。在实验中，当实验条件稳定且系统误差可以掌握时，就尽量保持在相同条件下做实验，以便修正系统误差。当系统误差未能掌握时，常常想一些办法使系统误差随机化，以便在多次测量取平均时抵消一部分。例如，一支米尺刻度不均匀，可以利用米尺不同刻度部位来测量，然后取平均值。另外有时只是为了说明误差的限度，两种误差不再加以区别。如许多不太精密的仪表所标的仪器最大允许误差(电表的准确度级别)，就是包括两种误差在内的。

§2　准确度、精密度、精确度

准确度、精密度和精确度是评价测量结果好坏的三个术语。

一、准确度

准确度是指测量值与真值的接近程度。准确度高，系统误差小。它反映测量结果系统误差的大小。

二、精密度

精密度是指重复测量所得结果之间相互接近的程度。精密度高，说明重复性好，误差分布密集，即随机误差小。它反映了测量结果偶然误差的大小。

三、精确度

精确度是指综合评定测量结果重复性和接近真值的程度。精确度高，说明精密度和准确度都高。它反映了偶然误差和系统误差的综合效果。

§3　系统误差的修正和限制

系统误差的处理较为复杂，它要求实验者既要有较好的理论基础，又要有一定的丰富经验。在物理实验中，系统误差的处理主要考虑的是由于仪器的精确度所限和实验方法、原理不完善而导致的系统误差。对未定系统误差若不能消除可作为偶然误差来处理。

一、发现系统误差的一些简单方法

现将发现系统误差的一些常用方法介绍如下：①用不同方法测量同一个量，看结果是否一致，若结果不一致，它们之间的差别又超出了偶然误差的范围，则肯定存在系统误差；②仪器的对比，如用两个电流表接入同一电路，把高一级的表作为标准表，找出另一只表的误差修正值③改变实验条件，将结果对比，如在磁场测量中将带有磁性的物质移近，看对测量结果的影响；④改变实验中某些参量的数值，并进行对比。

2. 理论分析法：分析实验所依据的理论公式要求的条件与实际情况有无差异；分析仪

器所要求的使用条件是否已达到等等。如用三线摆测量物体的转动惯量的公式 $J = \frac{M_0 g D_0 d}{16\pi^2 l} T_0$,所要求的条件是摆角 $\theta < 5°$ 三条摆线等长 大小圆盘水平 转动轴线在两盘中心连线，若不满足其中任何一个条件，就会引入系统误差。

3.分析数据法：在相同的条件下对某一物理量进行多次测量，测量结果的误差不服从统计规律（因为偶然误差是遵从统计规律的），则说明存在系统误差。

以上只是从普遍意义上介绍了几种发现系统误差的方法，在实际中常常会有许多更具体的方法，需要实验者在不断提高实验技能的基础上去发现、总结。

二、系统误差的修正和限制

应当指出，任何“标准”的仪器也有它的不足之处，要绝对消除系统误差是不可能的。系统误差的修正和限制没有一个普遍通用的方法，只能针对每一个具体情况采用不同的具体措施。下面简单介绍几种典型的限制或消除系统误差的方法。

1.替换法：在测量装置上对待测量进行测量后，立即用一个标准量替换待测量，再次进行测量，并调到同样的情况，从而得出待测量等于标准量。

2.异号法 改变测量中的某些条件,使两次测量中误差一次为正值,另一次为负值,取其平均值。

3.交换法 将测量中的某些条件相互交换(如交换被测物位置),使交换前后产生的系统误差大小相等方向相反，从而抵消了系统误差。例如：用滑线式惠斯登电桥测电阻时，把待测电阻与标准电阻交换位置再次测量，交换前后所得值为 R_{S1} 和 R_{S2} ,则被测电阻 $R_x = \sqrt{R_{S1} \cdot R_{S2}}$,消除了滑线电阻丝不均匀所带来的误差。

4.对称观测法：若有随时间线性变化的系统误差，可将观测程序对某时刻对称地再做一次。例如，一只灵敏电流计零点随时间有线性漂移，在测量读数前记下一次零点值，测量读数后再记一次零点值，取两次零点值的平均值来修正测量值。又如，测电阻温度系数的实验，测电阻前记录一次温度，测电阻后再记录一次温度，取两次平均值作为该点温度值等。

由于很多随时间变化的误差在短时间内均可认为是线性变化，因此，对称观测法是一种能够消除随时间变化的系统误差的好方法。

5.半周期偶数观测法：对周期性误差，可以每经过半个周期进行偶数次观测。例如，分光计刻度盘偏心带来的角度测量误差是以 360° 为周期的,它采取相距 180°的一对游标，每次测量读两个数，则两个角位置之间的夹角是两个游标上分别算出的夹角的平均值。

以上仅仅是列举了几种减小或消除某些简单的系统误差的方法,实际上,许多系统误差的出现,常常是由于实验所用的理论不完善,或理论背后还隐藏着未被发现的某些规律性,历史上不乏先例。系统误差的出现,促使人们去深入研究它,发现新的更精细的规律性。

§ 4 偶然误差的估算方法

一、单次直接测量的误差估计

以仪器最小刻度的一半或仪器误差（仪器出厂检定值）作为绝对误差。有时也可以根据实际情况，采用仪器的最小刻度或某些合理数值作为绝对误差。

以相对误差的形式来反映仪器误差的大小。例如我国将电工仪表分为七个准确度等级，即 0.1;0.2;0.5;1.0;1.5;2.5;5.0。

若已知仪表的级别和量程，仪器误差为 Δx，则

$$\Delta x = \text{级别} / 100 \times \text{量程}$$

需要说明的是，有些情况仪器误差并不能反映测量值误差的大小，如用 0.1 分度的秒表计时，由于人的感官灵敏度的限制与技术上的问题，会造成在‘启动’和‘停止’秒表时所用的时间已超过 0.1s，测量误差大于仪器误差。在实际操作中很多情况需要对误差进行估计。例如秒表误差可估计为 0.2s；使用钢卷尺测较长距离时，误差可估计为 5mm，甚至 10mm 总之，估计误差可根据具体情况综合考虑。

二、多次直接测量的误差

1.最小二乘法原理与算术平均值：在测量条件不变的情况下，对待测物测量了 n 次，结果为 x_1、x_2、…、x_n，这 n 个测量值都带有偶然误差，由于真值 x_0 不知道，误差无法计算。那么从这 n 个测量值中，怎样找出真值的最佳估计值呢？在 1805 年和 1809 年，勒让德和高斯提出了最小二乘法，它是根据“一个等精度测量列的最佳值是能使各次测量值与该值之差的平方和为最小”这一准则提出的。设这个值为 x_0，上述准则可表示为

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2 = \text{最小值}$$

为了求$\Delta\bar{x}$，取 $f(x_0)$的导数，并令其等于零，即

$$\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x_0} = -2\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0) = 0$$

则有

$$x_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = \bar{x} \qquad (1-4-1)$$

这一组数据的算术平均值，就是真值的最佳估计值，所以可用多次等精度测量的算术平均值来表示测量结果。当测量次数无限增加时，算术平均值将无限接近于真值。

2.算术平均误差 $\Delta\bar{x}$ 当重复测量 n 次时，算术平均误差为

$$\Delta\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|}{n} \qquad (1-4-2)$$

它表示对物理量 O所做的任意一次测量，其测量值误差出现在 $-\Delta\bar{x}$ 到 $+\Delta\bar{x}$ 之间的概率为 58% 。这是对测量结果可靠性的一个估计。求出绝对误差后，相对误差为

$$E = \frac{\Delta\bar{x}}{\bar{x}} \times 100\% \qquad (1-4-3)$$

3.标准误差 σ：多次测量的偶然误差也可用标准误差来表示。它是这样定义的：对于 n 次测量中某一次测量值的标准误差为

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \qquad (1-4-4)$$

它表示多次测量中任意一次测量的误差落在 $-\sigma$ 到 0σ 之间的可能性为 68.3%。

4.算术平均值的标准误差：根据误差理论可证明，算术平均值的标准误差是单次测量标准偏差的 $1/\sqrt{n}$ 倍，即

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \qquad (1-4-5)$$

5.极限误差：由于偶然误差的出现服从统计规律，就是说误差出现在某一范围内有一定的概率。可以证明，当误差呈正态分布时，误差落在 $\pm 3\sigma$ 之内的概率为 99.7%，超过 $\pm 3\sigma$ 的概率只有 3‰。在实际测量中，若出现误差为 3σ 的测量值，应予以剔除，称为 3σ 极限误差。

注意当多次测量所求得的误差小于仪器误差时，经常取仪器误差作为测量结果的误差。

例 1　将某一物体的长度用米尺测量 5 次，得到的测量值分别为 x_1◦ 3.41cm; x_2◦ 3.43cm; x_3◦ 3.45cm; $x_4 = 3.44$cm; $x_5 = 3.42$cm，试求测量结果的表达式。

解　算术平均值为

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{5}(3.41 + 3.43 + 3.45 + 3.44 + 3.42)\ (\text{cm})$$
$$= 3.43\ (\text{cm})$$

各次测量的绝对误差为

$$\Delta x_1 = | x_1 - \bar{x} | = | 3.41 - 3.43 | = 0.02\ (\text{cm})$$
$$\Delta x_2 = | x_2 - \bar{x} | = | 3.43 - 3.43 | = 0.00\ (\text{cm})$$
$$\Delta x_3 = | x_3 - \bar{x} | = | 3.45 - 3.43 | = 0.02\ (\text{cm})$$
$$\Delta x_4 = | x_4 - \bar{x} | = | 3.44 - 3.43 | = 0.01\ (\text{cm})$$
$$\Delta x_5 = | x_5 - \bar{x} | = | 3.42 - 3.43 | = 0.01\ (\text{cm})$$

算术平均误差为

$$\Delta\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} | \Delta x_i |}{n} = \frac{1}{5}(0.02 + 0.00 + 0.02 + 0.01 + 0.01) \approx 0.01\ (\text{cm})$$

大致等于米尺的仪器误差，所以测量结果可表示为

$$x = \bar{x} \pm \Delta\bar{x} = (3.43 \pm 0.01)\ \text{cm}$$

相对误差

$$E = \frac{\Delta\bar{x}}{x} = \frac{0.01}{3.43} \times 100\% = 0.3\%$$

三､间接测量误差的估算

直接测量所得的结果都是有误差的，显然由直接测量值经过运算而得到的间接测量

值也有误差。估算间接测量误差的方法称为误差传递。

设待测量 N 是几个独立的直接测量值 $A,B,C,\cdots,H$ 的函数,即

$$N = f(A,B,C,\cdots,H) \tag{1-4-6}$$

若各直接测量值的绝对误差分别为 $\Delta A,\Delta B,\Delta C,\cdots,\Delta H$,则间接测量值的绝对误差为 ΔN,其计算方法如下。

将公式(1-4-6)求全微分,得

$$\mathrm{d}N = \frac{\partial f}{\partial A}\mathrm{d}A + \frac{\partial f}{\partial B}\mathrm{d}B + \frac{\partial f}{\partial C}\mathrm{d}C + \cdots + \frac{\partial f}{\partial H}\mathrm{d}H \tag{1-4-7}$$

由于 $\Delta A,\Delta B,\Delta C,\cdots,\Delta H$ 分别相对于 $A,B,C,\cdots,H$ 是一个很小量,将(1-4-7)式中 $\mathrm{d}A,\mathrm{d}B,\mathrm{d}C,\cdots,\mathrm{d}H$ 用 $\Delta A,\Delta B,\Delta C,\cdots,\Delta H$ 代替,则

$$\Delta N = \frac{\partial f}{\partial A}\Delta A + \frac{\partial f}{\partial B}\Delta B + \frac{\partial f}{\partial C}\Delta C + \cdots + \frac{\partial f}{\partial H}\Delta H \tag{1-4-8}$$

由于具体误差的符号并不知道,为谨慎起见,只能做最不利考虑,认为各项误差将累加,因此将公式(1-4-8)中各项分别取绝对值相加,即

$$\Delta N = \left|\frac{\partial f}{\partial A}\right|\cdot|\Delta A| + \left|\frac{\partial f}{\partial B}\right|\cdot|\Delta B| + \left|\frac{\partial f}{\partial C}\right|\cdot|\Delta C| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial H}\right|\cdot|\Delta H \tag{1-4-9}$$

很明显,这样做会导致测量结果误差偏大。相对误差为

$$E = \frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{f(A,B,C,\cdots,H)} \cdot \left(\left|\frac{\partial f}{\partial A}\right|\cdot|\Delta A| + \left|\frac{\partial f}{\partial B}\right|\cdot|\Delta B| + \left|\frac{\partial f}{\partial C}\right|\cdot|\Delta C| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial H}\right|\cdot|\Delta H|\right) \tag{1-4-10}$$

公式(1-4-9)和(1-4-10)称为误差的传递公式。根据(1-4-9)和(1-4-10)式计算出来的常用误差公式列在表1-1-1中,以供参考。

表 1-1-1 常用误差公式

数学运算关系	误差	
	绝对误差 ΔN	相对误差 $E=\frac{\Delta N}{N}$
1. $N=A+B+C+\cdots$	$(\Delta A+\Delta B+\Delta C+\cdots)$	$\left(\frac{\Delta A+\Delta B+\Delta C+\cdots}{A+B+C+\cdots}\right)$
2. $N=A-B$	$(\Delta A+\Delta B)$	$\left(\frac{\Delta A+\Delta B)}{A-B}\right)$
3. $N=A\cdot B$	$(A\Delta B+B\Delta A)$	$\left(\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta B}{B}\right)$
4. $N=A\cdot B\cdot C$	$(BC\Delta B+CA\Delta A+AB\Delta C)$	$\left(\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta B}{B}+\frac{\Delta C}{C}\right)$
5. $N=\frac{A}{B}$	$\frac{B\Delta A+A\Delta B}{B^2}$	$\left(\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta B}{B}\right)$
6. $N=\alpha A$	$\alpha\Delta A$	$\frac{\Delta A}{A}$(α 是任意常数)

7. $N = A^n$	$nA^{n-1} \cdot \Delta A$	$n \cdot \frac{\Delta A}{A}$
8. $N = \sqrt[n]{A}$	$\frac{1}{n} A^{\frac{1}{n}-1} \cdot \Delta A$	$\frac{1}{n} \cdot \frac{\Delta A}{A}$
9. $N = \sin A$	$\cos A \cdot \Delta A$	$\cot A \cdot \Delta A$
10. $N = \cos A$	$\sin A \cdot \Delta A$	$\tan A \cdot \Delta A$
11. $N = \tan A$	$\frac{1}{\cos^2 A} \Delta A$	$\frac{2\Delta A}{\sin 2A}$
12. $N = \ln A$	$\frac{1}{A} \Delta A$	$\frac{\Delta A}{A \ln A}$

若各个直接测量值的绝对误差分别为标准误差 $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, \cdots, \sigma_H$ 等,则间接测量值 N 的误差估算需要用误差的方和根合成，即绝对误差为

$$\sigma_N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial A}\sigma_A\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial B}\sigma_B\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial C}\sigma_C\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial H}\sigma_H\right)^2} \qquad (1-4-11)$$

相对误差为

$$E = \frac{\sigma_N}{N} = \frac{1}{f(A,B,C,\cdots,H)} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial A}\sigma_A\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial B}\sigma_B\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial C}\sigma_C\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial H}\sigma_H\right)^2} \qquad (1-4-12)$$

公式(1-4-11)和(1-4-12)称为标准误差的传递公式。

误差传递公式不仅可以用来计算间接测量值 N 的误差，而且它还可以用来分析各直接测量值的误差对最后结果误差影响的大小。对于那些影响大的直接测量值，预先考虑采取措施，以减小它们的影响，从而为合理选用仪器和改进实验方法提供依据。

§5 测量的不确定度和测量结果的表述

国家计量局于 1980 年 10 月通过《实验不确定度的说明建议书》，建议用“不确定度”一词取代误差来表示实验结果。

一、直接测量的不确定度估计和结果表述

在将可修正的系统误差修正后，测量值的不确定度 Δ 可近似写成

$$\Delta = \sqrt{\Delta_A^2} \text{ OO} \qquad (1-5-1)$$

(1-5-1)式中 Δ_A 是指用统计方法获得的与随机误差有关的不确定度的 A 类分量。在测量次数 $n > 5$、置信概率约为 95%或更大时,$\Delta A = \sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$ 来代替。ΔB 是指用其他方法估计出的不确定度的 B 类分量。它主要与未定系统误差有关，可取仪器误差 $\Delta_{仪}$ 作为不确定的 B 类分量,即 Δ_B 。$\Delta_{仪}$,则公式(1-5-1)的合成不确定度为

$$\Delta = \sqrt{\Delta_A^2 + \Delta_{仪}^2} \qquad (1-5-2)$$

在同样条件下,对同一物理量进行多次重复测量,测量结果的最佳值为

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

测量结果可表示为

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \qquad E = \frac{\Delta x}{x} \times 100\%$$

或

$$x = \bar{x} \pm \sigma \qquad E = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$$

或

$$x = \bar{x} \pm \Delta \qquad E = \frac{\Delta}{x} \times 100\%$$

二、间接测量的不确定度合成和结果的表述

设间接测量量 N 与直接测量量 $A, B, C, \cdots, H$ 的函数关系为

$$N = f(A, B, C, \cdots, H)$$

用不确定度 Δ 代替 σ,便得到计算间接测量量不确定度 Δ_N 的公式:

$$\Delta_N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial A}\Delta_A\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial B}\Delta_B\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial H}\Delta_H\right)^2} \qquad (1-5-3)$$

相对不确定度的形式

$$\frac{\Delta_N}{N} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial A}\Delta_A\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial B}\Delta_B\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial H}\Delta_H\right)^2} \qquad (1-5-4)$$

当各自变量测量次数都相同时，可采用绝对值合成或用对数求微分的方法求间接测量函数式的不确定度的传播公式,即

$$\Delta_N = \left|\frac{\partial N}{\partial A}\Delta_A\right| + \left|\frac{\partial N}{\partial B}\Delta_B\right| + \left|\frac{\partial N}{\partial C}\Delta_C\right| + \cdots \qquad (1-5-5)$$

$$\frac{\Delta_N}{N} = \left|\frac{\partial \ln N}{\partial A}\Delta_A\right| + \left|\frac{\partial \ln N}{\partial B}\Delta_A\right| + \left|\frac{\partial \ln N}{\partial C}\Delta_A\right| + \cdots \qquad (1-5-6)$$

例 1　杨氏模量 $E = \dfrac{8LDF}{\pi d^2 b \Delta n}$,求其不确定度的传递公式。

解　(1)对积､商函数式取对数

$$\ln E = \ln\left(\frac{8}{\pi}\right) + \ln L + \ln D + \ln F - 2\ln d - \ln b - \ln(\Delta n)$$

(2)再求全微分

$$\frac{dE}{E} = \frac{dL}{L} + \frac{dD}{D} + \frac{dF}{F} - \frac{dd}{d} - \frac{db}{b} - \frac{d(\Delta n)}{\Delta n}$$

(3)改微分符号 d 为 Δ,因取最大值,故 Δ 项的负号一律改为正号。

$$\frac{\Delta_E}{E} = \frac{\Delta_L}{L} + \frac{\Delta_D}{D} + \frac{\Delta_F}{F} - \frac{\Delta_d}{d} - \frac{\Delta_b}{b} - \frac{\Delta_{(\Delta n)}}{\Delta n}$$

(4)不确定度的传递公式为

$$\Delta_E = E\left(\frac{\Delta_L}{L} + \frac{\Delta_D}{D} + \frac{\Delta_F}{F} - \frac{\Delta_d}{d} - \frac{\Delta_b}{b} - \frac{\Delta_{(\Delta n)}}{\Delta n}\right)$$

例 2　已知某空心圆柱体的外径 R O(3.600 ± 0.004)cm,内径 r O(2.880 ± 0.004)cm,高 h O(2.575 ± 0.004)cm ,求体积 V 和不确定度 Δ_V,并写出结果表达式。

解　其体积为 $V=\frac{\pi}{4}(R^2-r^2)h=\frac{\pi}{4}(3.600^2-2.880^2)\times 2.575=9.436(\text{cm}^3)$，利用微分法推出圆柱体体积的不确定度传递公式：

$$\frac{\Delta_V}{V}=\frac{2R}{R^2-r^2}\Delta_R+\frac{2r}{R^2-r^2}\Delta r+\frac{1}{h}\Delta_h$$

$$\Delta_V=\frac{\pi}{2}Rh\Delta_R+\frac{\pi}{2}rh\Delta_r+\frac{\pi}{4}(R^2-r^2)\Delta_h$$

$$=\frac{\pi}{2}\times(0.0374+0.030+0.0013)=0.12$$

则该空心圆柱体测量结果为

$$V=(9.44\pm 0.12)\text{cm}^3$$

为简化计算，大学物理实验中常用例 2 所示来计算间接测量量的不确定度，在间接测量结果中不注明其置信概率。

若能按标准误差的传递公式计算间接测量量的不确定度，且在结果表达式中注明其不确定度的置信概率，则是较为规范的方法。

§6　有效数字及其运算规则

实验的数据记录、数据运算以及实验结果的表达，都应遵从有效数字的规则。有效数字位数与测量误差的大小直接有关，有效数字的位数多，它的相对误差小，反之相对误差就大。

一、有效数字的概念

测量结果的可靠数字(或称准确数字)加上一位可疑数字，统称为测量结果的有效数字。

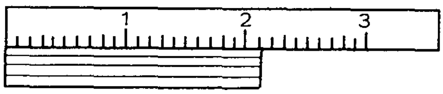

图 1－6－1

例如用米尺测量木棒长（图 1－6－1），可以读出棒长为 2.12cm 或 2.13cm。前两位数 2.1cm 是从米尺主尺整分度数读取的准确读数（即无系统误差)，称之为‘有效’的，最后一位是测量者估读出来的，其数值会因人而异，是一位有疑问的数字，因此它是不确定的，是可疑的，即在这一位数字上是有测量误差的。但这位估读数字反映了测量的客观情况，所以它是‘有效’的。

有效数字概念中必须注意的几个问题：

1.对同一物理量测量的有效数字位数越多，说明测量精度越高。例如 L ◦ 19.40mm，它的最后一位是可疑的，绝对误差为百分之几，相对误差约为千分之几。同理可推断，2 位有效数字测量精度约为十分之几(10^{-1})，3 位有效数字测量精度约为百分之几（10^{-2})，近代对光速的测量已达到 10^{-9}，那么就可以知道光速值有 10位有效数字。实验测量中要严肃对待有效数字的位数，不能随意增加或减少。

2. 换算单位时，有效数字的位数应保持不变。例如38.4mm ◦ 3.84cm ◦ 3.84×10^{-5}km。换算单位时，把数据写成小数点前只有一位有效数字，再乘以 $10^{\pm n}$来表示，这种记数法称

为科学记数法。

3.数字前的“0”在有效数字中无意义，数字后的“0”记为有效数字，不能随意增减。例如 0.01630mm 与 0.0163mm ,前者是 4位有效数字,后者是 3位有效数字,前者的精度要比后者高一个数量级。

二、测量结果的取值与定位

无论是直接测量还是间接测量，结果的绝对误差一般取一位，若仪器的示值误差为两位则取两位，而相对误差可取两位。

由误差来决定测量结果的有效数字，是处理一切有效数字问题的基本依据。

1. 直接测量有效数字的读取：对于直接测量量，一般按下述方法读取有效数字。

(1)对于一般分格的仪器，如直尺，可读至仪器的最小分格的下一位。

(2)已标明精度的仪表，最大误差可按 $\Delta = \frac{\delta}{2}$ 考虑，δ 为仪表精度,如精度为 0.05mm 的游标卡尺，$\Delta x = \frac{0.05}{\delta} \circ 0.03\text{mm}$,读至小数点后第二位,千分尺精度为 0.01mm, $\Delta_0 = \frac{0.01}{2} \approx 0.005\text{mm}$, 读至小数点后第三位。

(3)如天平感量 $\delta = 0.01\text{g}$,则 $\Delta x = 0.005\text{g}$,可估读到小数点后第三位。

(4)已标出准确度等级的仪表,如 0.5 级量程为 15mA 的电表，$\Delta I =$ 量程 $\times$ 级别 $/100 = 15 \times 0.5/100 = 0.075 \circ 0.08\text{mA}$，可读至小数点后第二位。

(5)对于数字式仪表,如数字毫秒计、数字频率计及数字电压表等数字仪表,其误差一般在显示的末位，应读至仪器所显示的末位。

(6)对于一些常数,如 π、e、$\sqrt{2}$等，其有效数字位数可认为无穷多，在运算时可比其他数多取一位进行计算。

2.间接测量量有效数字的取法：间接测量量的有效数字按间接测量的误差来定位。

(1)和差运算：其间接测量量的位数与各分量中小数点后位数最少的相同，即与绝对误差最大的相同。

例 1　设 $A = 12.34, B = 2.6, C \circ 0.255$,求 $N = A + B - C$。

解　$N = A + B - C = 12.34 \circ 2.6 - 0.255 = 12.34 + 2.6 - 0.26 = 14.68$

则 $N = 14.7$

(2) 积商运算：结果与各分量中有效数字位数最少的相同，即与相对误差最大的相同。

例 2　设 $A = 25.821, B \circ 0.0065, C = 2.831$, 求 $N = \frac{AB}{C}$。

解　$N = \frac{25.821 \times 0.0065}{2.831} = \frac{25.8 \times 0.0065}{2.83} = \frac{0.168}{2.83} = 0.0593639575$

最后取齐 $N = 0.059$

例 3　设 $A = 8,654, B = 4.6$,求 $N = A \cdot B$。

解　$N \circ 8.654 \times 4.6 \circ 8.65 \times 4.6 \circ 39.8$(多一位)

例 4　设 $A = 3.98, B = 9,654$,求 $N = A/B$。

解　$N \circ 3.98 \div 8.654 = 0.46$(少一位)

三、测量结果的表达

测量结果的表达式为

$$\begin{cases}(N \pm \Delta N)\ \text{单位} \\ E = \dfrac{\Delta N}{N} \times 100\% \end{cases}$$

注意事项：

1. ΔN 的有效数字位数采取只进不舍的原则，一般只保留一位有效数字，E 在十位数以上可取 2 位。如 $\Delta N \circ 0.23$，进位得 $\Delta N = 0.3$；$E \circ 0.34\%$，进位得 $E \circ 0.4\%$；$E = 10.2\%$，进位 $E = 11\%$。若结果用标准误差或不确定度表示，误差可保留 2 位有效数字。

2. N 的有效数字的取舍，应遵循其最后一位应与 ΔN 的误差位对齐的原则，尾数采取凑偶法来处理。

如 $$87.65 \pm 0.31$$

$\Delta N = 0.31$ 进位取 0.4，其误差位在小数点后一位。

$N \circ 87.65$ 凑偶为 87.6，其误差位亦取在小数点后一位。

即 $$N \pm \Delta N \circ 87.6 \pm 0.4$$

3. 记录或表达数据时，可采取科学记数法，即用 10 的幂来表示。如 235μs 写成 2.35×10^{-4}s。

$N \pm \Delta N = 25.82\text{g} \pm 0.05\text{g}$ 化为毫克并写为科学记数法，则

$$N \pm \Delta N = (2.582 \pm 0.005) \times 10^4(\text{mg})$$

例 5　有一长方形钢片，以米尺测其长为 L，以精度为 0.02mm 的 1/50 游标尺测其宽为 W 以精度为 0.04mm 的千分尺测其厚度为 D，求钢片的体积。

测量数据如表 1-6-1.

表 1-6-1

次数 / 测量	1	2	3	4	5
L(mm)	200.4				
W(mm)	34.28	34.26	34.28	34.28	34.28
D(mm)	2.456	2.462	2.452	2.460	2.450

解　(1)分别求各量的平均值与绝对误差：

L 只测一次，以米尺最小分度的一半定其误差。$\bar{L} = (200.4 \pm 0.5)$mm。

W：求 $\bar{W} = \dfrac{\sum W_i}{n} = 34.272\text{mm}$。数据离散度小，则

$$\Delta_{偶} = \Delta W = \frac{\sum |W_i - W|}{n} = 0.0096\text{mm}$$

而 $\Delta_{仪} = 0.02$mm（仪器误差），比较 $\Delta_{仪}$ 与 $\Delta_{偶}$ 有数量级之差，故取其较大的 $\Delta W = 0.02$mm，于是

$$W = W \pm \Delta 0 = (34.27 \pm 0.02)\text{mm}$$

由 0.02mm定 $\overline{W}$ 的有效数字,由于 7之后是 2,故舍去。

D 求 $\overline{D} = \frac{\sum D_i}{n} = 2.456\text{mm}$,数据较离散，则应求其算术平均值误差，并以极限误差表示测量值 D 的偶数误差,即

$$\Delta_{偶} = 3\sigma = 3\sqrt{\sum(D_i - \overline{D})^2}/\sqrt{n(n-1)}$$
$$= 3 \times 0.00228 = 0.00684 \approx 0.007(\text{mm})$$

由于 $\Delta_{仪} = 0004\text{mm}$,它与 $\Delta_{偶}$ 同数量级,所以仍取 $\Delta_{偶}$。即 $\Delta D = \Delta_{偶} = 0.007\text{mm}$,故 $D = \boldsymbol{D} \pm \Delta D = (2456 \pm 0.007)\text{mm}$。

(2)求结果 $V \pm \Delta V$:

求 V:

$$V = \overline{L} \cdot \overline{W} \cdot \overline{D} = 200.4 \times 34.272 \times 2.456$$
$$= 16868.07521(\text{mm}^3)$$

求 ΔV 取对数

$$\ln V = \ln(L \cdot W \cdot D) = \ln L + \ln W + \ln D$$

求微分后得

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta W}{W} + \frac{\Delta D}{D}$$

$$E = \frac{\Delta V}{V} = \frac{0.5}{200.4} + \frac{0.02}{34.27} + \frac{0.007}{2.456} = 0.005928 \approx 0.59\%$$

$$\Delta V = E \cdot V \approx 1 \times 10^2(\text{mm}^3)$$

$$V = (1.69 \pm 0.01) \times 10^4(\text{mm}^3)$$

§ 7 数据处理的基本方法

物理实验的目的是为了找出物理量之间的内在规律性，或验证某种理论的正确性等。因此，对实验得到的大量数据必须进行正确的处理和分析。数据处理方法是实验方法不可分割的一部分，它是以一定的物理模型为基础，以一定的物理条件为依据的。数据处理问题贯穿在整个物理实验的全过程中,包括记录、整理、计算、分析等。本节主要介绍几种常用的数据处理方法。

一、列表法

在记录和处理数据时，常常将数据列成表格，这样可以简单而明确地表示出测量结果及有关物理量之间的对应关系，便于发现和检查测量结果是否合理，及时发现问题和分析问题，有助于找出有关量之间的依赖关系，确定经验公式等。

数据列表时，常常根据需要将某些中间计算项目列出，这样可以从对比中发现运算是否有错,便于随时检查,以提高运算效率。

列表的要求如下：

1.简单明了，便于看出有关量之间的关系，便于处理数据。

2.标明表中各符号代表的物理量的意义，写明单位。单位写在标题栏中，一般不要重

复地记在各个数字后。

3 表中的数据要正确反映测量结果的有效数字。

4.写明标题，必要时加以说明。

二、作图法

作图可把一系列数据之间的关系或其变化情况用图线直观地表示出来。作图法是研究物理量之间变化规律、找出对应的函数关系、求出经验公式的最常用的方法之一。特别是在有些科学实验的物理量变化规律和结果还没有完全掌握或还没有找出适当的函数表达式时，用作实验曲线的方法来表示出物理量之间的函数关系，常常是一种很重要的方法，并能简便地从曲线上求出实验的某些结果。作图法有多次测量取平均的效果，并易于发现测量中的错误，还可把某些复杂的函数关系简化。

作图的规则：

1.作图一定要用方格纸，画出坐标轴。以横轴代表自变量，以纵轴代表因变量。在坐标轴的末端近旁注明所代表的物理量及其单位，并用括号将单位括住，在图的明显位置写清图的名称。

2.定标尺：对每个坐标轴都要在相隔一定的距离上用整齐的数字来标度，要求：

(1)图上实验点坐标读数的有效数字要与实验数据的有效数字相同。原则上数据中可靠的数字在图中亦是可靠的，数据中有误差的一位，在图中应是估计的，即坐标纸中的一小，格对应数值中可靠数字的最后一位。

(2)横轴和纵轴的标度可以不同。原点也可不取零而取比数据的最小值略小的整数开始标值。同时适当选取单位长度的大小，使图像比较对称地充满整个图纸，而不是缩在一边或一角。

3.描点与连线：用铅笔在坐标图上描点，为使实验点不致被曲线掩盖，应以该点为中心，用○、× ⊙等符号标明。如果图上有两条以上曲线，则应用不同的符号以示区别。连线一定要用直尺或曲线板等作图工具，根据不同的情况，把数据点连成直线或光滑曲线。由于测量存在误差，所以曲线并不一定要通过所有的点，而是要求线的两旁偏差点有较均匀的分布。有些点不在曲线上，是测量误差的表现。校准曲线应以折线相连。

4.求直线的斜率和截距 直线 $y = kx \circ b$,其斜率为 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$,一般可在直角坐标纸上选取所做直线上的两点 $P_1(x_1, y_1)$和 $P_2(x_2, y_2)$,代入上式求得 k。P_1 和 P_2 两点一般不取原来测量的数据点，并且不要相距太近，以减小误差。为了便于计算，x_1和 x_2 两数值可取为整数。其截距 b 为 $x \circ 0$ 时的 y 值。

三、逐差法

逐差法是处理数据常用的一种方法。当函数可以写成多项式形式，即

$$y = a_0 \circ a_1 x \circ a_2 x^2 \circ \cdots \qquad (1-7-1)$$

且自变量 x 是等间距变化时，可以采用逐差法处理数据。

在逐差法求平均值时，不能逐项求差。如，设测量结果为 $y_1, y_2, \cdots, y_{2n}$,若逐项求差再求平均值结果为

$$\Delta = (y_2 - y_1) \circ (y_3 - y_2) \circ \cdots \circ (y_{2n} - y_{2n+1})$$

$$= \frac{y_{2n} - y_1}{2n - 1}$$

所得结果只与始、末数据有关，与中间所测数据无关，并没达到多次测量减小误差的目的。因此，在用逐差法处理数据时一般采用的方法是：将测量结果的偶数个测量数据，分成相等的两组，把两组数据中的对应项逐项求差，然后再求平均值。表示为

$$\Delta y = \frac{(y_{n+1} - y_1) + (y_{n+2} - y_2) + \cdots + (y_{2n} - y_n)}{n} \qquad (1-7-2)$$

利用 (1-7-2) 式处理数据在自变量等间距变化时，可以实现多次测量减小误差的目的。

四､最小二乘法线性拟合

设两变量 x、y 之间满足线性关系，通过等精度测量测得一组数据 (x_i, y_i),其中 $i = 1, 2, \cdots, n$。显 然 x_i, y_i都是有误差的。线性拟合要求首先确定拟合方向，也就是确定误差的主要来源。假定误差主要来自于 y 的测量,而 x 的测量误差很小，可以略去不计。所谓线性拟合，就是要找出一条最佳直线，使线上对应点的坐标 000 $kx_i + b$ 与实验值 y_i相差最小。而 y_i可能比 y_i大,也可能比 y_i小,因此应计算 $\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - y_i)^2$。由于要求偏差的平均和最小，所以称之为最小二乘法线性拟合。下面就把满足此要求的最佳参量 k 和 b 求出来。

$$\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(kx_i + b - y_i)^2$$

用微分法求极值,即将上式分别对 k 和 b 求导,并令其为 0,即

$$\frac{\partial}{\partial k}\sum_{i=1}^{n}(kx_i + b - y_i)^2 = 2\sum_{i=1}^{n}(kx_i + b - y_i)x_i = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\sum_{i=1}^{n}(kx_i + b - y_i)^2 = 2\sum_{i=1}^{n}(kx_i + b - y_i) = 0$$

令 $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n, \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i / n$，则上式可化为

$$k\bar{x}^2 + b\bar{x} - \overline{xy} = 0$$

$$k\bar{x} + b - \bar{y} = 0$$

解之得

$$k = \frac{\overline{xy} - \overline{xy}}{(x)^2 - \bar{x}^2} \qquad (1-7-3)$$

$$b = \bar{y} - k\bar{x} \qquad (1-7-4)$$

用(1-7-3)和(1-7-4)式所求之 k、b 的值作出 $y = kx + b$ 的图像即为最佳直线。

线性拟合也叫线性回归。求出了最佳参量 k 和 b, y 和 x 的函数关系也就惟一地确定了,此函数通常叫做经验公式或经验方程。用线性回归求经验方程,在实验数据的处理上也是常用的。

用最小二乘法不仅能拟合直线，而且也能拟合曲线。实际上不少曲线方程也可以化作直线方程作直线拟合,这个问题在此不作介绍,需要时可参阅有关资料。