绪　论

科学实验是科学理论的源泉，是工程技术的基础，是研究自然规律、认识世界、改造世界的基本手段。作为培养德、智、体、美全面发展的高级工程技术人才的工科高等院校，不仅要使学生具备比较深广的理论知识，而且要训练学生具有较强的从事科学实验的能力，以适应科学技术的不断进步和社会主义建设迅速发展的需要。

一、物理实验课程的地位、作用和任务

物理学是自然科学中最重要、最活跃的带头学科之一。物理学的发展不仅在自身的学科体系内生长和发展出许多新的学科分支，而且还是许多新兴学科、交叉学科以及新技术产生、成长、发展的基础和前导。

物理学是一门实验科学。物理理论和实验的发展，哺育着近代高新技术的成长和发展。物理实验的思想、方法、技术和装置常常是自然科学研究和工程技术发展的生长点。物理实验课是学生进入大学后接受科学实验方法和实验技能训练的开端，本课程对学生进行物理实验理论、物理实验方法和物理实验技能方面的基本训练，使学生初步了解科学实验的主要过程和基本方法。它重点训练学生深入观察物理现象，建立合理的物理模型，定性定量研究变化规律，分析、判断实验结果，激发学生的想像力、创造力和创新意识，在培养和提高学生独立开展科学研究的素质和能力方面具有重要的奠基作用。

在物理学发展的过程中，实验物理形成了自己的一套理论、方法和技术，成为进行各类科学实验的基础。物理实验课是工科高等院校唯一独立设课的必修实践性课程，充分反映了该课的必要性和重要性。

本课程的具体任务是：

1．初步培养学生进行科学实验的能力：

(1) 通过自行阅读实验教材或资料、组织实验，提高阅读和运用资料的能力。

(2）通过实验熟悉常用仪器的原理、结构及使用方法，在进行具体测试中，提高获得准确实验结果的能力。

(3) 通过对实验现象的观察、判断实验结果的数据处理及误差分析，提高理论联系实际的能力。

(4）通过在实验过程中发现问题、分析解决问题，拓宽学生视野，培养创新能力。

(5）通过正确记录及处理实验数据、撰写合格的实验报告，提高正确论述的表达能力。

通过实验，培养学生实事求是、理论联系实际的科学作风，严肃认真、一丝不苟的工作态度，主动研究的探索精神和遵守纪律、爱护公共财物的优良品德。

3.

2．通过实验加深对物理学理论的理解。

总之，通过每一个实验完成规定的测量任务、获取应有的数据是本课程的教学手段，

而目的是培养和锻炼学生进行科学实验的能力并获取实验知识，提高实验技能。

二、实验课的基本程序

1. 实验前准备：了解实验目的，弄懂实验原理，并对所要用的实验仪器的性能、基本工作原理和使用时的注意事项做到心中有数。为此对每个实验中所列的问题应该清楚，在此基础上写出预习报告。预习报告主要应包括实验中要观察的物理现象和需要测量的物理量，并列出实验记录表格。

2. 实验操作： 实验时对所要使用的仪器及工具是否完好和可用应进行检查，经过一定的练习从而能够正确操作。在此基础上正确地组装和调整仪器得以进行实验（包括电路的正确连接、光路的调节等）。实验时一定要先观察现象，通过观察对被验证的定律或被测的物理量有个定性了解，而后再进行精确的测量。测量一定如实地记录数据，有条件可进行重复测量。实验完成后对获得的数据或观察到的现象进行分析，在肯定结果合理后再整理仪器和工具。

3. 写出实验报告，整理和分析所获得的实验数据，从而得出合理的实验结果，并对所得结果进行一定分析。

三、实验课的基本要求

1. 课前预习实验讲义，明确实验目的，了解实验原理，弄清实验步骤，初步了解仪器的使用方法，画好记录表格。未做预习，不得动手做实验。

2. 上课时，首先检查和熟悉仪器，根据操作规程正确安装和调整仪器，然后按实验程序进行实验。

3. 实验时，一定要先观察欲研究的物理现象，在观察的基础上，再对被研究的现象进行定量测量。测量时，应如实及时做好记录（记录要整洁，字迹清楚，避免错记）。不可事后凭回忆“追记”数据，更不可为拼凑数据而将原始记录做随心所欲的涂改。

5. 测量完毕后，要及时整理实验数据，经指导教师检查签字后，方可结束实验。

4. 实验完毕，应把实验仪器整理清点好，注意保持实验室的整洁，经指导教师同意，方能离开实验室。

6. 严格遵守实验室规则，爱护实验仪器。仪器如有损坏，应及时报告教师。凡属学生责任事故者根据情节轻重，要赔偿部分或全部损失。

7. 认真按时完成实验报告。

实验报告是实验的书面总结，报告应用自已的语言表达出：所做的内容；依据的物理思想及反映的物理规律；实验结果及结果的分析；自己对实验的见解及收获。怎样写好一份合格的实验报告，也是实验课的一项重要基本训练。实验报告要在统一的实验报告纸上书写，除填写实验名称、日期、姓名、班级、组别等项外，实验报告的内容一般包括以下部分：

(1) 实验目的任务。

(2) 实验仪器：注明仪器名称 、编号、 主要技术参数，必要时画出仪器简图。

(3) 实验原理：一般只需写出原理概要（包括原理图或测定公式，注明公式中各量的物理意义及适用条件）。

(4）操作要点：根据要求及实际操作过程，写出仪器调节及测量中的关键过程和注意事项。

(5）实验记录：实验数据一般应采用表格形式记录。在预习时，就应设计好记录表格。记录数据时，应特别注意有效数字，并注明测得量的单位。

(6）实验数据处理：包括计算实验结果及其不确定度，给出实验结果的图示等。

(7）实验讨论及作业：对实验结果进行分析讨论，也可对实验中出现的一些现象进行分析总结，并完成课后作业题。

第一章　测量结果的评定及数据处理

第一节　测量及其分类

一、测量（measurement）

在科学实验中，一切物理量都是通过测量得到的，其目的是要获得被测量的定量信息。测量是为了确定被测量的量值，使用专用仪器和量具，通过实验和计算而进行的一组操作过程。

二、直接测量和间接测量

按测量方式的不同，测量可分为直接测量和间接测量两类。

1. 直接测量（direct measurement）（又称简单测量）

用待测量与同量纲的标准量直接进行比较，或者从已用标准量校准的仪器、仪表上直接读出测量值，其特点是待测量的值和量纲可直接得到。例如用米尺、游标卡尺、千分尺测长度，用秒表测时间，用天平称质量，用电流表测量电流等均为直接测量。而相应的被测量——长度、时间、质量、电流等称为直接测量量。直接测量简单、直观，是最基本的测量方式，也是间接测量的基础。

2. 间接测量（indirect measurement）（又称复合测量）

多数物理量不便或不能直接测量，而是依据待测量与直接测量量的函数关系，先测出直接测量量，代入函数关系计算出待测量，这种测量称为间接测量，相应的被测量称为间接测量量。例如在用单摆（simple pendulum）测量重力加速度中，用秒表、米尺分别对周期 T 和摆长 L 进行直接测量，则重力加速度 g 可通过 $g=4\pi^2L/T^2$ 计算出来，T、L 是直接测量量，g 是间接测量量。

当然，一个物理量是直接测量量还是间接测量量并不是绝对的，要由具体测量的方法和仪器来确定。例如用伏安法测电阻时，电流、电压是直接测量量，电阻是间接测量量；用欧姆表测量时，电阻又成了直接测量量。

三、等精度测量和非等精度测量

根据测量条件的不同，测量又分为等精度测量和非等精度测量。

1. 等精度测量

等精度测量是指在相同测量条件下对同一物理量所做的重复测量。例如，在相同的环境下，由同一个测量人员，用同样的仪器和方法，对同一个待测量，作相同次数的重复测量。由于各次测量的条件相同，测量结果的可靠性是相同的，没有理由认为哪次测量更精确或不精确，所以每次测量的值是等精度的。

应该指出，要使测量条件完全相同、绝对不变是难以做到的，一般测量实践中（包括物理实验），一些条件变化很小，或某些次要条件变化后对测量结果影响甚微，一般可按等精度测量处理。

2 非等精度测量

在科学研究和其它高精度测量中，为了得到更精确更可靠的结果，特意要在不同的条件下，用不同的仪器、不同的测量方法，由不同的测量人员对同一个待测量进行测量和研究。此时，由于测量条件全部或部分发生了明显变化，每种测量的可靠性、精确度显然不同，这种测量即为非等精度测量。而最后的测量结果，是通过待测量的各种非等精度测量结果的加权处理来获得。

第二节　误差及其分类

一、误差(error)的定义

具有各种特性的物质是客观存在的。反映物质特性的物理量，在一定的条件下，相应有一个确定的客观真实值，这个值在测量上称为物理量的真值。测量者的主观愿望总是希望十分准确地得出物理量的真值。然而，任何实际测量总是在一定环境下，以一定的方法，用一定的仪器，由一定的人员去完成。由于测量环境不理想，测量方法不完善，仪器设备不精密，而且受测量人员技术、经验和能力等因素的限制，使得任何测量都不会绝对精确。测量值与真值之间总有一些差别，这种差别称为测量值的误差。任何测量都有误差，误差贯穿于测量的全过程。

某一物理量的误差，定义为该量的测量值 x 与真值（true value）μ 之差，即

$$\varepsilon_x = x - \mu \tag{1-1}$$

误差可正（$x>\mu$），也可负（$x<\mu$），它反映了测量值偏离真值的程度。误差越小两者越接近。所以，误差的大小标志着测量结果的可靠程度或可信程度的大小。

误差按其表达方式的不同，可分为绝对误差（absolute error）和相对误差（relative error）。

ε_x 表示测量值偏离真值的绝对大小，称为绝对误差。一般来说，绝对误差并不能反映误差的严重程度。所以引入相对误差 E_x 来反映误差的严重程度，它表示误差所占真值的百分比。定义为

$$E_x = \frac{|\varepsilon_x|}{\mu} \times 100\% \tag{1-2}$$

由于真值未知，误差又不可避免，所以测量的目的应当是在给定的条件下，尽可能得到最接近于真值的测量值，并对它的精确程度给予正确的评价。误差理论就是为适应这一需要而发展起来的。误差理论可以帮助我们正确地组织实验和测量，合理地设计实验方案，选用仪器和测量方法，使测量的误差减至最小，获得最好的结果，并定量地判断结果的可靠性。

二、误差的分类

根据误差的来源、性质和特点，一般将误差分为系统误差、随机误差和粗大误差。

1. 系统误差（systematic error）

在相同的条件下，对同一物理量进行多次测量，测量值总是向一个方向偏离真值，误差的大小和正负保持恒定；或者误差按一定规律变化。这种误差称为系统误差，前一类叫恒定系统误差，后一类叫可变系统误差。可变系统误差按其变化规律，又可分为线性系统误差、周期性系统误差等。

系统误差又可分为可修正系统误差（已定系统误差）和不可修正系统误差（未定系统误差）。凡是大小和符号确定的系统误差称为可修正系统误差，如千分尺、电表的零位误差，伏安法测电阻时的接表误差。实验者根据它产生的原因、大小和符号对测量结果进行修正即可消除它的影响。只能估计出大小而不能确定其符号的系统误差称为不可修正系统误差，如某些仪器的仪器误差。

实验中的系统误差主要来源于以下几个方面：

(1)仪器误差

仪器误差是由仪器本身固有的缺陷、校正不完善或使用不当引起的。如天平的不等臂、刻度不均匀、祛码实际质量与标称值不等、电表刻度盘与指针转轴安装偏心等引起的误差属前者。而仪器和量具不在规定的使用状态，如不垂直、不水平、零点不准、电表要求水平放置但却垂直放置测量等引起的误差均属后者。前者是由仪器、量具自身带来的系统误差，使用时应尽量消除或修正；而后者则应当避免。

(2)方法误差

方法误差是由计算公式的近似、没有完全满足理论公式所规定的实验条件，或因测量方法的不完善所带来的误差。例如用单摆测重力加速度时，公式 $g=4\pi^2L/T^2$ 仅适用于 $\sin\theta\approx\theta$ 的近似条件，当摆角较大时会产生较大的误差；用伏安法测电阻时，忽略了电表内阻的影响等。

(3)环境误差

由于仪器所处的外界环境如温度、湿度、光照、气压、电磁场等与仪器要求的环境条件不一致引起的误差。如 20℃时标定的标准电池在 30℃时使用。

(4)人员误差

这是由于观测者心理、生理条件以及其它个人因素造成的误差。它跟个人的反应速度、分辨能力、固有习惯以及实验技能有关。例如按停秒表时总是超前或滞后；读数时头总是偏向一边。

从理论上讲，系统误差可以通过分析研究其产生的原因，采取一定的方法减小或消除，或按其规律对测量结果进行修正。但事实上，发现和消除系统误差是一个极其复杂的问题，常常成为实验结果是否可靠的主要矛盾。因此这是实验者应努力去解决的问题。

2. 随机误差（stochastic error）

在测量中，即使系统误差消除后，对同一物理量在相同条件下进行多次重复测量，仍然不会得到完全相同的结果，其测量值分散在一定的范围之内，所得误差时正、时负，绝对值时大、时小，呈无规则的涨落，这类误差称为随机误差。

随机误差是由测量过程中的一些随机的或不确定的因素引起的。如人的感官灵敏度及仪器精密度有限、不可控制的周围环境的干扰以及随测量而来的其它不可预测的随机因素的影响等。由于实验中随机因素很多，再加上各种因素又相互混杂，不能确定各个因素的影响大小，因此，随机误差既不能消除也无法控制。

从一次测量来看，随机误差是随机的，没有确定的规律，也不能预知。但当测量次数足够多时，随机误差服从一定的统计分布，所以人们无需了解各种因素的具体细节，可以用统计方法来研究诸因素的综合作用。

系统误差与随机误差性质不同、来源不同、处理方法不同，在实验中两者往往是并存的。对测量结果的影响，有时系统误差为主，有时随机误差为主。因此，对每一个实验要作具体分析，采用相应的处理方法。

3粗大误差(gross error)

凡是明显歪曲测量结果，又无法根据测量的客观条件作出合理解释的误差，都称为粗大误差，简称粗差。含有粗差的测量值称为坏值（异常值）。

产生粗差的原因是多方面的。由于测量者缺乏经验、粗心大意或过于疲劳而造成测错、读错、记错、算错等过失，是产生粗差的主要原因（亦称疏失误差）；此外，外界的突发性干扰，使实验条件发生不能允许的偏离而未被发现，或者由于实验条件尚未达到预定条件而匆忙测量，也都会造成粗差。对实验者来说，粗差必须避免。

三、测量的正确度、精密度和准确度

1. 正确度（validity)

表示测量值与真值的接近程度，正确度高表明系统误差小。

2精密度(precision)

表示多次重复测量时所得各测量值的离散程度，精密度高说明数据比较集中，随机误差小。

3. 准确度（accuracy)

表示系统误差和随机误差的综合结果，准确度高，说明系统误差和随机误差都小，测量数据均集中在真值附近。所以，人们所期望的是准确度高的测量结果。

从图 1-1中可以形象地理解这些概念：(a)精密度好，但正确度差，系统误差大；(b)准确度高；(c)正确度和精密度均差。

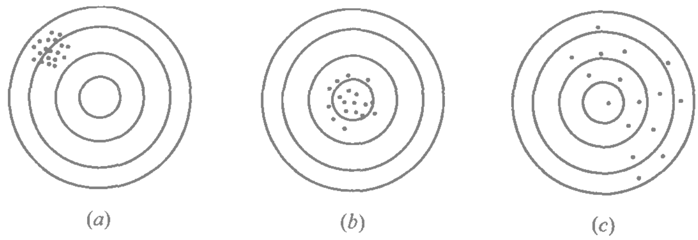

图 1-1 中靶记录

正确度、精密度、准确度只是对测量结果作定性评价，有时不严格区分这“三度”，而泛称为“精度(trueness)”。

第三节　系统误差的发现与消除

系统误差分为已定系统误差和未定系统误差两类。在实验中必须尽可能地消除或减小已定系统误差。实际测量中，许多情况下系统误差往往对测量结果起主要影响作用。因此，寻找系统误差并设法消除或减小它的影响是提高测量准确度的关键。从理论上讲，系统误差具有确定的规律，但它可能隐含在测量过程的每一步之中，当测量仪器较复杂时，各测量装置的相互干扰也会产生附加系统误差。所以，系统误差的处理是较困难的，必须对实验过程的每一步进行分析，一般与实验者的经验、学识和技巧有着密切的关系，因此，在物理实验的学习过程中，一定要注意这方面知识的积累。下面就简单常用的发现和消除系统误差的方法加以介绍。

一、发现系统误差的方法

1. 理论分析的方法

在测量之前，首先对实验原理、测量方法和仪器进行系统全面的分析。

（1）注意测量公式成立的条件

测量公式是进行实验的依据，所以测量的每一步必须满足公式的条件。在实验中，往往花费较长的时间调节仪器，通常都是为了达到计算公式的要求。否则，在不满足公式条件下测量的数据带入计算，肯定得不到正确的结果。如利用成像法测量透镜焦距实验中，首先必须进行共轴等高调节，其目的是为了满足成像公式成立的条件：旁轴近似。用单摆测重力加速度时，公式 $g=\dfrac{4\pi^2 L}{T^2}$ 只有在摆角 $\theta<5^\circ$ 时才近似成立，所以测量过程中该条件必须满足。

在伏安法测电阻实验中，电流表内接和电流表外接均会产生系统误差，通过分析可知，内接产生正的系统误差，外接产生负的系统误差；当待测电阻、电流表内阻、电压表内阻三者满足一定条件时，可使系统误差减小；当电流表内阻和电压表内阻已知时可修正系统误差。

（2）注意仪器的使用条件

任何仪器都有各自的使用状态和环境条件，必须达到这些条件才能得到正确的结果。使用状态由实验者按照仪器的规定调节，如必须调节天平水平和平衡后才能进行称量。而环境条件应满足仪器的要求，当不满足时，应进行修正，如标准电池标明 20℃时的电动势，当夏天或冬天使用时，必须测出环境温度，并按公式修正。

在实验教学中，经常发现一些同学只注重结果（测出数据），而忽略了实验过程（仪器调节等环节），往往得到的数据是非正常状态的产物。这只能说完成了任务，并没达到真正的教学要求。测数据只是手段，而非目的，只有重视全过程，才能真正提高动手、分析问题和解决问题的能力。

2. 实验对比的方法

对比法是对可能产生系统误差的诸因素进行不同条件的测量，以发现系统误差的存在。

(1)实验方法的对比

用不同的方法测量同一个物理量，在随机误差允许的范围内对比两个结果，如不一致，则表明至少一种方法存在系统误差。

(2)仪器对比

对同一个待测物理量，用不同精度的仪器测量。如用两个电流表同时接入同一电路，若它们的读数不同，则说明一个表存在系统误差。当一个表是标准表时，则可以找到另一表的修正值。

(3)测量条件对比

在测量中，常常使测量过程按正、反两个方向进行。如测物体的变形时，通过加砝码和减砝码两个过程，可以发现物体是否是完全的弹性变形。天平调节平衡后，将物和砝码对调，若天平不再平衡，说明存在不等臂系统误差。同一条件下，使冲击电流计左偏和右偏，则可发现冲击电流计偏转不对称的系统误差。

(4)人员对比

其它条件均不变的情况下，不同人员测量可以发现人员误差。

3. 数据分析的方法

将同一条件下的多次测量数据按测量顺序排列，观察其变化，当数据呈现规律性的变化时，表明存在系统误差。

二、系统误差的消除方法

系统误差的消除必须以它的产生原因为依据。首先在实验中必须满足测量公式成立的条件，同时调节仪器达到正确的测量状态，并满足对环境条件的要求。对于一些已定系统误差，可以采用特殊的测量方法或仪器的特殊设计来消除。

1. 替代法

在相同的测量条件下，用已知量（可变的标准器）替代待测量，调节已知量使替代前后产生的测量状态完全相同，则已知量的大小为待测量的值。如用天平测质量时，在右盘放待测物，左盘放中介物（一般用干净细砂），改变中介物的量使天平平衡。去掉右盘的待测物，用砝码（已知量）替代，增减砝码使天平再次平衡，则砝码质量为待测物的质量。这种测量方法可以消除天平的不等臂系统误差。再如将待测电阻 RX接入电路后使回路有一确定的电流 I，去掉待测电阻，代之以一电阻箱，在电路状态不变的条件下，调节电阻箱使回路中的电流再次为 I，则电阻箱的示值即为待测电阻值 RX，该方法也可以消除伏安法测电阻时的接表误差。

2. 交换法

交换待测物的测量位置，使产生的系统误差对两次测量值的影响相反，从而抵消系统误差。如天平的交换测量可以消除不等臂系统误差。在电桥实验中，交换待测电阻和比较电阻的位置，可以消除由于比例臂电阻不准及接线不对称所产生的系统误差。

3. 异号法

在测量中使已定系统误差改变符号，取平均值即可消除系统误差。如霍耳效应测磁场实验中，使通过霍耳片的工作电流大小不变，方向相反，将两次测量值平均，即可消除不等位电势。在冲击电流计实验中，改变电流方向，使电流计向左右两个方向偏转，

将两次测量值平均即可消除零位漂移及偏转不对称引起的系统误差。

第四节　随机误差的统计分布

原则上讲，系统误差可以通过分析其产生的原因加以消除或减小，而随机误差不可避免，所以必须对其大小进行估算。为了简化问题，在分析随机误差时假定系统误差已经完全消除。

随机误差的特点是不可预见和不可控制。但研究表明，当等精度测量次数足够多时，测量值和随机误差服从统计规律。影响随机误差的因素是多种多样的，根据产生的原因不同，随机误差有多种分布形式。在物理实验中，常见的有正态分布和均匀分布。

一、正态分布(normal distribution)(高斯分布 Gaussian distribution)

1. 正态分布的概率函数和性质

在同一条件、无限多次测量的情况下，测量值 x 的正态分布函数是连续的，如图 1–2 所示，其概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{1–3}$$

式中，拜和 6 是正态分布的两个参量；u 与分布曲线的峰值相对应，是待测量的真值；σ 是曲线拐点处的横坐标，称为标准误差，也称标准差；x 为随机变量（实验测量值）。当 μ 和 σ 给定后，这个正态分布就完全确定了。

根据误差的定义式（1–1），x–μ =ε 是误差,所以,误差 ε 的正态分布(见图 1–3)为

$$\psi(\varepsilon)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}} \tag{1–4}$$

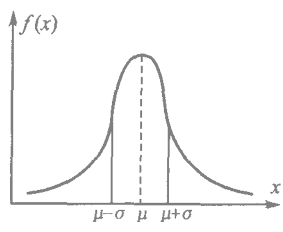

图 1-2　测量值的正态分布

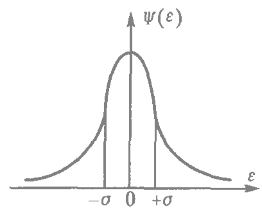

图 1-3　误差的正态分布

ψ(ε)是误差 ε 的概率密度(probability density)函数,它表示误差出现在 附近单位区间的概率。根据概率密度的归一化条件(normalization condition),ψ(ε)曲线下的面积是 1(误差在［-∞，+∞］区间的概率是 1），所以，σ 越小，曲线越徒，峰值越高，说明随机误差比较集中，绝对值小的误差占优势，也说明测量值的离散性小，重复性好。因而 σ 的大小反映了测量值的集中程度，也反映了误差的大小。

误差在区间[－σ,＋σ]内出现的概率为

$$p=\int_{-\sigma}^{+\sigma}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\varepsilon=0.683 \tag{1-5}$$

通过计算可得到，误差出现在 $\pm2\sigma$ 区间内的概率为 0.954，出现在 $\pm3\sigma$ 区间内的概率为 0.997。把 σ 称为一倍标准差，2σ、3σ 分别称为二倍、三倍标准差。这些区间称为置信区间，测量误差在置信区间出现的概率称为置信概率。置信概率随置信区间的变化而改变，增大置信区间，测量误差出现的置信概率也增大，当置信区间增大到对应的置信概率接近 1 时，说明误差一定出现在该置信区间内，把它称为极限误差，简称误差限。

从以上也可以看出，在正态分布中，将误差限 3σ（对应概率近似为 1）除以常数 $C=3$，即得到对应概率为 0.683 的误差 σ。

(1) 测量坏值的剔除

测量误差在 $\pm3\sigma$ 区间内出现的概率为 0.997，说明在 1000 次测量中，只有 3 次测量值的误差的绝对值可能超过 3σ。物理实验中测量次数一般不超过 10 次，所以可以认为绝对值大于 3σ 的误差的可能性极小。若发现测量值列中某个值的误差的绝对值大于 3σ，则认为它是某种非正常因素产生的“坏值”，应予剔除，称为“3σ 准则”，该准则只适用于正态分布。

(2) 正态分布的性质

单峰性：误差为 0 处的概率密度最大，即绝对值小的误差出现的概率大于绝对值大的误差出现的概率。

对称性（抵偿性）：绝对值相等的正、负误差出现的概率相等，代数和是 0。

有界性：在一定的测量条件下，误差的绝对值不超过一定限度。

2. 多次重复测量的最佳估计值

一个物理量的真值是未知的，测量者总是想得到真值，但实际上是不可能的。当对物理量 x 进行 n 次重复测量时，由正态分布可见，正、负误差出现的概率相等，代数和近似为 0，所以，测量值的算术平均值

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{1-6}$$

$\bar{x}$ 最接近真值，称它为真值的最佳估计值。

二、标准误差(standard error) 的计算

理论计算得到，当测量次数 $n\to\infty$ 时，标准差 σ 为

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}\quad (n\to\infty) \tag{1-7}$$

而实际的测量次数是有限的，且真值未知，所以，σ 也无法计算，理论研究表明，在有限的 n 次测量中，σ 的估计值为

$$s_x=t_{\mathrm{p}}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \tag{1-8}$$

s_x称为某次测量值的标准偏差(standard deviation)，t_p 是由测量次数决定的修正系数，它的取值与置信度和测量次数有关。置信概率为 0.683 的 t_p 值如表 1-1 所列。

表 1-1　不同测量次数的 t_p值（置信概率 0.683）

n-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	∞
t_p	1.84	1.32	1.20	1.14	1.11	1.09	1.08	1.07	1.06	1.05	1.04	1.03	1.02	1.01	1

实际上，平均值 $\bar{x}$ 也是一个随机变量，它比每一个测量值都接近真值，它的标准偏差为

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = t_p \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \tag{1-9}$$

三、均匀分布（rectangular distribution）

误差的均匀分布如图 1-4 所示，其概率密度为

$$\psi(\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\Delta} & -\Delta \leqslant \varepsilon \leqslant +\Delta \\ 0 & \varepsilon < -\Delta \ , \varepsilon > +\Delta \end{cases} \tag{1-10}$$

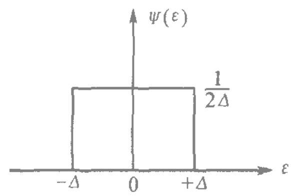

图 1-4　均匀分布

Δ是均匀分布的误差限。设在区间 $[-\Delta', +\Delta']$的概率是 0.683，则有 $2\Delta' \cdot 1/2\Delta=0.683$ ，即

$$\Delta' = \frac{\Delta}{\frac{1}{0.683}} = \frac{\Delta}{1.46} \tag{1-11}$$

上式说明，在均匀分布中，将误差限Δ（对应概率为 1）除以常数 C=1.46，即得到对应概率为 0.683 的误差Δ'。

第五节　测量结果的不确定度评定

一、不确定度（uncertainty）的概念

不确定度表示由于测量误差的存在而对被测量值不能确定的程度。它是被测量的真值在某个量值范围的一个评定。

不确定度是真值附近一个范围的估计值，真值以一定的概率落在其中。不确定度包含多个分量，在可修正的系统误差修正以后，将余下的全部误差按产生原因及计算方法不同分为两类：

A类：在同一条件下的多次测量值，按统计方法计算的误差分量，用 s 表示。

B类：由测量仪器、测量条件、环境等其它原因产生的误差分量，用 u表示。

二、直接测量量的不确定度计算及结果表示

对直接测量量 x而言，其不确定度由 A类分量和 B 类分量的合成而来。

1．A 类分量的估算

A 类分量是由统计方法估算的，用 s表示。设对 x进行了 n次测量，其 A 类分量值

为式（1-9），即

$$s = s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = t_p\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} \tag{1-12}$$

本课程教学中，t_p值根据测量次数 n 从表 1-1 中确定（置信概率为 0.683）。

2. B 类分量的估算

B 类分量是非统计方法计算的误差分量，它由测量仪器的误差限和该误差的分布来决定。具体的估算方法为：

(1) 根据仪器的说明书、国家标准，或由测量条件合理的估计测量误差限Δ（对应的置信概率为 1）。

(2) 确定该误差的分布形式，在不能确定分布的情况下，近似按均匀分布处理。

(3) 将误差限Δ（对应的置信概率为 1）除以置信因数 C 换算成一倍标准偏差对应的置信概率下的误差（P=0.683）。即不确定度的 B 类分量为

$$u = \frac{\Delta}{C} \tag{1-13}$$

对于正态分布 C=3；均匀分布 C=1.46。

为了统一教学，便于使用，本课程教学中的几种常用仪器的误差限取为：

①螺旋测微器（micrometer caliper）(千分尺)：根据国家标准，在正确使用条件下，一级千分尺在测量范围 0～100 mm，其示值误差限为Δ=0.004mm。

②游标卡尺（vernier caliper）：根据国家标准，在测量范围 0～300 mm，示值误差限Δ=分度值，如 50 分度的卡尺，Δ=0.02mm 。角游标也仿照此方法处理。

③米尺（metre rule）：考虑到测量者的读数误差，取Δ=0.5mm。

④物理天平(physical balance)：根据不同的测量精度，天平分为 10 级，物理实验室常用的 WL-1 型物理天平为 9 级，其感量为 0.05g。天平所用砝码分为 5 个等级，一般与 WL-1 配用的砝码为 4 等。严格来讲，B 类不确定度既要考虑天平的误差，也要考虑使用的每个砝码的误差。教学中综合取为Δ=0.05g。

⑤秒表（stopwatch)：常用的电子秒表可以测量到 0.01s，但测量者在起始和末了的两次按表时会产生从判断到动作的人为误差，考虑该因素，取Δ=0.2s。

⑥电表：实验室所用的电流表（ammeter）和电压表（voltmeter），根据其测量精度不同，分为 7 个等级，每个电表的等级标在表盘的右下角，若电表级别为 a，Δ=量程×a%。

⑦电阻箱（resistance box)：电阻箱分为 5 个级别，若级别为 a，一般Δ=示值×a%。实验室常用的 ZX-21 电阻箱为 0.1 级，ZX-35 电阻箱为 0.2 级。

以上仪器误差的分布形式如表 1-2 所列。

表 1-2　部分仪器的仪器误差分布

仪器名称	千分尺	游标卡尺	钢板尺	物理天平	秒表	电表	电阻箱
误差分布	正态分布	均匀分布	正态分布	正态分布	近似均匀分布	近似均匀分布	近似均匀分布

部分仪器可以根据说明书确定误差限。在分布形式未知的情况下，近似按均匀分布处理。

例如，一个量程为 100mA、级别是 1.0 的电流表，其误差限为Δ=100×1.0%=1mA，B 类分量为 u=1/1.46=0.7mA。

3. 总不确定度

A 类分量和 B 类分量相互独立，且在同一置信水平，则 x 的总不确定度为

$$u_x = \sqrt{s^2 + u^2} \tag{1-14}$$

4. 直接测量结果的表示

直接测量结果表示为

$$\begin{cases} x = \bar{x} \pm u_x \text{（单位）（}P\text{=0.683）} \\ E_x = \dfrac{u_x}{\bar{x}} \times 100\% \end{cases} \tag{1-15}$$

u_x为绝对不确定度，E_x为相对不确定度。上式的物理意义表示被测量 x 的真值在 $\bar{x} \pm u_x$ 置信区间内出现的概率是 0.683。

综上所述可知，直接测量量的数据处理过程为：

(1) 同一条件下多次重复测量时

①修正系统误差；

② 计算 $\bar{x}$、一次标准偏差 s_x。用 3 s_x检验测量数据中有无坏值，若有，剔除坏值后重新计算 x；

③ 计算 A 类分量 $s_{\bar{x}}$，置信概率按 0.683 ；

④ 计算 B 类分量，置信概率按 0.683 ；

⑤ A 类、B 类分量合成，测量结果表示。

(2)一次测量时

在实际测量中，有些物理量由于条件的限制不可能进行多次重复测量；或待测件很规范，其可能的 A 类分量几乎为 0，多次测量意义不大；或有些量不必进行多次重复测量。此时测量一次即得到结果，其数据处理过程为：

①修正系统误差；

②计算 B 分量，置信概率按 0.683。将 B 分量作为一次测量结果的不确定度。

③测量结果表示。

说明：绝对不确定度 u_x 一般取 1 位或 2 位有效数字（按宁大勿小原则），相对不确定度 E_x 取 1 位或 2 位有效数字。平均值的末位与不确定度末位对齐。

三、间接测量量的不确定度估算

在物理实验中，绝大部分是间接测量，每个直接测量量的不确定度均要传递给间接测量量。设间接测量量为 $N = f(x, y, z)$，x、y、z 是相互独立的直接测量量。并且有 $x = \bar{x} \pm u_x; y = \bar{y} \pm u_y; z = \bar{z} \pm u_z$，$u_x$、$u_y$、$u_z$ 是每个直接测量量的合成不确定度。

1. 间接测量结果的最佳值

把直接测量量的最佳值 $\bar{x}$、$\bar{y}$、$\bar{z}$ 代入函数关系中，得到 N 的最佳值为

$$\overline{N} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \tag{1-16}$$

2. 间接测量结果的不确定度估算

间接测量结果的不确定度是由各直接测量量的不确定度传递产生的，其大小可以根据数学上的偏微分求出来，N 的总不确定度为

$$u_N=\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 {u_x}^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2 {u_y}^2+(\frac{\partial f}{\partial z})^2 {u_z}^2} \tag{1-17}$$

相对不确定度可用下式求得

$$E_N=\sqrt{(\frac{\partial \ln f}{\partial x})^2 {u_x}^2+(\frac{\partial \ln f}{\partial y})^2 {u_y}^2+(\frac{\partial \ln f}{\partial z})^2 {u_z}^2} \tag{1-18}$$

常用函数的不确定度传递公式如表 1-3 所列。由表中可看出，对于和差函数，用式（1-17）计算绝对不确定度较简便；而乘、除、乘方等函数用式(1-18）计算相对不确定度较简便。

3. 间接测量结果的表示

间接测量结果的表示与直接测量结果的表示类似，表示方式为

$$\begin{cases} N=\overline{N}\pm u_N \text{（单位）} \\ E_N=\dfrac{u_N}{\overline{N}}\times 100\% \end{cases} \tag{1-19}$$

说明：

① u_N一般取 1 位或 2 位有效数字，$\overline{N}$ 与 u_N在小数点后对齐，对齐时 $\overline{N}$ 的末位按四舍六入、逢五凑偶的原则；E_N 取 1 位或 2 位有效数字。

②结果表达中的 E_N应用取位后的绝对不确定度 u_N和测量值 N 计算获得，使得结果表示中的数学计算前后一致。

③当计算的数值很大或很小，但其有效位数不多时，为了不影响有效位数，又使结果简单明了，常用乘 10^k的方法，一般 k 是 3 的倍数。如 0.00253±0.00002 可表示为(2.53±0.02)×10^{-3}。

表 1-3　常用函数的不确定度传递公式

函　数	绝对不确定度	相对不确定度
$N=x\pm y$	$u_N=\sqrt{{u_x}^2+{u_y}^2}$	$E_N=\dfrac{u_N}{N}=(\sqrt{{u_x}^2+{u_y}^2})/N$
$N=xy$	$u_N=\sqrt{y^2{u_x}^2+x^2{u_y}^2}$	$E_N=\dfrac{u_N}{N}=\sqrt{(\dfrac{u_x}{x})^2+(\dfrac{u_y}{y})^2}$
$N=x/y$	$u_N=\dfrac{x}{y}\sqrt{(\dfrac{u_x}{x})^2+(\dfrac{u_y}{y})^2}$	$E_N=\dfrac{u_N}{N}=\sqrt{(\dfrac{u_x}{x})^2+(\dfrac{u_y}{y})^2}$
$N=kx$（k 为常数）	$u_N=ku_x$	$E_N=E_x=\dfrac{u_x}{\overline{x}}$
$N=x^a$	$u_N=ax^{a-1}u_x$	$E_N=a\dfrac{u_x}{\overline{x}}=aE_x$
$N=\ln x$	$u_N=\dfrac{1}{x}u_x$	$E_N=\dfrac{1}{x\ln x}u_x$

例：测量圆柱体的密度，直径 D 用千分尺测量，长度 L 用 50 分度的游标卡尺测量，质量 M 用 WL-1 物理天平测量，且 D 多次测量，L 和 M 各为一次测量。求待测圆柱体的密度，并完整表示测量结果。

实验数据如下：

L：45.24mm　　　　M：10.85g

D**：千分尺的零读数为＋**0.006mm，10 **次测量值为（单位：**mm）

6.253	6.250	6.249	6.251	6.252	6.254	6.251	6.250	6.248	6.253

解：（1）**各直接测量结果的计算**

L、M **均为一次测量值，只考虑** B **类分量。由于是一次测量，其不确定度只有** B **分量，对于** 50 **分度的游标卡尺，**u_L=0.02/1.46≈0.02mm　**。有**

$$L=(45.24\pm0.02)\ \mathrm{mm}\qquad E_L=0.044\ \%$$

对于 WL-1 物理天平，$u_M=0.05/3\approx0.02$g。有

$$M=(10.85\pm0.02)\ \mathrm{g}\qquad E_M=0.18\%$$

D 的平均值为 6.251 mm，修正系统误差后有

$\overline{D}=6.251-0.006=6.245\ \mathrm{mm}$　测量 10 次，t_p=1.06

其 A 分量为式（1-12）

$$s=s_{\overline{D}}=t_p\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{10}(D_i-\overline{D})^2}=0.001\ \mathrm{mm}$$

B 分量：对于千分尺Δ_D=0.004 mm，$u=\Delta_D/3$=0.002 mm

合成不确定度为

$$u_D=\sqrt{0.001^2+0.002^2}=0.002\,\mathrm{mm}$$

所以

$$D=(6.245\pm0.002)\,\mathrm{mm}\qquad E_D=0.032\ \%$$

(2) 密度 ρ 的计算

密度的计算公式为：$\rho=\dfrac{4M}{\pi D^2L}$

$$\overline{\rho}=\frac{4\times10.85\times10^{-3}}{3.1416\times6.245^2\times10^{-6}\times45.24\times10^{-3}}=7.830\times10^3\ \ \mathrm{kg/m^3}$$

由于计算公式是乘、除、乘方关系，用相对不确定度传递公式方便

$$E_\rho=\frac{u_\rho}{\overline{\rho}}=\sqrt{(\frac{u_M}{M})^2+4(\frac{u_D}{D})^2+(\frac{u_L}{L})^2}=0.002$$

$$u_\rho=\overline{\rho}\times E_\rho=7.830\times10^3\times0.002=0.016\times10^3\,\mathrm{kg/m^3}$$

最后结果为

$$
\begin{cases}
\rho = (7.83 \pm 0.02) \times 10^3 \quad \mathrm{kg/m^3} \\
E_\rho = \dfrac{0.02}{7.83} \times 100\% = 0.26\%
\end{cases}
$$

对误差及不确定度评定总结如图 1-5 所示。

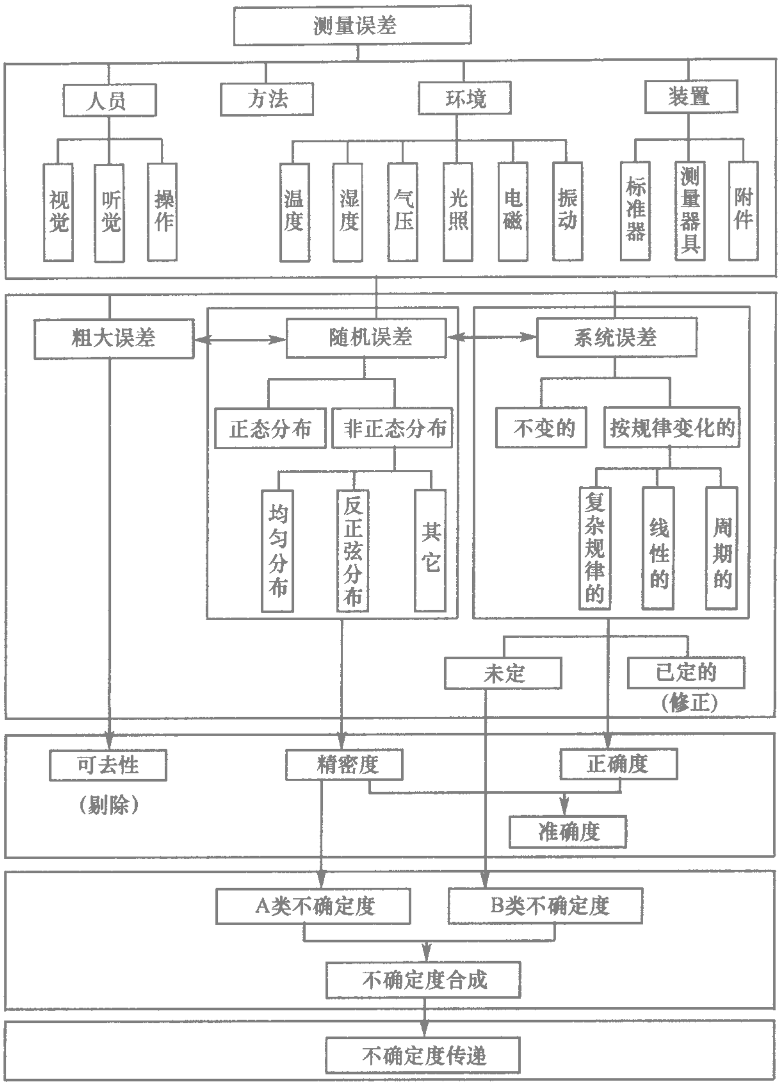

图 1-5 误差、不确定度的分类及其关系

第六节 有效数字及其运算

一、有效数字(significant figure)的概念

有效数字与待测量和测量仪器密切相关,它既反映了待测量的量值大小,同时也反映了所用仪器的精度,因而有效数字与数学上的纯“数字”有本质的区别。