绪　　论

一、物理实验课的地位和作用

物理学是一门实验科学，实验对物理学的重要性自不必言，物理实验是人为地创造出一种条件，按照预定计划，以确定顺序重现一系列物理过程或物理现象，其目的在于培养学生的实验能力．由于物理学所具有的基础性和普遍性，使物理实验课同样具有基础性和普遍性．作为大学的一门基础课，是学生进入大学后受到系统的实验技能训练的开始，是后续课程的实验基础，是提高实验能力的重要起点．这就是各专业必修物理实验课的根本依据．

实验能力包括:实验的构思、设计、组织、进行;仪器的制作、选择、安装、调试;数据的测量、读取、记录、处理;结果的分析、表达、推理、论断;报告的撰写和发表,等等．物理实验课是选取一些实验基本理论、基本物理量、基本方法和基本操作技能为主要教学内容进行教学的．在每一个实验的过程中，几乎所有实验能力都涉及到，然而指望通过一两个实验来培养实验技能显然是办不到的．在教学过程中，每个实验只侧重培养实验技能的几个方面，只有通过全面的学习，才能获得完整的实验基本技能．

物理实验课培养学生通过实验手段去发现问题、分析问题和解决问题的能力．因此，要求学生在每个实验中必须做到既动手、又动脑，将理论知识与实验技能很好地结合起来．

二、物理实验课的基本程序

物理实验包括内容很多，对同一内容，测量方法也不尽相同．但是实验程序大都相同，一般地可分为三个阶段，即实验前的预习，进行实验，撰写实验报告．

1．实验前的预习

课堂上实验时间有限，每次实验从理解内容、熟悉仪器，到准确测量，任务是很重的，需要一定的时间．为了有效地利用课上时间，高质量地完成实验课的任务，要求课前对所要进行的实验内容进行预习．

预习的主要要求是：认真阅读实验教材中所做实验的章节及相关的资料，了

解本次实验的目的、内容、依据的基本原理，使用仪器以及实验方法步骤、要测哪些量,等等.

预习时要写书面预习报告，内容包括：

(1) 实验名称.

(2) 实验目的.

(3) 实验依据的简要原理.

(4) 实验的主要步骤.

(5) 记录数据需用的表格，表中要标明已知物理量和待测物理量的文字符号及单位,测量次数,等等.

(6) 预习中遇到的问题和实验中的注意事项.

总之，在课前对所要进行的实验，要做到心中有数，以便在课上能够抓住实验的关键，及时、准确、迅速地获得待测量的数据.

2. 进行实验

(1) 实验前要对照教材熟悉仪器，了解仪器的工作原理及用法.

(2) 经教师允许后，开始安装、调整仪器.

(3) 每次测量后，应立即将数据记录在预习报告中的数据表格内或实验记录本上，要根据仪表的最小刻度和级别，决定实验数据的有效数字位数.各个数据之间，数据与图表之间不要太挤.要留有空地，以供必要时补充或更正.但所测的数据不能随便涂改，更不允许按实验室的“标准数据”修改自己的数据，要培养实事求是的学风，数据确实有错，可将其划掉，说明理由将正确的写在旁边，发现操作有错或误差过大，应耐心重测.

数据记录应包括以下几个部分：

①实验条件 如温度、湿度、气压等.

②仪器的规格和初始条件：如初读数、主要仪器的型号、精度、组别等.

③实验数据（不经运算的原始数据）.

实验结束时，要经教师检查实验数据和仪器，然后整理仪器和实验台，离开实验室.

3. 撰写实验报告

实验报告是实验工作的全面总结，要用简明的形式将实验结果完整而又真实地表达出来.实验报告不但是给自己看的，一般也为他人所看，故要用简练的文字撰写,要求文字通顺,字迹端正,图表规矩,结果正确.

实验报告一般应写出如下各项：

(1) 实验的年、月、日、天气、温度、气压、姓名、班、组等.

(2)实验题目.

(3)实验目的.要写明在实验中解决什么问题.

(4) 实验原理.写明实验的基础理论，不是简单地抄写教科书，而是经过自己认真研究、归纳、整理,简明易懂地精练写出.

(5) 仪器设备.写明实验中所用的仪器、材料和工具.

(6) 实验的主要步骤.

(7) 实验数据.将课上测得的数据整理好，填在表格里.

(8) 数据处理.写清所用公式，处理数据的计算过程，即使只需将最后结果填在表格里，也要给予说明.

(9) 误差分析.

(10) 正确地表示实验结果.

(11) 讨论（思考题）

前八项很简单，参考教材即可完成，现将后三项简要说明一下：

误差分析包括两方面的内容，一是估算测量结果的误差范围，因为判定实验结果的不准确范围——不确定度和获得实验结果具有同等的重要性.二是找出影响实验结果的主要因素，从而采取相应的措施以减少误差.对已知标准值，把测量结果与标准值比较，误差过大或测量结果不在误差范围内，应分析原因，对误差做出合理的解释.

在表达实验结果时，一般包括不可分割的三个部分，即结果的测量值 N,结果的误差范围（用绝对误差 ΔN 表示）置信区间和结果的准确程度（可靠程度），综合起来可写为

$$N=(N\pm\Delta N)\quad（单位）$$

如果实验系观察某一物理现象或验证某一物理定律，则只需扼要地写出结论.

在最后的讨论中，包括回答实验的思考题，分析实验中观察到的异常现象及可能的解释，对于实验仪器装置和实验方法的改进建议等，对印象很深的实验，还可写出收获及体会.

写报告一律使用学校统一规定的实验报告用纸，要用坐标纸画实验曲线.

第一章　测量误差及数据处理

§1.1　测量与误差的概念

物理实验作为一门定量的科学，建立在对物理现象和物理量进行观察和测量的基础上.因此，物理实验离不开对物理量的测量.为了进行测量，每一个物理量都有相应的计量单位.测量就是将待测的物理量与相应的计量单位进行比较的过程，其倍数即为物理量的测量值.如测得摆长为 1 m 的 0.865 6 倍,则摆长就为 0.865 6 m.测量时所用的量具和仪器一般都按一定的倍数刻度，以便直接读出测量的数值.

待测物理量的测量可分为两类：一类是用量具或仪器直接读出测量的结果，这一类测量称为直接测量，相应的物理量为直接测得量.另一类是间接测得的，由直接测得量代入公式进行计算得出测量结果.这类测量称为间接测量，相应的物理量称为间接测得量.

按测量条件的不同，测量还可分为等精度测量和不等精度测量.等精度测量是指测量过程中，影响测量的诸因素相同的测量.在测量条件相同的情况下进行的一系列测量是等精度测量.例如，由同一个人在同一仪器上采用同样测量方法对同一被测物理量进行多次重复测量，每次测量的可靠程度都相同，这些测量就是等精度测量，否则就是不等精度测量.

等精度测量，其测量结果的数据处理比较容易；而不等精度测量其数据处理很复杂，所以只有在非用不可的情况下，才采用不等精度测量.在大学物理实验中一般都采用等精度测量，下面介绍的误差理论和数据处理的方法只限于等精度测量.

人们用仪器对某一物理量进行测量时，由于仪器、实验条件等各种因素的限制，测量结果总是与客观存在的实际值——真值之间有一定的偏差，这个偏差值称为测量的误差.它的大小反映了人们的认识接近于客观真实的程度.误差存在于一切测量中，而且贯穿于测量的始终.

测量的目的要设法减少测量误差，尽可能得到被测物理量的最接近值；并估

算出测量结果的误差.为此必须研究误差的性质、来源和规律，以便达到测量的目的.

根据误差的性质和产生的原因，直接测量的误差可分为系统误差、偶然误差(或称随机误差)、过失误差(或称粗差)三种.

一、系统误差

系统误差的特征是其确定性.在同一条件（方法、仪器、环境和观测人均不变）下进行多次测量时，误差的大小和正负或保持不变，或在条件改变时按一定的规律变化.增加测量次数并不能减少这种误差对测量结果的影响.

（一）系统误差的主要来源

1. 仪器误差

这是由于测量工具或仪器本身的缺陷而产生的，如天平臂不等长，砝码标称质量不准确，秒表的周期或刻度不准等.

2. 方法误差

这是由于实验方法或理论不完善而导致的如采用伏安法测电阻时（采用不同的联接方法），电表的内阻产生的误差.采用单摆周期公式 $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ 测量周期时，摆角引起的误差，这些都是方法误差.

3. 环境误差

这是由于周围环境（如温度、压力、湿度、电磁场等）与实验要求不一致而引起的误差.

4 人身误差

这是由于观测人员生理或心理特点所造成的误差如个人的习惯与偏见等造成的误差.

系统误差一般都有较明显的原因，因此可以采取适当的措施加以限制或消除它对测量结果的影响.系统误差是测量误差的重要组成部分，所以发现系统误差，弄清其产生的原因，进而消除它对测量结果的影响则是物理实验的一项重要任务.

（二）发现系统误差的方法

由于系统误差的性质，系统误差是不能由多次重复测量来发现的，要发现系统误差，必须仔细地研究测量理论和方法的每一步推导，检验和校准每一件仪器，分析每一个实验条件，考虑每一次调整和测量，注意每一个因素对实验的影响，下面介绍几种常用的发现系统误差的方法.

1. 对比的方法

(1) 实验方法的对比.用不同的方法测同一个量，看结果是否一致.如用单摆测得重力加速度 $g = (980 \pm 1)\ \mathrm{cm \cdot s^{-2}}$，用复摆测得 $g = (983.0 \pm 0.3)\ \mathrm{cm \cdot s^{-2}}$，

在精密测量中有自由落体法测得 $g=(977.63\pm0.05)\ \mathrm{cm\cdot s^{-2}}$. 三种方法测得的结果不一致，即它们在所估算的误差的范围内不重合，一般来说，这说明至少有两种测量中存在系统误差没有发现或合理估算.

(2) 仪器对比.用两个电流表接入同一个电路，读数不一致，说明至少有一个有明显的系统误差.如果一个是标准表，就可以得出另一个表的修正值.

(3) 改变测量方法，例如把电流反向读数，度盘转 180°读数等，看观察结果是否一致.

(4) 改变实验中某些参量的数值，测量结果若有单调的变化或规律性的变化，就说明存在系统误差.

(5) 改变实验条件，例如，在电路中将某个元件的位置改变一下，观察对结果是否有影响.

(6) 换人测量，可以发现人员的系统误差.

2. 理论分析的方法

(1) 分析实验理论公式所要求的条件在实验测量过程中是否得到满足.

(2) 分析仪器要求的条件是否得到满足，例如，0.1 级电阻箱要求在（20 ± 8）℃环境下使用，电表要求水平或垂直放置等，不合要求必然要产生系统误差.

(3) 数据分析法，当偶然误差很小时，将测量的偏差 $\Delta x_i = x_i - x$ 按测量的先后次序排列，观测 Δx_i 的变化,如果 Δx_i 呈现规律性变化，则必然有系统误差存在.

（三）消除系统误差的方法

1. 消除产生系统误差的根源的方法

(1) 采用符合实际的理论公式.

(2) 严格保证仪器和实验所要求的条件.

(3) 多人做重复实验.

2. 找出修正值，对测量结果进行修正

使用特殊测量方法，设计专用仪器，抵消系统误差，实验中常用对换法、补偿法、异号法、对称测量法、半周期偶次测量等特殊方法消除系统误差.

上述几种方法是我们今后实验中经常用到的，我们要通过具体的实验把它们真正地理解和掌握.

二、偶然误差（随机误差）

偶然误差的特征是其随机性.在同一条件下多次测量某一物理量时，即使消除了一切引起系统误差的因素，测量结果也仍然存在着误差，这种误差称为偶然误差.

（一）偶然误差的来源

这种误差是由于人的感官灵敏程度和仪器精密度（最小刻度）的限制，周围环境的干扰及随测量而来的其他不可预测的偶然因素所造成的．观测时,目的物对得不准，平衡点定得不准，直接测量结果的显示不可能绝对准确．温度、湿度、电源电压的起伏而引起误差，这些影响一般是微小的而且是混杂出现的，难以确定某个因素产生的具体影响的大小和方向，不能像系统误差那样找出明显的原因并加以限制或消除

(二)偶然误差的规律

偶然误差使测量值有时偏大，有时偏小，不可预知．但当对一物理量进行测量次数较多时，这些测量结果将呈现出一定的统计规律性，也就是说偶然误差服从一定的统计分布．偶然误差在测量次数很大时，基本上都可以认为近似遵从正态分布规律,如图 1.1.1 所示．

横坐标 ΔN 表示偶然误差；纵坐标 $P(\Delta N)$ 表示某个误差出现的机会（概率密度）．由图可知，其绝对值相等的正负误差出现的概率相等，绝对值小的误差出现的概率大，即有单峰、对称、正负相消、有界性．

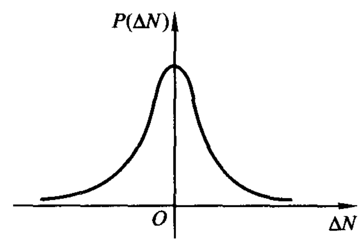

图 1.1.1　正态分布

(三)测量结果的处理

由偶然误差的统计规律可知增加测量次数取测量的平均值作为测量结果，可以减小误差，提高可靠度．这就是我们做实验时往往重复多次测量取平均值作为测量结果的依据．当然并不是测量次数越多越好，因为增加测量次数必定要延长测量时间，这将给保持稳定的测量条件增加困难．同时，增加测量次数也会给测量者造成疲劳，这又可能引起较大的观测误差．另外增加测量次数只能减少偶然误差而不能减少系统误差．也就是说，只有当个别测量的偶然误差超过该测量的系统误差时，多次测量才有意义，所以实际观测次数不必过多，一般在科学研究中，取 10 至 20 次；而在我们的物理实验中由于时间有限可以取 5 到 10 次(或 3 次以上)。当偶然误差小于系统误差时，多次测量就没有意义，可以只做单次测量，总误差就只估算系统误差（一般只估算仪器误差）．

三、过失误差（粗差）

过失误差即实验过程中由于过失、错误所产生的误差．凡是用测量时的客观条件不能解释为合理的那些明显歪曲测量结果的误差，均称为过失误差，亦称粗差．这是实验者在观测、记录和整理数据过程中由于缺乏经验、粗心大意、疲劳等原因引起的．

刚开始进行物理实验时，会出现粗差，应在教师指导下不断总结经验，提高

实验素养，防止粗差的出现.

含有粗差的测量值称为异常值或坏值.在正确的测量结果中不应当含有粗差，即所有的坏值都应剔除.

总之，系统误差、偶然误差、过失误差，由于它们的性质不同，来源不同，处理的方法也不同.

§1.2　测量的精密度、准确度和精确度

精密度、准确度和精确度都是评价测量结果的量，它们之间既有联系，也有区别.

精密度是衡量多次测量数值之间互相接近程度的量，由偶然误差大小决定，与系统误差无关.测量精密度高是指多次重复测量结果比较集中一致，测量的偶然误差小，系统误差可能较大.

准确度是衡量所测数值与真值接近程度的量.测量的准确度高是指多次测量的平均值偏离真值较小，系统误差也一定小，偶然误差可能不小.

精确度是指所测数值的精密度与准确度的综合情况的量.测量的精确度高是指测量数值既比较集中一致，又在真值附近，即测量的系统误差和偶然误差都比较小.

我们以打靶为例说明上述三个概念的意义.如图 1.2.1 所示.其中左图精密度较高，但准确度不高；中间的图表示精密度较低，但平均的结果可能很接近靶心（在物理量的测量上是指平均值很接近真值），准确度可能很高；右图则表示精密度和准确度都很高，即精确度高.另外，精确度常说成精度，但精度的意思较多，一般对实验结果来说精度多指相对误差的数量级，如 $E=1.0\%$，则可称精度为 10^{-2}.对仪器来说，精度多指仪器的最小分度值.

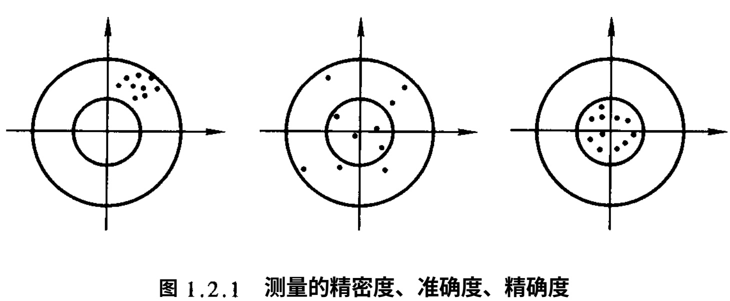

图 1.2.1　测量的精密度、准确度、精确度

直接测量结果的误差是系统误差和偶然误差的总和，它的估算值称为不确定度.精确度高表示测量比较集中在真值附近，即测量的系统误差和偶然误差都

比较小.因此，误差分析的主要任务是限制和消除系统误差，估算偶然误差，提高测量的精确度.

§1.3 正态分布

正态分布是常见的一种连续型分布，在物理实验中，测量值和测量的偶然误差，都可以认为近似遵从正态分布.此外，与测量值和偶然误差有关的，还有一种均匀分布比较常见.

从概率统计的角度来看，物理实验的每一次测量结果均是一个随机事件.某一物理量在一定条件下的实验测值是一个随机变量，测得的每一个数据就是该随机变量的随机数.随机变量 x 的 k 个随机数 x_1、x_2、…、x_k 的集合称为随机样本（简称样本）.在实验中，随机样本就是一组观测数据.k 称为样本的容量，也就是一组数据的个数或测量的次数.

随机变量的全部可能取的随机数的总和叫做随机总体，简称总体.随机样本的容量 k 足够大（大样本）时，就呈现出随机总体的性质；随机样本的容量不大（小样本）时，其性质是与大样本不同的.我们常常遇到的问题是在有限次测量的情况下，去估计总体的性质或处理测量的结果.完全地描述一个随机变量，不仅要列举出该随机变量的全部可能取值，还要列举出每个随机数（或区间）在全部样本中出现的次数（或概率），就是要指出随机变量的分布.随机变量的分布可以用列表、作图、函数来表示，我们这里仅介绍函数分布.

一、正态分布函数

在一个样本，亦即一组测量数据中，我们把随机变量的取值分成若干个等间距的小区间，以 n_i 表示第 i 个小区间内的数据频数（个数）.相对频数 n_i/k，即该区间内频数占总测量次数 k 的百分率.由于 $\sum_{i=1}^{m} n_i/k = 1$，其中 m 为等间隔的小区间个数.如果是连续分布，则相对频数为 $p(x)\cdot dx$，$p(x)$ 是随机变量 x 在 x 点附近单位间隔出现的概率，dx 是区间宽度，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \tag{1.3.1}$$

这就是归一化条件.其中 $p(x)$ 叫做随机变量 x 的概率密度函数.我们定义

$$P(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx \tag{1.3.2}$$

$P(x)$ 叫做随机变量 x 的分布函数.分布函数 $P(x)$ 的值表示随机变量在 $-\infty$ 到

x 之间的概率．$p(x)=\dfrac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}$．若随机变量的概率密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},\quad -\infty<x<\infty \tag{1.3.3}$$

或写作

$$p(x)=n(x;\mu,\sigma^2)$$

的形式，则称这个随机变量 x 的分布为正态分布．服从正态分布的随机变量称为正态变量．

正态变量的分布函数是

$$P(x)=\int_{-\infty}^{x}p(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\cdot\mathrm{d}x \tag{1.3.4}$$

或写作

$$P(x)=N(x;\mu,\sigma^2)=\int_{-\infty}^{x}n(x;\mu,\sigma^2)\cdot\mathrm{d}x$$

式(1.3.3)及(1.3.4)中的 σ 取正值．μ 和 σ 是正态分布的两个参数，μ 和 σ 确定，这个随机变量的分布也就完全确定．正态分布的概率密度曲线如图 1.3.1 所示．μ 与正态分布概率密度曲线的峰值相对应．可以求出 $p(x)$ 曲线下的面积在区间 $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$ 内占曲线下全部面积的 68.27 %，即 x 落在区间 $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$ 内的概率为 68.27 %．由于 $P(x)$ 是归一化的，故概率密度曲线下的面积是 1．因此，σ 越大，曲线的峰值就越低；σ 越小，曲线的峰值就越高．如图 1.3.2 所示．

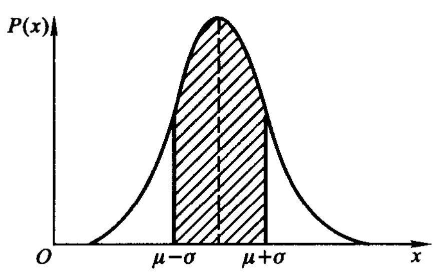

图 1.3.1　正态概率密度曲线

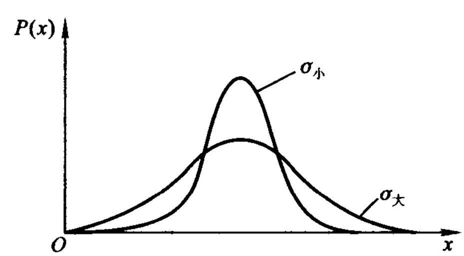

图 1.3.2　不同 σ 的正态分布曲线

物理量 x 的 μ，就是它的真值，它的偶然误差为零．物理量 x，测量结果落在 $(\mu\pm\sigma)$ 区间的概率为 68.27 %．σ 的大小，反映出测量结果的误差大小，故把 σ 定义为随机变量 x 的标准误差．

如果已知正态分布的随机变量 x 的两个参数 μ 和 σ，则可计算出随机变量在

任何区间的概率：

在区间($\mu-3\sigma,\mu+3\sigma$)内的概率为 99.73 %；

在区间($\mu-2\sigma,\mu+2\sigma$)内的概率为 95.5 %；

在区间($\mu-1.645\sigma,\mu+1.645\sigma$)内的概率为 90.0 %；

在区间($\mu-0.674\sigma,\mu+0.674\sigma$) 内的概率为 50.0 %.

二、正态变量的期望值、方差和标准误差

随机变量 x 的期望值（数学期望）$\langle x\rangle$ 定义为

$$\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)\mathrm{d}x$$

期望值是随机变量概率密度曲线的重心位置.对于单峰对称的概率密度曲线，期望值就是与曲线峰值对应位置的 x 值.

随机变量 x 的方差 $Var(x)$ 定义为

$$Var(x)=\langle(x-\langle x\rangle)^2\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\langle x\rangle)^2p(x)\mathrm{d}x$$

即 $Var(x)$ 为 x 与期望值 $\langle x\rangle$ 之差的平方的期望值.

方差的平方根称做随机变量的标准误差 $\sigma(x)$,即

$$\sigma(x)=[Var(x)]^{1/2}\ \text{或}\ \sigma^2(x)=Var(x)$$

对于正态变量 x 的期望值 $\langle x\rangle$

$$\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}xn(x;\mu,\sigma^2)\mathrm{d}x=\mu$$

正态变量 x 的方差 $\sigma^2(x)$ 或 $Var(x)$ 为

$$\begin{aligned}\sigma^2(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\langle x\rangle)^2p(x)\mathrm{d}(x)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2p(x)\mathrm{d}(x)\\&=\sigma^2\end{aligned}$$

即正态变量 x 的期望值$\langle x\rangle$ 就是分布参数 μ;方差就是分布参数 σ 的平方；标准误差就是分布参数 σ.

三、均匀分布

由于数字仪表的读数显示，度盘或其它传动齿轮的回差，游标尺的读数，都近似遵从均匀分布规律.而且，对于一些完全不知其分布的误差，也往往先假定它遵从均匀分布.因此在大学物理实验中，均匀分布也是一个很重要的分布.下面简单地介绍一下.

在区间(a,b)上的连续变量 x，其概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & \text{当 } a<x<b\\ 0, & \text{当 } x<a \text{ 和 } x>b\end{cases} \tag{1.3.5}$$

这个变量 x 的分布为均匀分布.均匀分布是在(a,b)区间上等概率的分布.如图1.3.3所示，a和b是均匀分布的两个参数.a、b之差，对于游标尺来说就是分度值；对于数字仪表等就是最小读数或动作单位.

均匀分布式(1.3.5)的期望值、方差和标准误差为

$$\langle x\rangle=\frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2(x)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma(x)=\frac{b-a}{\sqrt{12}} \tag{1.3.6}$$

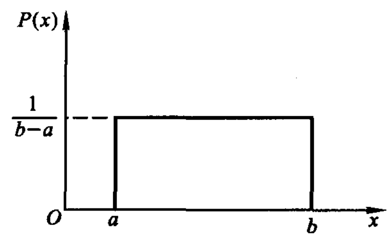

图 1.3.3　均匀分布

从式(1.3.6)可以直接给出具有均匀分布的随机变量，如数字仪表或游标尺的读数等一次测量的标准误差的估计值.

方差或标准误差表示一个变量的离散程度.方差或标准误差越大，则随机变量在其期望值左右分布得越宽，越不集中；方差和标准误差越小，则随机变量在期望值左右分布得越窄、越集中.

§1.4　直接测量结果与误差的估算

一般情况下，对直接测量量进行多次测量，测量结果取其算术平均值，结果的误差由偶然误差和系统误差综合估算，称为测量结果的不确定度，最后结果应用平均值和不确定度一起表示.

一、多次测量的算术平均值

由于测量误差的存在，测量结果是一个随机变量.在任何测量中，真值总是不能确切知道的.在测量条件不变的情况下，以多次测量的算术平均值作为真值的最佳值，作为测量的结果.

如对某一物理量 N 进行了 k 次测量，得到测量值分别为 N_1、N_2、…、N_k 一个测量列,则 N 的该测量列算术平均值定义为

$$\begin{aligned}\bar{N}&=\frac{1}{k}(N_1+N_2+\cdots+N_i)\\&=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}N_i\end{aligned} \tag{1.4.1}$$

注意：$\overline{N}$也是一个随机变量．因为我们对该物理量作另一组 k 次测量得到另一个 $\overline{N}$．由偶然误差服从正态分布的理论可知，当测量次数无限增加时，算术平均值将无限接近真值 $\overline{N}\to N_0$，（不考虑系统误差）．因此以多次测量的算术平均值作为测量结果是合理的，最可信赖的，最佳的真值近似值．

二、偶然误差的估算

测量值与真值之差称为误差．由于实际测量中都进行有限次测量，故实际测量中得不到真值，因此，也得不到测量的误差．只能得到测量值与算术平均值之差．测量值与算术平均值之差称为偏差，因为算术平均值是真值的最佳近似值，故用偏差来估算误差是合理的，用偏差来估算误差的方法有很多种，这里只介绍最常用的两种：算术平均偏差和算术平均值的标准偏差．

1．算术平均偏差

设第 i 次测量值 N_i 与平均值 $\overline{N}$ 的偏差为 $\Delta N_1 = N_1 - \overline{N}, \Delta N_2 = N_2 - \overline{N}, \cdots, \Delta N_k = N_k - \overline{N}$，则算术平均偏差，$\delta$ 定义为

$$\delta = \frac{1}{k}(|\Delta N_1| + |\Delta N_2| + \cdots + |\Delta N_k|) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}|\Delta N_i| \tag{1.4.2}$$

2．算术平均值的标准偏差

根据误差理论，可以得出估算偶然误差的更精确的方法，这就是利用标准偏差 S 去估算误差的方法．在有限次（k 次）测量中，测量列中任一次测量结果 N_i 的标准偏差 S_N 定义为

$$S_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(N_i - \overline{N})^2}{k-1}} \tag{1.4.3}$$

S_N 标准偏差描述测量结果 N_i 的密集程度，即反映出被测量量偶然误差大小，S_N 是一个随机变量，每组 k 次测量量的 S_N 是不同的，理论可以证明当 $k\to\infty$ 时，$S_N\to\sigma_N$，$\lim S_N = \sigma_N$，σ_N 为 N 的标准误差．

σ_N 是反映 N 分布形状的一个正常数，它的大小代表着 N 的偶然误差大小，可以证明，测量列中任意一次测量结果 N_i 落在 $N_0\pm\sigma_N$ 内的概率为 68.3 % 落在 $N_0\pm 2\sigma_N$ 和 $N_0\pm 3\sigma_N$ 的概率为 95.4 % 和 99.7 %．

而 k 次测量结果的算术平均值 $\overline{N}$（注意 $\overline{N}$ 也是随机变量）的标准偏差 $S_{\overline{N}}$定义为

$$S_{\overline{N}} = \frac{S_N}{\sqrt{k}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(N_i - \overline{N})^2}{k(k-1)}} \tag{1.4.4}$$

$S_{\overline{N}}$是一个描述不同组的 k 个测量值平均值 $\overline{N}_i$ 的密集程度的量，它反映出 $\overline{N}_i$ 的偶然误差大小.

$S_{\overline{N}}$也是一个随机变量，当 $k \to \infty$ 时，$S_{\overline{N}} \to \sigma_{\overline{N}}$. $\lim\limits_{k\to\infty} S_{\overline{N}} = \sigma_{\overline{N}}$，$\sigma_{\overline{N}}$为 $\overline{N}$ 的标准误差，$\sigma_{\overline{N}}$ 与 $\overline{N}$ 的关系，和 σ_N 与 N 的关系一样. $\sigma_{\overline{N}}$是反映 $\overline{N}$（也是随机变量）分布形状的一个正常数，它的大小代表着 $\overline{N}$ 的偶然误差大小，同样可证 $\overline{N}$ 的任一组测量结果 $\overline{N}_i$ 落在 $N_0 \pm \sigma_{\overline{N}}$内的概率为 68.3 %，落在 $N_0 \pm 2\sigma_{\overline{N}}$和 $N_0 \pm 3\sigma_{\overline{N}}$的概率为 95.4 %和 99.7 %.

我们要估算 $\overline{N}$ 的偶然误差就是要估算 $\sigma_{\overline{N}}$，由于 $S_{\overline{N}} \to \sigma_{\overline{N}}$（$k \to \infty$ 时），$\sigma_{\overline{N}}$不可能准确得到，我们只能用 $S_{\overline{N}}$来估算 $\sigma_{\overline{N}}$. 而 $S_{\overline{N}}$ 也是一个随机变量. 所以用 $S_{\overline{N}}$来估算（或代替）$\sigma_{\overline{N}}$时，也有个可靠程度的问题，显然测量次数 k 越多，可靠性越高，另外也可以通过扩大误差范围即用 $2S_{\overline{N}}$或 $3S_{\overline{N}}$来估算误差范围的办法来提高测量结果的可靠性. 在我们这里，就直接用算术平均值的标准偏差 $S_{\overline{N}}$来估算 $\sigma_{\overline{N}}$，只不过我们要知道测量次数 k 越少，我们估算 $\sigma_{\overline{N}}$的可靠性就越差.

应该清楚，S_N 是测量列中任一次测量值 N_i 的标准估差 σ_N 的估算，而 $S_{\overline{N}}$是对测量列的平均值 $\overline{N}$ 的标准误差 $\sigma_{\overline{N}}$ 的估算，$S_{\overline{N}} = \dfrac{S_N}{\sqrt{k}}$，这也说明 $\overline{N}$ 作为测量结果，比任一次测量值 N_i 都可靠，可以信赖.

3. 单次测量的偶然误差的估算

由于测量条件的限制无法进行多次测量，或实验要求不高，对一物理量进行了单次测量，这种情况我们要根据测量的实际情况对偶然误差给出合理的估算值.

例 1：用单摆测重力加速度公式为 $g = \dfrac{4\pi^2 l}{T^2}$，对摆长 l 测量 10次，测得值如下表：

测量次序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
l/cm	100.2	99.8	99.9	100.2	100.0	100.1	99.9	100.0	99.9	100.1

对周期 T测量 5次，测得值如下表：

测量次序	1	2	3	4	5
T/s	2.001	2.002	1.998	2.003	1.997

求 l和 T 的算术平均值 $\overline{l}$、$\overline{T}$，算术平均偏差 δ_l、δ_T，某一次测量结果的 l、T 的标准偏差 S_l、S_T，算术平均值 l、T 的标准偏差 $S_{\overline{l}}$. $S_{\overline{T}}$

解：

$$\bar{l} = \frac{1}{10}(100.2 + 99.8 + 99.9 + 100.2 + 100.0 + 100.1 + 99.9 + 100.0 + 99.9 + 100.1)\text{cm}$$

$$\approx 100.01\text{cm}$$

$$\bar{T} = \frac{1}{5}(2.001 + 2.002 + 1.998 + 2.003 + 1.997)\text{s}$$

$$\approx 2.000\ 2\text{s}$$

$$\delta_l = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} | l_i - \bar{l} |$$

$$= \frac{1}{10}(0.2 + 0.2 + 0.1 + 0.2 + 0.0 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.0 + 0.1 + 0.1)\text{cm}$$

$$= 0.11\text{cm}$$

$$\delta_T = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} | T_i - \bar{T} |$$

$$= \frac{1}{5}(0.001 + 0.002 + 0.002 + 0.003 + 0.003)\text{s}$$

$$= 0.002\ 2\text{s}$$

$$S_l = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(l_i - \bar{l})^2}{10 - 1}} = \sqrt{\frac{0.17}{9}}\text{cm} = 0.14\text{cm}$$

$$S_T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(l_i - \bar{l})^2}{5 - 1}} = \sqrt{\frac{27 \times 10^{-6}}{4}}\text{s} = 0.002\ 6\text{s}$$

$$S_{\bar{l}} = \frac{S_l}{\sqrt{10}} = \frac{0.14}{3.16}\text{cm} = 0.044\text{cm}$$

$$S_{\bar{T}} = \frac{S_T}{\sqrt{5}} = \frac{0.002\ 6}{2.24}\text{s} = 0.001\ 1\text{s}$$

由于偏差本身是对误差的一个估算值.根据统计理论，测量次数越多，平均值越接近真值，偏差越接近误差.在测量次数不多的情况下（如 50 次以下),其结果一般来讲最多有两位数字对估算误差是有意义的有效数字.由于我们实验的测量次数更少，所以，在计算偏差时，我们最多取两位有效数字，而总误差的估算一般只留一位有效数字即可.

在上述两种估算偶然误差的方法中，标准偏差能够更好地表示出测量量的离散程度，有比较准确的可信程度，因此世界上各国的科学论文都用标准偏差评价数据.我们一般也用标准偏差，对于有的实验和学时较少的学生，只要求会计算算术平均偏差，了解标准偏差和不确定度的概念.

4.A 类(标准)不确定度

我们在实验中得不到误差，因而我们用偏差去估算误差.我们把用统计方法

计算得到的标准偏差称为测量结果的 A 类标准不确定度，由正态分布的统计理论可知，测量结果的误差有 68.27 % 的概率在标准误差 $\sigma_{\bar{N}}$ 的范围内，因而我们也认为测量结果误差也近似有 68.27 % 的概率在标准偏差 $S_{\bar{N}}$ 的范围内．或者说被测量的真值 N_0 有 68.27 % 的概率落在($\overline{N}-S_{\bar{N}}, N+S_{\bar{N}}$)范围内．由于测量次数越多标准偏差 S 越接近标准误差 σ，故测量次数越多这种估算的概率意义越准确．

实验中常需要考虑测量结果的可信任程度．为此，就必须给测量结果一个误差范围叫做置信区间，这个范围越大，结果超过范围的可能性越少，称测量值在给定误差范围的概率为该测量结果在此误差区内的置信度．例如，我们如果取平均值的标准偏差 $S_{\bar{N}}$ 为置信区间，则测量结果 $\overline{N}$ 的置信度为 68.27 %．如果取三倍的标准偏差 $3S_{\bar{N}}$ 为置信区间，则 $\overline{N}$ 的置信度根据理论可得为 99.7 %．置信度随所取的置信区间加大而提高．把 $3S_{\bar{N}} \to 3\sigma_{\bar{N}}$ 称为极限误差，用 Δ 表示

算术平均值 N 的算术平均偏差 $\upsilon_{\bar{N}}$ 和算术平均偏差 δ 之间的关系为 $\delta_{\bar{N}}=\dfrac{\delta}{\sqrt{k}}$，$k$ 为测量次数．根据误差理论，任一次测量值的误差大约有 58 % 的可能性是在 $(-\delta,\delta)$ 区间内，由于测量平均值的算术平均偏差 $\delta_{\bar{N}}<\delta$，所以，测量结果平均值 N 落在$(-\delta,\delta)$区间的可靠性就更大．

如果多次测量的测量值相同或很接近时，并不说明测量结果没有误差，而只能表示测量结果的偶然误差很小，仪器的灵敏度不足以反映偶然误差，这时仪器的和其他的系统误差是测量结果的主要误差．

三、系统误差的估算

1．仪器的误差

直接测量的结果除了偶然误差外，还存在系统误差，系统误差与测量次数无关主要来源于实验仪器，实验方法，仪器安装环境条件和人身误差．由于实验方法、环境条件和人身误差是应该和可以消除或忽略的，我们一般情况下，只考虑仪器产生的系统误差．由于系统误差无法从多次测量结果中用统计方法估算，只有根据仪器的具体情况估算，一般情况下，仪器的精度（最小分度值）和仪器本身的最大误差是一致的，所以，我们取仪器精度的一半作为测量结果的算术平均偏差，对于给出 $\Delta_{仪}$(仪器的最大误差)的仪器，则取 $\Delta_{仪}$ 的一半作为算术平均偏差 δ 的估算 $\delta_{仪}=\dfrac{精度}{2}=\dfrac{\Delta_{仪}}{2}$．电表的最大误差为 $\Delta_{仪}=$量程 $\times$ 级别 %．系统误差的标准误差的估算，一般由仪器的极限误差的估计值得到，极限误差为 Δ，(在不清楚仪器误差的分布规律时，一般按均匀分布处理）则标准误差

$$\sigma(x)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}=\frac{2\Delta}{2\sqrt{3}}=\frac{\Delta}{\sqrt{3}}(b-a=2\Delta)$$

$\Delta_{仪}=2\Delta,\Delta=3\sigma$ ，也就是仪器的最大误差是极限误差的 2 倍，仪器的极限误差应是标准误差的 3 倍，即仪器产生的误差 99.7 % 概率在$(-\Delta,\Delta)$之内.对于千分尺等取最小分度值为 $\Delta_{仪}$；对用差示法的卡尺、分光计等应取 2 倍最小分度值为 $\Delta_{仪}$ 对没有给出 $\Delta_{仪}$ 的仪器一般取最小分度值作为 $\Delta_{仪}$.

2.B类不确定度

我们把用非统计方法得到的误差的估算称为 B 类不确定度，一般用符号 u 表示，$u=\frac{精度}{2\sqrt{3}}$，$u=\frac{\Delta_{仪}}{2\sqrt{3}}=\frac{\Delta}{\sqrt{3}}$，并且假设它也近似具有 A 类标准不确定度的概率性质，称为 B 类标准不确定度.

此外，如果实验方法、环境条件、人身等系统误差不能忽略或者经过修正消除后，还有不能忽略的误差，也要对这些误差进行合理的估算，它们也属于 B 类标准不确定度.

四、直接测量结果的误差估算——合成标准不确定度

直接测量结果的误差估算要把各种误差综合考虑.用算术平均偏差估算时，我们用各种算术平均偏差的和来估算，即

$$\delta=\delta_{偶}+\delta_{仪}+\delta_{其}$$

$\delta_{偶}$ 是多次测量算术平均偏差.如果是单次测量，而 $\delta_{偶}$ 项误差又不可忽略时，也要给出一个合理的估计值.$\delta_{仪}$ 是测量仪器产生的系统误差.$\delta_{其}$ 是除上述两项误差外的其他误差.

测量结果的质量国际上是用合成标准不确定度 $U(N)$来评定的.

$$U(\overline{N})=\sqrt{S_{\overline{N}}^{2}+\sum_{j}u_{j}^{2}}$$

$S_{\overline{N}}$为被测量的算术平均标准偏差（误差）.$S_{\overline{N}}$ 为 A 类不确定度分量，用统计方法获得的，是偶然误差的估算值.

u_j 为 B类标准不确定度，用非统计方法获得的，一般情况下，是各种误差来源的非统计估算误差，由于 B 类不确定度可能有多个故用求和符号和分量下标 j.并假定各不确定度分量是独立的.我们的实验大多数可以只考虑仪器的系统误差产生的 B 类不确定度分量.故

$$U(\overline{N})=\sqrt{S_{\overline{N}}^{2}+u^{2}}$$

不确定度表示由于测量误差的存在而对于被测量值不能确定的程度，它反映了可能存在的误差范围.

注意，如果是单次测量，而偶然误差又不能忽略不计时，也要给出一个偶然