绪　论

一、大学物理实验课的地位和任务

物理学是一门实验科学．一切物理原理、定律和定理均来自于生产实践和科学实验，又经受生产实践和科学实验的检验，并对其起进一步的指导作用．大学物理实验就是要让每个大学生都深刻理解这一辩证唯物主义的世界观，并从亲手的实验当中理解物理概念和定律．

物理实验课是大学生进校后从事科学实验的开端，它的基本训练将对大学生今后的系统实验方法、实验技能及实验展开的思维活动有着很深远的影响．物理实验课的重要任务就是要在不太长的时间内培养学生能独立展开实验思维，具备一定的科学实验能力和素养．

科学实验不仅仅只对事物的变化本质和规律进行定性的观察，而且要定量地进行测量与研究，实验当中如何正确可靠地记录数据，测量完毕后又如何科学地处理实验数据往往对实验结果的研究起着举足轻重的作用．使大学生掌握这方面的知识也是大学物理实验课的又一重要内容．

严肃的科学态度、严谨的工作作风和严格的自我要求是每一个科学工作者的基本素质．培养这一素质，就从大学物理实验课开始．

二、大学物理实验课的要求

(一)对基础实验的要求

1．实验前的预习

认真阅读实验教材，了解实验目的，理解实验原理；最关键的是解决两个重要问题：这一次物理实验课去干什么？怎么干？其中“干什么”里应该包括实验原理、实验内容，需要测定、记录哪些物理量“；怎么干”里应考虑实验当中要使用哪些仪器设备，如何正确有效地操作它们．

教师上课时要检查学生的预习情况，对于未认真预习的学生可作出适当处理，

直至取消其实验资格.

2. 以科学的态度完成实验项目

首先,要组织好仪器设备.需要经常调整的仪器一般置于近处，以便随时调整变动.仪器设备的摆放应整齐、美观,便于读数.

其次，要按步骤调整好仪器设备，使它们处于正常工作状态.如出现问题或故障,应动脑筋分析问题所在,努力排除故障.不能自行解决的问题可报告教师协助解决.

再次，仔细观察物理现象，记录实验当中的测量数据.数据记录应当整齐、清楚，使人一看就知道记录的是什么.实验原始数据应记录在一张约32开的白纸上，由老师审查签字后方可拆除实验装置.

最后,应切断仪器所有电源,恢复仪器设备的原始状态,并整理实验场地,有防护罩的设备应将其罩好.搞好实验场地的卫生后才能离开实验室.

3. 认真书写实验报告

实验报告一律要求使用统一的实验报告纸书写.实验报告的格式也有严格规定,内容有 实验名称、实验目的、实验仪器、实验原理、实验步骤、实验数据及处理、分析讨论等.原始记录应贴在报告后面，供老师核对.

具体地,实验仪器应写上型号、等级或主要性能.

实验原理可从简，但必要的公式与文字推导及原理图不可少.

实验步骤也可从简,只要说及最关键、最重要的步骤就可以了.

实验数据尽可能用表格，其名称、单位的表述应规范化.数据的处理要有详尽的过程.

(二)对选修实验和设计性实验的要求

选修实验和设计性实验主要由学生自己进行，因此学生应更加慎重，只有准备得十分充分才能保证实验的成功.

选修实验要事先提供选修报告，其格式与教材上的必修实验内容相似，另外写明选修意向，交老师审核同意后方可实验.

设计性实验要事先提供设计报告，要使用的仪器设备应尽可能详细.教师审查后可根据具体情况调换所需仪器设备.老师认为设计方案可行时方可进行实验.

在进行选修实验和设计性实验时，发现问题且不能自行解决时可提请老师协助解决.

完成实验后同样书写实验报告.

第 1 章　误差理论基础与测量数据处理

一、测量与误差

在生产实践与科学实验中，经常要对一些事物间的变化规律作定量分析，这就需要测量. 用已定标的计量仪器的标度与被测量量进行比较，以确定被测量量的数据值的过程称为测量. 所确定的被测量的数值称为测量值. 测量值不仅要用数据表示，还应有确切的单位，没有单位的测量值是无效的.

从测量手段上分类，测量可分为直接测量和间接测量. 用计量仪器就可完成测量工作的称为直接测量. 例如用米尺就可完成对桌边长度的测量，用电表就可完成对电流、电压的测量等. 许多被测量量人们无法提供直接测量的计量仪器，不得不测量一些与之相关的其他可直接测量的物理量. 例如对于圆面积，无法提供测量面积的仪器，不得不测量圆的直径，代入公式计算出圆面积. 这一类测量称为间接测量.

从测量次数上划分，测量又可分为单次测量与多次测量. 由于条件限制或不需要，只对被测量测量一次. 例如百米赛跑的时间测量，数百数千公里铁路线的测量等. 多次测量的好处是显而易见的，但比单次测量要花费更多的时间和费用. 对一测量量采取单次测量还是多次测量要具体问题具体分析，以期达到多快好省的目的.

在一定环境中，一物理量应该有一个客观存在的值，称为该物理量的真值，测量的目的就是希望获得该真值. 但是由于各种各样的原因，获得真值几乎是不可能的，测量值与真值之间总存在一个偏差，称为测量值的误差. 设真值为 x_0，测量值为 x，则

$$\text{测量误差} = x - x_0$$

x 可能大于 x_0，也可能小于 x_0，因此测量误差可正可负.

既然测量误差是难以避免的，就应对误差进行分析研究，在需要时如何减小误差，对测量结果进行不精确度的评估就成了必不可少的工作，更深入、仔细地研究误差的理论也成为测量任务中的一个十分重要的课题.

二、系统误差与随机误差

根据误差产生的原因和性质，测量误差常分为系统误差与随机误差两大类.

1. 系统误差

系统误差主要是由测量系统的不完善产生的.测量系统具有广义性，包括仪器、测量理论、测量环境、测量者等.

(1)仪器缺陷

测量仪器由于制造工艺的原因总存在一定的精度，有些仪器本身就存在缺陷，例如零点偏移、刻度不均匀等，用它们测量时必然会产生误差.

(2) 理论缺陷

由于理论的不完善或实验方法的勉强而产生测量误差.例如伏安法测电阻实验中表头内阻会导致测量误差，理论上某些近似而导致误差等.

(3)环境变化

测量环境不满足要求或环境不稳定而产生测量误差. 这里的环境应包括所有的环境因素,不仅包括温度环境,还包括湿度、地理环境等.热胀冷缩就是环境变化产生误差的最好例证.

(4) 人员素质的缺陷

不仅测量人员生理的缺陷及心理因素的影响会导致测量误差的产生，而且测量人员素质的低下也会产生较大的误差.如观察方位的错误，操作动作的超前或滞后等都会产生误差.

在相同条件下，对同一物理量进行多次测量，系统误差的符号总是确定的，即每一次测量的正负号总是不变的，也就是要么测量值总是大于真值，要么测量值总是小于真值.而系统误差的绝对值要么不变，要么服从某一确定规律.因此系统误差的特征是其确定性.

系统误差决定了测量结果的准确度.系统误差大,准确度差,反之准确度高.因此对测量结果的系统误差进行评估是必要的.具体地，应对产生系统误差的各种原因作综合评估，其中最重要的是对测量仪器的误差进行估计.测量结果也应反映系统误差的存在.

显然，分析了系统误差的特征后，采取多次测量取平均值的方法是不可能消除或减小系统误差的.只有认真仔细地分析系统误差的来源，才有可能采取相应的措施减少其影响.这就需要实验者具有较高的理论水平和实验素养.

2. 随机误差(偶然误差)

在实验中，一些不可预料或未被掌握的规律及其他随机因素也会产生误差，这

类误差称为随机误差．在相同条件下多次测量同一物理量，多次测量值不全一致，它们的误差似乎并不是由系统的缺陷造成的，而是时大时小、正负难料，显得毫无规律．但当测量次数足够多时，就会发现这类误差的出现和分布服从一定的统计规律．

多数随机误差遵从正态分布（高斯分布）．正态分布函数为

$$f(x-x_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2}$$

正态分布函数曲线如图 1－1 所示．根据对正态分布函数的研究，参见正态分布函数曲线，不难看出正态分布的特点：

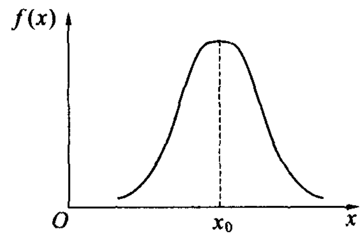

图 1－1　正态分布曲线

（1）有界性．绝对值很大的误差出现的概率近为零．

（2）单峰性．绝对值小的误差出现的概率大大高于绝对值大的误差，形成曲线的峰．

（3）对称性．绝对值相等的正误差与负误差出现的概率相等．

（4）抵偿性．误差的算术平均值随着测量次数的增加而趋近于零，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_0)}{n}=0$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k}{n}=x_0$$

若排除系统误差，x_0 就是真值．但这里测量次数 $n\to\infty$ 显然只有理论上的意义，实际上测量次数总是有限的．但在等精度测量下，n 不太小，仍具有实际上的意义．这时称

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$$

为最佳值(算术平均值)．可用最佳值作为真值的近似值．

根据统计学理论，采用标准误差来评估测量值的精密度更具有实际意义．标准误差

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

标准误差的意义是，诸测量值落在 $\overline{x}\pm\sigma_x$ 区间内的概率为 68.3%，落在 $\overline{x}\pm3\sigma_x$ 区间内的概率为 99.7%. $3\sigma_x$ 称为极限误差，一般不常使用.

随机误差决定了测量结果的精密度. 随机误差大，精密度差，反之精密度高. 因此评估测量结果的精密度十分重要.

3. 测量结果的精确度评估

系统误差决定了测量结果的准确度. 随机误差决定了测量结果的精密度. 评价测量的最终结果用精确度表示，它是由系统误差与随机误差共同决定的. 统计理论证明，测量值的误差

$$S_x=\sqrt{\sigma_x^2+\Delta_x^2}$$

其中 σ_x 为标准误差（随机误差），Δ_x 为仪器误差（系统误差主要考虑仪器误差）.

实际上，测量值的误差并不能直接评价精确度，还应注意到测量值本身的大小，因此精确度具有相对的意义. 常用相对误差来评估测量值的精确度. 设测量值为 x（多次测量时为 $\overline{x}$），其误差为 S_x，则相对误差

$$E_x=\frac{S_x}{x}\times100\%$$

相对误差也称百分误差，它指出了测量值不确定度的程度. 进一步的误差研究还用不确定度来表示误差.

应该强调的是，只有用相对误差来评估测量值的精确度才具有完满的实际意义.

另一种评估测量值精确度的方法是用测量值与公认值进行比较：

$$E=\frac{|\text{测量值}-\text{公认值}|}{\text{公认值}}\times100\%$$

三、直接测量的误差估计与测量结果的表示方法

（一）多次测量

设在相同条件下对某一物理量进行多次重复的等精度（用同一台仪器）测量，测量值分别为 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$. 可用下列方法进行处理：

1. 求最佳值

$$\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$$

2. 估算标准误差

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2}{n(n-1)}}$$

3. 估计仪器误差 Δ_x

(1) 查仪器说明书或使用手册,取得该仪器的示值误差,即 Δ_x;

(2) 无资料可查时,Δ_x 可取仪器分度值的一半（有时也取分度值).

4. 估算测量值的误差

$$S_x = \sqrt{\sigma_x^2 + \Delta_x^2}$$

5. 测量结果表示

在任何情况下测量结果均须表示成

$$\bar{x} \pm S_x = \cdots$$

6. 评估测量值的精确度

测量值的相对误差表示成

$$E_x = \frac{S_x}{\bar{x}} \times 100\% = \cdots$$

相对误差一般规定取两位有效数字，如 3.5%,0.081%.

(二)单次测量

某物理量单次测量值为 x ,可用下列方法进行处理：

1. 估计仪器误差 Δ_x

(1) 查资料中的测量仪器的示值误差，即 Δ_x;

(2) 无资料可查时,Δ_x 取仪器分度值的一半（或分度值).

2. 估算标准误差

$$\sigma_x = \frac{\text{分度值}}{\sqrt{3}}$$

3. 估算测量值的误差

$$S_x = \sqrt{\sigma_x^2 + \Delta_x^2}$$

4. 测量结果表示

$$x \pm S_x = \cdots$$

5. 评估测量值的精确度

$$E_x = \frac{S_x}{x} \times 100\% = \cdots$$

四、间接测量的误差估计与结果的表示方法

由于间接测量值是直接测量值的映射，因此间接测量值的误差也是直接测量值的误差的映射. 在精确测量中，直接测量值的误差相对于该测量值来说是微小的，故间接测量的误差与直接测量的误差之间的映射关系可用微分法求得.

设间接测量量 N 与直接测量量 $x,y,z,\cdots$ 有函数关系

$$N = f(x,y,z,\cdots)$$

则可用下列步骤估算 N 的误差并表示测量结果：

1. 求 N 的最佳值

$x,y,z,\cdots$ 的最佳值分别为 $\bar{x},\bar{y},\bar{z},\cdots$. 若是单次测量值即为 $x,y,z,\cdots$.

$$\overline{N} = f(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\cdots)$$

2. 间接测量的误差

$$S_N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 S_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 S_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 S_z^2 + \cdots}$$

$$E_N = \frac{S_N}{\overline{N}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{S_x}{f}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \left(\frac{S_y}{f}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \left(\frac{S_z}{f}\right)^2 + \cdots}$$

两种特别情况：

(1) 若 $N=ax+by+cz+\cdots$($a,b,c,\cdots$为系数),则

$$S_N = \sqrt{a^2S_x^2 + b^2S_y^2 + c^2S_z^2 + \cdots}$$

当 $a=b=c=\cdots=\pm 1$ 时，

$$S_N = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 + \cdots}$$

后求

$$E_N = \frac{S_N}{\overline{N}} \times 100\%$$

(2) 若 $N=x^a y^b z^c \cdots$($a,b,c,\cdots$为常数),则

$$E_N = \sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2 S_x^2 + \left(\frac{b}{y}\right)^2 S_y^2 + \left(\frac{c}{z}\right)^2 S_z^2 + \cdots}$$

$$= \sqrt{a^2E_x^2 + b^2E_y^2 + c^2E_z^2 + \cdots}$$

当 $a=b=c=\cdots=\pm 1$ 时，

$$E_N = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 + \cdots}$$

后求

$$S_N = E_N \cdot N$$

表 1－1 为常用函数的误差传递公式，供未学习过微积分的同学参考使用.

表 1-1　常用函数的误差传递公式

函数表达式	误差 S_N	相对误差 $\frac{S_N}{N}$
$N=x+y$	$\sqrt{S_x^2+S_y^2}$	$\sqrt{\frac{S_x^2+S_y^2}{(x+y)^2}}$
$N=x-y$	$\sqrt{S_x^2+S_y^2}$	$\sqrt{\frac{S_x^2+S_y^2}{(x-y)^2}}$
$N=x\cdot y$	$\sqrt{y^2S_x^2+x^2S_y^2}$	$\sqrt{\left(\frac{S_x}{x}\right)^2+\left(\frac{S_y}{y}\right)^2}$
$N=\frac{x}{y}$	$\sqrt{\frac{S_x^2}{y^2}+\frac{x^2S_y^2}{y^4}}$	$\sqrt{\left(\frac{S_x}{x}\right)^2+\left(\frac{S_y}{y}\right)^2}$
$N=\frac{x^ky^m}{z^n}$ (k、m、n 为常数)	$\sqrt{\left(\frac{kx^{k-1}y^m}{z^n}\right)^2S_x^2+\left(\frac{mx^ky^{m-1}}{z^n}\right)^2S_y^2+\left(\frac{nx^ky^m}{z^{n+1}}\right)^2S_z^2}$	$\sqrt{k^2\left(\frac{S_x}{x}\right)^2+m^2\left(\frac{S_y}{y}\right)^2+n^2\left(\frac{S_z}{z}\right)^2}$
$N=kx$(k 为常数)	kS_x	$\frac{S_x}{x}$
$N=\sqrt[k]{x}$(k 为常数)	$\frac{1}{k}x^{\frac{1}{k}-1}S_x$	$\frac{1}{k}\frac{S_x}{x}$
$N=x^n$(n 为常数)	$nx^{n-1}S_x$	$n\frac{S_x}{x}$
$N=\ln x$	$\frac{S_x}{x}$	$\frac{S_x}{x\ln x}$
$N=\cos x$	$\lvert\sin x\rvert S_x$	$\lvert\tan x\rvert S_x$
$N=\sin x$	$\lvert\cos x\rvert S_x$	$\lvert\cot x\rvert S_x$

五、测量误差的意义

由于测量总不可能绝对精确，因此测量误差便成为评价测量结果精确程度的重要依据. 正确有效的测量不但要给出测量值，而且要给出测量值的误差，还要注明单位. 写成

$$N\pm S_N\text{(单位)}$$

的形式. 这里的'＋''－'并不是'加'和'减'的意思,更不是在 N 上迭加或减去一个 S_N,而是告诉人们测量值 N 不是绝对精确的，真值很有可能不是 N,但真值离 N 不远.然而真值究竟与 N 相差多少不得而知，也无需知道. 理论告诉我们真值落在 $N-S_N$ 至 $N+S_N$ 范围内的概率为 68.3%，而且这只是在较为理想的情况下. 对于一般情况，即使采用多次测量的手段，也不过 10 次、8 次左右,以上概率也会

有一定的变化，变得较为模糊．因此没有必要在 S_N 的具体数值上争论不休．

在物理实验中，初步规定估算的误差只保留一位有效数字．为了保证真值落在 $N \pm S_N$ 内的概率不至于太小，S_N 保留一位有效数字，且“只进不舍”．顺便说明的是，分析误差的理论和方法还有许多种．这里介绍的方法要求同学们在物理实验中严格实施．至于将来碰到误差问题，应具体问题具体分析，在积累了较为丰富的理论知识和实践经验后采用最佳的方法处理误差．

六、测量值的有效数字表示

1．有效数字

正确而有效地表示测量结果的数字称为有效数字．测量结果的有效数字表示不但应给出测量值，而且还应粗略地给出该测量值的误差范围．

有效数字由若干位准确数字和一位存疑数字组成．例如用一米尺测量某物体的长度为 52.46 cm，其中 50 cm，2 cm，4 mm 均有刻度指示，无可争议．但毫米下没有刻度，0.6 mm 是估读出来的，无法保证其准确性，就成了存疑数字．但‘存疑’具有广泛的意义，估读数固然存疑，但存疑数字不一定是估读出来的．例如间接测量值的有效数字，其最后一位应为存疑数字，显然与估读无关．有效数字的准确数字可以是零，存疑数字（最后一位）也可以是零．如刚好在刻度线上读数时就应该取零．特别强调的是在等精度测量，即使用同一仪器的同一档测量时，各测量值的存疑数字应该在同一位上．如同一米尺测量两长度分别为 68.30 cm 和 0.84 cm，在同一位上的 0 和 4 均为存疑数字．

有效数字的位数从第一位不为零的数字开始数起．例如：

52.46 cm 为四位有效数字；

0.004 00 kg 为三位有效数字；

3 小时 47 分钟为三位有效数字．

有效数字的位数是由误差决定的．在测量结果 $N \pm S_N$ 中，N 为有效数字，其准确数字误差为零，可信度是 100%，而存疑数字是不可信的，存在着误差．因此误差决定了有效数字中哪一位是存疑数字．误差与存疑数字都只取一位有着共同的现实意义．在 $N \pm S_N$ 中，N 的最后一位（存疑数字）与 S_N 对齐也是理所当然的．

2．有效数字的记录

(1) 记录有效数字时，首先应确定存疑数字的位数，记录时写到存疑数字就可以了．有效数字不允许没有存疑数字，也不允许存疑数字后面再有数字．

(2) 单位换算或小数点移动时，不得影响有效数字的位数．如 52.46 cm = 524.6 mm = 0.524 6 m，它们均为四位有效数字．

(3) 科学记数法,大于等于 100 或小于 0.1 的数据常使用科学记数法.规范的科学记数法是在小数点前面只留下一位不为零的数字，其值用 10 的整数幂指数表示.如：

$5.26\ \mathrm{cm}=5.26\times10^{-2}\ \mathrm{m}=5.26\times10^{-5}\ \mathrm{km}=5.26\times10^{4}\ \mu\mathrm{m}$

带有误差的有效数字在括号内写上×.××±0.0× ,再后缀 10 的整数幂指数.如：

$52.6\pm0.5\ \mathrm{mm}=(5.26\pm0.05)\times10^{-2}\ \mathrm{m}$

3. 有效数字的运算法则

总的原则是若干个有效数字经过一系列的数学运算后，最后结果的有效数位数的确定随最大一位存疑数字终止.

(1) 几个有效数字作加减运算时，其结果的有效数字位数以参加运算的各数中最大位存疑数字为准取齐.例：

$1.518+17.5+6.18-4.2316=21.0$

(2) 几个有效数字作乘除运算时，其结果的有效数字位数与参加运算的位数最少的数字位数相同.例：

$32.07\times0.516=16.5$

(3) 乘方或开方后的有效数字位数与底数相同.例：

$4.32^{4}=348=3.48\times10^{2}$

$\sqrt{52.31}=7.232$

(4) 对某有效数字取对数，结果中小数部分的位数与真数的位数相同.

例：$\lg 4.803=0.6815$

$\ln 39.7=3.681$

(5) 指数 e^{x}、10^{x} 的运算结果,小数点前保留一位非零数,小数部分的位数与 x 的小数点后的位数相同（包括紧接小数点后的零).例：

$10^{0.23}=1.70$

$e^{11.2}=7.3\times10^{4}$

(6) π、e、$\sqrt{2}$等常数参与运算时，可认为其有无限多位有效数字，故可不考虑它的位数问题.

(7) 三角函数运算结果的有效数字位数与自变量相同.例：

$\sin30°0'=\sin30°00'=0.5000$

一般情况下，都应按照以上规则进行有效数字的运算.只有参加运算的数据给出了误差,并按照间接测量的误差估算方法求得了结果的误差(一位),才可根据结果的误差确定结果的有效数字位数.

4. 尾数的截留规则

有效数字运算的结果必须并且只需保留一位存疑数字，其后的尾数去掉时，采用‘四舍六入五凑偶’的规则，即小于 5 的数字全部舍掉，大于 5 的数字舍去时‘进1”，只有 5 舍去时须使它前面的数成为偶数. 如：

3. 485 39→3. 48

3. 4750→3. 48

七、测量及数据处理举例

例 测量钢质圆柱体的密度.

直接测量圆柱体的直径 d，高 h，所用仪器为游标卡尺. 查游标卡尺的分度值为 0. 02 mm，示值误差为 0. 02 mm. 根据游标卡尺的有效数字读数规则，每一读数均应读到毫米下两位.

直接测量圆柱体的质量 m，所用仪器为分度值 0. 02 g 的天平，查示值误差为 0. 02 g，故 m 的读数应读到克以下两位. 为了消除天平不等臂引起的系统误差，将圆柱体分别放置在左右两盘各测一次.

测量数据见表 1－2.

表 1－2　圆柱体直径、高、质量的测量数据

测量次数	1	2	3	4	5	6
d(mm)	14. 92	14. 96	14. 94	14. 98	14. 92	14. 96
h(mm)	39. 94	39. 98	39. 92	40. 02	40. 00	39. 96
m(g)	55. 28	55. 20				

数据处理：

1. 求最佳值

$d=14.95$ mm

$h=39.97$ mm

$m=\sqrt{m_1 m_2}=55.24$ g（根据不等臂天平测量原理）

2. 估算标准误差

$$\sigma_d=\sqrt{\frac{\sum\limits_{k=1}^{6}(d_k-\bar{d})^2}{6\times 5}}$$

$$=\left[\frac{0.03^2+0.01^2+0.01^2+0.03^2+0.03^2+0.01^2}{6\times 5}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$=0.01\ \text{mm}$

$$\sigma_h=\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{6}(h_k-\bar{h})^2}{6\times5}}$$

$$=\left[\frac{0.03^2+0.01^2+0.05^2+0.05^2+0.03^2+0.01^2}{6\times5}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$=0.016\ \text{mm}$

因质量是分两盘各称一次，故不能算是多次测量.

$$\sigma_m=\frac{分度值}{\sqrt{3}}=\frac{0.02}{\sqrt{3}}=0.012\ \text{g}$$

3. **仪器误差**

$\Delta_d=\Delta_h=0.02\ \text{mm}$

$\Delta_m=0.02\ \text{g}$

4. **估算直接测量值的误差**

$S_d=\sqrt{\sigma_d^2+\Delta_d^2}=\sqrt{0.01^2+0.02^2}=0.023\ \text{mm}$

$S_h=\sqrt{\sigma_h^2+\Delta_h^2}=\sqrt{0.016^2+0.02^2}=0.026\ \text{mm}$

$S_m=\sqrt{\sigma_m^2+\Delta_m^2}=\sqrt{0.012^2+0.02^2}=0.024\ \text{g}$

计算的中间过程可多取一位，以保证最后结果的精确度.

5. **计算密度的最佳值**

$$\bar{\rho}=\frac{4\bar{m}}{\pi\bar{d}^2\bar{h}}=\frac{4\times55.24}{\pi\times14.95^2\times39.97}=7.873\times10^{-3}\text{g/mm}^3$$

6. **估算密度的误差**

由于函数关系完全是乘除运算，故先估算相对误差.

$$E_\rho=\sqrt{E_m^2+2^2E_d^2+E_h^2}$$

$$=\left[\left(\frac{0.024}{55.24}\right)^2+\left(\frac{2\times0.023}{14.95}\right)^2+\left(\frac{0.026}{39.97}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$=3.17\times10^{-3}$

$=0.32\%$

$S_\rho=E_\rho\cdot\bar{\rho}=7.873\times10^{-3}\times0.32\%=0.03\times10^{-3}\text{g/mm}^3$

7. **结果表示**

金属圆柱体的密度

$\bar{\rho}\pm S_\rho=(7.87\pm0.03)\times10^{-3}\text{g/mm}^3$

$=(7.87\pm0.03)\times10^{3}\ \text{kg/m}^3$

$E_\rho=0.32\%$

结果表示中，ρ 的有效数字位数视 S_ρ 而定，因为是最终测量数据. S_ρ 只允许取一位. 单位应该使用国际单位制.

八、数据处理的常用方法

1. 列表法

在表格中按一定顺序把变量排列出来.

例：电阻上的电流与其两端电压之间的关系

U(V)	0	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00
I(mA)	0	10.2	19.8	30.3	40.1	49.7	59.9	70.1

2. 作图法

在坐标系中，用确定坐标的点表示测量数据，并将所有的点连成一条圆滑的曲线.

用作图法处理实验数据时应按照严格的规定进行：

(1) 根据需要选用坐标纸. 最常用的是直角坐标纸，还可选用特殊坐标纸，如对数坐标纸、半对数坐标纸等.

(2) 以横坐标表示自变量，以纵坐标表示因变量. 轴末端标明该轴表示的物理量的名称或符号，在其后的括号内注明单位.

坐标轴是否从零开始，视具体情况而定.

(3) 各坐标轴的分度尽可能达到测量值的最小一位准确数. 同一精度的准确数字都应在图上方便地找出它们的位置. 故分度值一般不用 3×10^n，6×10^n，9×10^n，7×10^n（$n\in Z$）表示，以免与其同一精度的 1×10^n，2×10^n，4×10^n，5×10^n，8×10^n 找不到确切的位置. 标度常以 10 分度或 20 分度一标，只标整数，10^n 可作为单位的一部分.

(4) 标出测量点并描成曲线

用削尖的铅笔在坐标图上准确标出测量点，常用"×"、"+"或"⊙"作标志，一般不同曲线上所示标志也不同，以示区分. 描绘的曲线应圆滑. 曲线不一定通过测量点，但必须紧靠测量点，并从这些点当中穿过，让测量点尽量均匀分布在曲线两边.

(5) 图的名称、作者、绘制日期

应该用中文完整地在图上写出图的名称、作者、绘制日期. 书写之处要不影响图的结构和美观，且要醒目、易找.

3. 图解法

作完图后有时要在图上求解某物理量，称为图解法. 这里仅介绍图线为直线时的图解法. 该图解法经常要求解直线的斜率和截距及其与之相关的物理量.

(1) 求解截距

直线与坐标轴有交点时交点的坐标即为截距. 直线达不到坐标轴时可予以延长至与轴相交.

(2) 求解斜率

在直线的实线部分上取两点，让这两点间的距离尽可能地长一些，并且一般不选原先测量的点. 读出它们的坐标，并由坐标求得该直线的斜率. 值得注意的是这里的斜率一般都是有物理量单位的，不可认为"斜率无单位".

4. 逐差法（两组逐差法）

如果两物理量呈线性关系 $y=ax+b$,且自变量是等间距变化的,可以并且应该用逐差法处理数据. 这样可以充分利用多点测量数据，起到减小间接测量误差的作用.

逐差法处理数据的方法如下：

(1) 将多点测量数据按大小排列，数据最好取偶数个；

(2) 把数列从中间分割为等个数的两组；

(3) 将两组中按排列顺序的对应项依次相减得逐差值（取绝对值）；

(4) 求所有逐差值的平均值.

设测量数据点有 $2n$ 个，即(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_n,y_n)，(x_{n+1},y_{n+1})，…，(x_{2n},y_{2n}).

前组：$x_1,x_2,\cdots,x_n$；　　$y_1,y_2,\cdots,y_n$

后组：$x_{n+1},x_{n+2},\cdots,x_{2n}$；　　$y_{n+1},y_{n+2},\cdots,y_{2n}$

对应项逐差：$\Delta x_1=|x_{n+1}-x_1|$　　$\Delta y_1=|y_{n+1}-y_1|$

$\Delta x_2=|x_{n+2}-x_2|$　　$\Delta y_2=|y_{n+2}-y_2|$

……

$\Delta x_n=|x_{2n}-x_n|$　　$\Delta y_n=|y_{2n}-y_n|$

求平均值 $$\overline{\Delta x}=\frac{\Delta x_1+\Delta x_2+\cdots+\Delta x_n}{n}$$

$$\overline{\Delta y}=\frac{\Delta y_1+\Delta y_2+\cdots+\Delta y_n}{n}$$

则 $a=\overline{\Delta y}/\overline{\Delta x}$.

九、误差分析对测量工作的指导作用

总的说来，测量的整个过程都与误差休戚相关. 测量工作开始前就要考虑误差问题；测量读数的有效数字位数受测量误差影响；测量数据的处理几乎一直在与误差打交道，测量工作结束后还要反过来分析误差产生的原因，总结测量工作的成败,提出改进的方案等.

1. 误差分配等作用原理

系统误差主要由测量仪器引起，且很难消除.如果一间接测量量需要直接测量多项物理量,而有的仪器精度高、准确度高,有的仪器精度低、准确度低,结果的准确度主要决定于精度差的仪器的准确度，势必造成精度高的仪器（价格相对较高）的性能的浪费. 因此误差分配等作用原理就是希望将最终测量结果的误差尽可能平均分配在各直接测量的物理量上，这就要求在选择测量仪器时加以认真的调整. 如前面测量金属圆柱体密度的例子，采用游标卡尺测金属圆柱体的直径 d 和高 h. 由分析看出 d 的误差偏大，况且在分式中还有 d^2 ,使 d 的误差在 ρ 的误差当中占有很大的权重. 倘若换用精度更高的螺旋测微计($\Delta_{仪}=0.004\ \mathrm{mm}$) 测 d, ρ 的误差会减小许多.

2. 测量误差的最大作用是评估测量结果的可信度，即精确度（或不确定度），其中包括准确度和精密度.

3. 指导改进实验的方向

准确度差——系统误差有待改善；

精密度差——随机因素有待改善.

4. 指导实验方法、实验措施的改进

实验手段的更新、实验方法的改进应有利于测量误差的减小. 一个优秀的实验工作者应不断研究、改善实验条件,提高测量的精确度. 社会进步也由此得以体现.

习题

1. 纠正一些错误的测量结果表示：

(1) $m=7.358\pm0.15\ \mathrm{g}$

(2) $I=(3.745\times10^{-2}\pm5.67\times10^{-4})\mathrm{A}$

(3) $L=8.05\pm0.008\ \mathrm{m}$

(4) $v=347\pm0.3\ \mathrm{m/s}$

(5) $R=52\,375\pm500\ \Omega$

2. 按有效数字运算规则，计算下列各式：

(1) $78.3754-2.3$

(2) 85.26×9.3

(3) $2.5\times 10^3-27$

(4) $\frac{\pi}{4}\times(1.95)^2$　　　　(4 是常数)

(5) $\frac{1.36^2\times 8.750+2.3}{23.5-14.78}-93.25\times 0.835-17$

(6) $\lg 135+\sqrt{27.04}$

(7) $3.267\times 10^{-6}\times\sin 19°2'$

3. 米尺的示值误差为 0.5 mm,今单次测得一长方形木板长 a 为 98.32 cm,宽 b 为 26.47 cm. 求该木板的面积 S,并将结果表示出来.

4. 用示值误差及分度值均为 0.02 mm 的游标卡尺和感量及示值误差均为 0.01 g 的天平对一铝质小球进行测量，测得数据如下：

次数	1	2	3	4	5	6
直径 d(mm)	19.04	19.02	19.08	19.04	19.02	19.06
质量 m(g)	9.76	9.79	9.77	9.75	9.80	9.73

试求铝球的密度,写出测量结果.

5. 两电阻的阻值分别为 $R_1\pm S_1$、$R_2\pm S_2$,将两电阻并联后阻值为 R,有 $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$. 试求 R 的误差 S.