教育部教育管理信息中心书刊中心　组编

21世纪高等教育系列教材(理工类)

大学物理实验

主　编　代玉萍　王福芳　王时彪

兵器工业出版社

内容简介

本书内容包括绪论和力学、热学、电学、光学等实验的27个题目，教师可以根据实际情况选择其中的实验进行教学安排。有些实验可以安排学生选做或自行设计。每个实验后附有思考题，可供学生及教师参考，以启迪思维。本书物理学的计量单位采用法定计量单位。为了便于使用，书中附有物理量的常用表。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理实验/代玉萍，王福芳，王时彪主编. —北京：兵器工业出版社，2006.4

ISBN 7-80172-645-6

Ⅰ.大... Ⅱ.①代...②王...③王... Ⅲ.物理学—实验—高等学校—教材 Ⅳ.04-33

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第025226号

出版发行：兵器工业出版社
发行电话：010-68962596 68962591
邮　　编：100089
社　　址：北京市海淀区车道沟10号
经　　销：各地新华书店
印　　刷：安徽蚌埠市广达印务有限公司
版　　次：2006年4月第1版第1次印刷
印　　数：1—5000

责任编辑：林利红
封面设计：水木时代(北京)图书中心
责任校对：郭　芳
责任印制：王　绛
开　　本：787×1092 1/16
印　　张：8.25
字　　数：210千字
定　　价：12.50元

前　　言

本书是根据大专院校物理教学大纲的特点和近年来物理实验的发展趋势编写的。全书以大学本、专科非物理系学生为对象，以加强学生的动手能力、创新能力和素质培养为目的。为适应现代化进程发展的需要，我们引进了一些反映科技新成果的实验内容，有些实验增加了一些更灵活的内容，有些实验引进了计算机来处理或采集数据。同时对原有实验进行了适当的删除，并增加了一些设计性、综合性实验，力求使教材与教学方法、教学模式的改革相配套。在知识取材上反复推敲，实验内容上精心设计，使本书内容新颖、知识面宽、实用性突出，同时书中还注意到物理实验独立设课的特点，独立构成完整的教学体系。

本书内容包括绪论和力学、热学、电学、光学等实验的27个题目，教师可以根据实际情况选择其中的实验进行教学安排。有些实验可以安排学生选做或自行设计。每个实验后附有思考题，可供学生及教师参考，以启迪思维。本书物理学的计量单位采用法定计量单位。为了便于使用，书中附有物理量的常用表。

本书由代玉萍、王福芳、王时彪任主编，田英玉、程宇、于利民、王德丰为副主编。绪论、实验七、实验十二、实验十九、实验二十三、实验二十七由王时彪编写；实验一、实验二、实验四、实验十由王福芳编写；实验十一、实验十三、实验十七、实验十八、实验二十一、实验二十四由代玉萍编写；实验五、实验六、实验十六、实验二十五、实验二十六由田英玉编写；实验十五、实验二十、实验二十二由程宇编写；实验 八、实验九由于利民编写；实验三、实验十四由王德丰编写。

全书由徐福元教授主审。

由于我们水平有限，书中不妥之处恳请读者批评指正。

编　者

2006年4月

目　录

绪　论……………………………………………………………………（1）

第一节　物理实验的目的和作用……………………………………（1）

第二节　测量与误差…………………………………………………（2）

第三节　测量结果的表示　不确定度的估算………………………（4）

第四节　有效数字及其数据处理 …………………………………（11）

思考题 ………………………………………………………………（16）

基础实验部分 …………………………………………………………（18）

实验一　长度的测量 ………………………………………………（18）

实验二　固体密度的测量 …………………………………………（22）

实验三　用自由落体法测量重力加速度 …………………………（25）

实验四　杨氏模量的测定 …………………………………………（27）

实验五　三线摆法测物体转动惯量 ………………………………（31）

实验六　气轨上的力学实验 ………………………………………（35）

实验七　固体线膨胀系数的测定 …………………………………（44）

实验八　利用电桥测量电阻 ………………………………………（46）

实验九　用伏安法测量电阻 ………………………………………（49）

实验十　用电位差计测量电源的电动势 …………………………（52）

实验十一　静电场的模拟及描绘 …………………………………（55）

实验十二　载流圆线圈磁力线的描绘 ……………………………（58）

实验十三　螺线管磁感应强度的测定 ……………………………（60）

实验十四　铁磁材料的磁滞回线和基本磁化曲线 ………………（64）

实验十五　电子束的电子荷质比的测定 …………………………（68）

实验十六　用牛顿环测透镜的曲率半径 …………………………（73）

实验十七　分光计的调节和使用 …………………………………（77）

实验十八　光栅特性及光波波长的测定 …………………………（80）

实验十九　照相及暗室技术 ………………………………………（83）

实验二十　迈克尔逊干涉仪 ………………………………………（91）

实验二十一　单缝衍射的光强分布 ………………………………（94）

实验二十二　用密立根油滴实验测电子电荷 e …………………（98）

综合性和设计性实验部分……………………………………………（102）

实验二十三　气垫导轨实验中系统误差的分析及对测量结果的修正……（102）

实验二十四　霍尔位置传感器测量杨氏模量………………………（106）

实验二十五　验证牛顿第二定律……………………………………………………………（108）
实验二十六　透明液体折射率的测量…………………………………………………………（109）
实验二十七　黑白摄影与暗室技术……………………………………………………………（110）
附　录………………………………………………………………………………………………（112）
附录1　中华人民共和国法定计量单位 ………………………………………………………（112）
附录2　法定计量单位名词解释 ………………………………………………………………（114）
附录3　基本物理常数 …………………………………………………………………………（116）
附录4　在20°C时常用固体和液体的密度 ……………………………………………………（117）
附录5　在标准大气压下不同温度的水的密度 ………………………………………………（118）
附录6　在海平面上不同纬度处的重力加速度 ………………………………………………（118）
附录7　各种固体的弹性模量 …………………………………………………………………（119）
附录8　液体的比热容 …………………………………………………………………………（120）
附录9　在20°C时与空气接触的液体的表面张力系数 ………………………………………（120）
附录10　在不同温度下与空气接触的水的表面张力系数 ……………………………………（121）
附录11　不同温度时水的黏滞系数 ……………………………………………………………（121）
附录12　液体的黏滞系数 ………………………………………………………………………（121）
附录13　某些金属和合金的电阻率及其温度系数 ……………………………………………（122）
附录14　一些液体和光学材料的折射率 ………………………………………………………（122）
附录15　常用光源的谱线波长表（单位 nm）……………………………………………………（123）
附录16　几种显影液配方汇集 …………………………………………………………………（123）
参考文献……………………………………………………………………………………………（125）

绪　论

第一节　物理实验的目的和作用

一、物理实验的目的和作用

物理学是一门建立在实验基础上的学科。物理学的建成与发展是理论与实验相互结合的结果。物理学的原理、定律是在总结了大量实验事实的基础上概括出来的，即使根据理论推导“毫无破绽”的结论，也必须通过实验加以验证。只有被可重复的实验证明是正确的理论才被公认为科学理论。所以说，物理学不单是一门理论科学也是一门实验科学。物理实验本身有一套实验知识、方法、习惯和技能。物理学的理论与实验各具特色，形成了理论物理与实验物理两大分支，这也是我们把物理实验课作为一门独立课程的原因。

物理实验就是用人工的方法创造出各种特定条件的环境，按照预定的计划，顺序重现一系列物理过程或物理现象。其目的在于系统地训练学生的实验技能；熟悉常用仪器及测量工具的基本原理和结构，并能正确使用；弄懂实验的基本原理，熟悉一些物理量（如长度、质量、重力加速度、温度、电阻、电压、波长、折射率等）的测量方法。通过实际的观察和测量，加深对物理概念和规律的认识和理解，学会处理实验数据、并进行误差分析的基本能力，为后续课程中的各种实验打下良好的基础。

二、怎样做好物理实验

物理实验作为一门独立的课程，它既不是理论课程的附属，也不是单纯为验证理论的正确性而重复前人的活动，它有其自己的特点和培养目标。这门课程明显的特点就是以培养学生的动手能力为主要内容，使学生掌握科学的实验理论和方法。大多数的实验原理部分是靠学生自学完成的，因此，实验前的预习是十分必要的。如果条件允许，直接到实验室结合仪器进行预习，常常会事半功倍。物理实验包括的内容很多，对同一内容，所用方法也不尽相同，但就其程序而言却是相同的。一般可分为三个阶段，即实验前的预习；进行实验；写实验报告或论文。

1. 实验前的预习

（1）认真阅读实验课教材及有关资料，了解所用仪器的性能及使用方法（最好直接到实验室了解）。

（2）写好预习报告。其内容包括：实验名称、实验目的、实验原理、主要步骤、记录数据所需表格等。

（3）记录预习中遇到的问题和实验中的注意事项。

2. 进行实验

进行实验是指自己动手调整、安装仪器，并进行测量记录的过程。

(1) 对照教材或实验室所给资料(如说明书等)了解仪器的工作原理及用法,经教师允许后方可安装调试。

(2) 安装、调整后的仪器,经教师检查后再进行测量和记录。当数据“不佳”时要首先检查自己的操作和仪器安装是否有误,或找教师解决,切忌为了达到和理论计算一致而人为的改动数据。

(3) 记录下实验条件,如温度、湿度、气压、仪器型号、精度、组别等。

(4) 将记录的数据和实验仪器交教师检查,经允许后签字,整理好仪器,离开实验室。

3. 写实验报告

写实验报告是实验的最后一项工作,也是最重要的一项工作,一般应包含下列各项:

(1) 实验题目。

(2) 实验目的。

(3) 实验原理:要写明实验的基本理论、主要公式。

(4) 仪器设备:写明实验中所用的仪器、材料、工具等,而非教材上所列的仪器、工具。

(5) 实验的主要步骤。

(6) 实验数据:如果能列表格尽量列表格。

(7) 数据处理:要求写清楚所用公式,计算过程(要代入数据)或作图说明。

(8) 实验结果:必须包括最终结果$\overline{A}$(可用算术平均值表示);结果的误差范围Δ(用总不确定度表示);结果的准确程度E(相对不确定度)。同时要注意,一般的结果都有单位。综合起来,最终的测量结果应写成

$$A=(\overline{A}\pm\Delta)\quad(\text{单位})$$

$$E=\frac{\Delta}{\overline{A}}\times100\%$$

(9) 误差分析讨论:包括判定实验结果的不准确范围——不确定度;找出影响实验结果的主要原因;对实验结果的解释及对实验的改进意见等。

第二节 测量与误差

一、直接测量和间接测量

测量是物理实验必不可少的重要手段,物理实验离不开对物理量的测量。所谓测量就是将被测量与已知量进行比较。而这些已知量就是我们常说的计量单位。在国际单位制中(符号 SI)有七个基本单位,即长度单位米(m);质量单位千克(kg);时间单位秒(s);电流单位安培(A);温度单位开尔文(K);物质的量的单位摩尔(mol);发光强度单位坎德拉(cd)。除了基本单位外,还有辅助单位以及由七个基本单位组成的导出单位。

测量值就是将待测的物理量与基本单位(或导出单位)比较得到的倍数(或分数),如测得摆长为 1 m 的 0.725 倍,则摆长就是 0.725 m 等。一般来说,物理量的测量可分为两类:直接测量和间接测量。通过仪器或量具直接读出测量值的结果,称为直接测量。如用米尺测长度;用天平测质量等,相应的物理量称为直接测量量。由直接测量量代入公式进行计算得出测量结果,称为间接测量,相应的物理量称为间接测量量。如测定物体的密度ρ,要测出物体的质量m和体积V,然后用公式$\rho=m/V$计算密度。又如测导体的电阻R,可以用伏安法测出电阻两端的电压U和流过导体的电流I,

然后用公式 $R=U/I$ 计算出导体的电阻。当然，有的物理量既可以间接测量，也可以直接测量。这取决于实验方法和使用的仪器。如上面讲的导体的电阻，如果改用欧姆表测量，电阻 R 就成了直接测量了。

二、测量误差

不论是直接测量还是间接测量，由于测量仪器、实验条件乃至人为的原因，无论怎样精细的测量，测量结果与客观存在的“真值”之间总有一定的偏差，这个偏差称为测量误差。测量误差的大小，反映了我们的认识接近于客观真实的程度。误差存在于一切测量之中，而且贯穿测量过程的始终。根据误差的性质和产生的原因，可将测量误差分为系统误差、偶然误差（随机误差）和粗差（过失误差）三种。

1. 系统误差

系统误差是指测量结果总向一个方向偏离，其数值一定或按一定规律变化。产生这种误差的原因有以下几个方面：

（1）仪器的误差：如天平两臂不等；砝码标称质量不准；米尺、仪表盘刻度不均匀等。

（2）理论（方法）误差：这是由理论计算公式的近似或实验条件不能达到理论公式所规定的要求等原因造成的。如单摆的周期公式 $T=2\pi\sqrt{l/g}$ 成立的条件是摆角趋于零，这在实际上是办不到的。

（3）人身误差：这是由于观测者本人生理或心理特点造成的，使得测量值偏大或偏小引起的误差。

由于系统误差总是使测量结果偏大或偏小，因此多次测量求平均值并不能消除系统误差。要消除系统误差还要从产生系统误差的原因方面解决。比如，采用符合实际的理论公式；严格保证仪器和实验所要求的条件；多人重复做同一实验等。当然，造成系统误差的原因很多，每个实验都可能不一样，因此要具体问题具体分析，这有赖于实验者的理论水平和经验。

2. 偶然误差（随机误差）

由于偶然或不确定的因素所造成的每一次测量值的无规则的涨落，称为偶然误差（或随机误差）。偶然误差的存在虽然使每次的测量值大小不定，但它服从一定的统计规律：

（1）比真值大或比真值小的测量值出现的几率相等。

（2）误差较小的数据比误差较大的数据出现的几率大。

（3）绝对值很大的误差出现的几率趋于零。

因此，清除偶然误差的最好方法就是增加测量次数，用多次测量的平均值来表示测量值。

3. 粗差（过失误差）

粗差（过失误差）是指由于实验者在实验过程中粗心大意的过失行为而引起的误差。如读错数字或单位；记录写错；计算错误；操作不当等。粗差常会使测量值偏离真值很多，我们称其为“坏值”，应该剔除。粗差的产生，完全是人为的因素，只要我们做实验时严肃认真、细心操作，粗差就不会出现。

三、测量的精密度、准确度和精确度

精密度、准确度、精确度都是评价测量结果好坏的指标，它们之间既有联系，又有区别。

精密度是反映多次测量时偶然误差大小程度的量值。精密度高,说明多次测量结果比较集中,偶然误差小(但反映不出系统误差大小)。

准确度是反映测量值与真值接近程度的量。准确度高,说明多次测量的平均值偏离真值较小,测量结果的系统误差也小。

精确度是反映测量值精密度和准确度综合指标的量。测量值的精确度高,说明测量值比较集中,又都在真值附近,即测量结果的偶然误差和系统误差都很小。

图 0-1 以打靶的弹着点情况为例说明了这三个概念的意义。其中(a) 表示精密度较高,但准确度一般;(b) 表示精密度低,但平均结果较接近靶心,即准确度较高;(c) 表示精密度和准确度都较高,即精确度高。

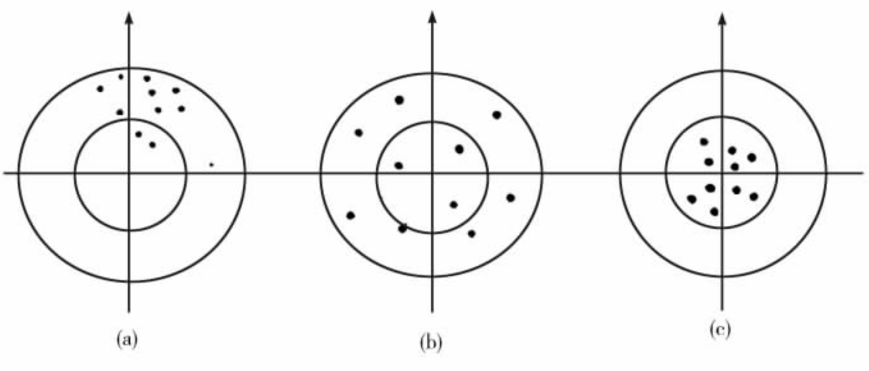

图 0-1 打靶弹着点分布图

(a) 精密度较高,准确度一般 (b) 精密度低,准确度较高 (c) 精密度和准确度都较高

一般地说,测量结果的误差应为系统误差和偶然误差的总和。它的估算值称为测量结果的不确定度。提高测量结果的精确度就是尽可能地减少系统误差和偶然误差。这是误差分析的主要任务。

第三节 测量结果的表示 不确定度的估算

一、关于不确定度的问题

“不确定度”是目前国际上普遍采用的一种评价测量好坏、估算测量误差的方法,是一种较新的物理概念。理解、掌握、运用、推广这种新思想并与实际接轨,对于从事科学研究的人员来说,有着不可推卸的责任。在物理学中全面采用不确定度体系已成了必然趋势。

1. 不确定度的概念

表示被测量的真值所处的量值范围,称为被测量的不确定度,用 Δ 表示。它表示由于测量误差的存在而对被测量值不能确定的程度。不确定度 Δ 反映了可能存在的误差分布范围,即随机误差(偶然误差) 分量和未定系统误差分量的联合分布范围。它可以近似理解为一定概率的误差限值;理解为误差分布基本宽度的一半。误差一般落在 $\pm\Delta$ 之间,落在区间$(-\Delta,\Delta)$ 之外的可能性(概率)非常小。不确定度虽与误差有联系,但又不同于误差。不确定度总是不为零的正值,而误差可能为正或为负值,也可能十分接近零(有效位数末位确定时也可能写成零)。不确定度原则上可评定出,而误差一般不能计算(只能估计)。

2. 不确定度的分类

我们在实验中得不到误差，只能用偏差来估计误差。我们把多次测量时用统计学方法计算得到偏差称为测量结果的 A 类不确定度，用 Δ_A 表示。而把用其他方法（非统计学方法）评定的偏差称为测量结果的 B 类不确定度，用 Δ_B 表示。A 类不确定度与 B 类不确定度之和称为合成标准不确定度。

二、直接测量结果及其不确定度

测量结果表示中，必须包括测量所得的被测量值 $\overline{Y}$ 和总不确定度 Δ 及测量单位，如

$$Y = \overline{Y} \pm \Delta = (910.3 \pm 0.4)\Omega$$

则表示真值（实际值）位于区间 $(909.9, 910.7)\Omega$ 之内（一般应 $\geqslant 95\%$），而真值落在该区间之外的可能性（概率）非常小。式中 $\Delta = \sqrt{\Delta_A^2 + \Delta_B^2}$。$\Delta_A$ 在测量次数 $5 < n \leqslant 10$ 时，它近似地等于标准偏差 S_N（S_N 的定义在后面介绍），即 $\Delta \approx S_N$。当测量次数分别为 2、3、4、5 或大于 10 时，可以把 S_N 分别乘以因子 9.0，2.5，1.6，1.2 或 $2\sqrt{n}$，以得到置信概率约为 95% 的 Δ_A 的值。Δ_B 是各种系统误差的估计值。由于系统误差不止一个，故有时用求和号 $\sum$ 和 Δ_{B_i} 表示，即 $\Delta_B = \sum \Delta_{B_i}$。并且假定各不确定度是独立的。一般地说，$\Delta_B$ 的值通常由实验室近似给出。

1. 单次直接测量结果及其不确定度估算

有时，由于条件所限，对某一物理量只能进行一次测量，如某特定状态下的温度等。有时，在精度要求不高的情况下，也无需多次测量，在这种情况下，测量结果就是当时的读数。而测量的不确定度通常用仪器的极限误差（误差限）Δ_{ins} 来估计。仪器的极限误差有时在出厂说明书或标牌上直接给出，可以直接引用，若仪器没有说明，可以取仪器最小刻度值（即仪器的最大误差）的一半作为仪器的极限误差，即 $\Delta_{ins} = \Delta_{仪}/2$。例如，用米尺测量长度，米尺的最小刻度 1 mm，则该仪器的极限误差可以认为是 $\Delta_{ins} = 0.5$ mm。还有一种情况，即电压表或电流表常用等级来表示其精度，电表的最大误差可以用下式来计算：

$$\Delta_{仪} = 满量程 \times 级别\% \tag{0-1}$$

例如：一个满量程为 10 mA 的 0.2 级的电流表的测量最大误差 $\Delta_{仪} = 10\ \text{mA} \times 0.2 = 0.02\ \text{mA}$。而该仪器的极限误差 $\Delta_{ins} = \Delta_{仪}/2 = 0.01\ \text{mA}$。

2. 多次测量的结果及其不确定度

如果条件允许，要得到较精确的测量值，常常需要对直接测量量进行多次测量。测量的结果一般用算术平均值与总不确定度一起表示。

(1) 以算术平均值代表测量结果

在相同条件下，如果对某物理量进行了 k 次测量，每次的测量值分别为 $N_1, N_2, \cdots, N_k$。则算术平均值（即测量结果）为

$$\overline{N} = \frac{1}{k}(N_1 + N_2 + \cdots + N_k) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} N_i \tag{0-2}$$

由误差的统计理论可知，在忽略系统误差的情况下，当测量次数无限增加时，算术平均值为最佳值或近真值。

(2) 多次测量结果的不确定度

由误差的定义可知，它等于测量值与“真值”的偏差。由于实际的测量总是有限次的，故真值并不确定，所以误差也无法确定，只能估计。

① 多次测量结果的标准偏差

我们把多次测量所得到的测量值 $N_1, N_2, \cdots$ 称为测量列，有限次（k 次）观测中，测量结果的标准偏差 S_N 定义为

$$S_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(N_i - \overline{N})^2}{k-1}} \tag{0-3}$$

而测量结果算术平均值$\overline{N}$ 的标准偏差 $S_{\overline{N}}$ 定义为

$$S_{\overline{N}} = \frac{S_N}{\sqrt{k}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(N_i - \overline{N})^2}{k(k-1)}} \tag{0-4}$$

标准偏差能够较好的表示出测量值的分散程度。因此世界上多数国家的物理科学论文都采用标准偏差来评价数据。在物理实验中，用 S_N 近似表示Δ_A，而用 Δ_{ins} 近似表示 Δ_B，作为直接测量量多次测量结果的总不确定度。

② 多次测量结果的表示

通常我们把测量结果及其不确定度写成 $N = \overline{N} \pm \Delta N$，或 $N = \overline{N}(1 \pm \frac{\Delta}{\overline{N}} \times 100\%)$ 形式，其中 $\overline{N}$ 是多次测量的算术平均值，Δ 是总不确定度，在普通物理实验中 $\Delta = \sqrt{S_N^2 + \Delta_{ins}^2}$。这样计算的结果的置信概率约为 95%。由于偏差仅是对误差的估算，并不等于误差，只有测量次数越多，偏差才接近误差，所以，在测量次数不多的情况下（如 50 次以下）不确定度的结果一般只取一位或两位数字，由于我们的实验测量次数都不多，故今后计算不确定度时只取一位数字。

例如，在长度测量实验中，测得铁块的长度数据记入表 0-1。若 $\Delta_{ins} = 0.001$ cm，写出测量结果。

表 0-1　数据表

实验次数	1	2	3	4	5	6	平均值$\overline{l}$
l_i/cm	8.123	8.129	8.118	8.124	8.120	8.124	8.123
$\lvert l_i - \overline{l} \rvert$/cm	0	0.006	0.005	0.001	0.003	0.001	

$$S_i = \sqrt{\frac{\sum(l_i - \overline{l})^2}{k-1}} = \sqrt{\frac{0^2 + 6^2 + 5^2 + 1^2 + 3^2 + 1^2}{6-1}} \times 10^{-3} \approx 0.0038 \approx 0.004 \text{ cm}$$

$$\Delta = \sqrt{S_i^2 + \Delta_{ins}^2} = \sqrt{4^2 + 0.1^2} \times 10^{-3} \approx 0.004 \text{ cm}$$

最终测得铁块的长度为：$l = \overline{l} \pm \Delta_l = (8.123 \pm 0.004)$cm

应该注意的是，我们不能将上面的表示理解为 l 只有 8.123 cm + 0.004 cm = 8.127 cm 和 8.123 cm − 0.004 cm = 8.119 cm 两个值。8.123 cm 表示的是铁块长度的最佳值，真值在 8.119～8.127 cm 的范围内的可能性最大。不同的估算方法得到的 Δ，表示在$\overline{N} \pm \Delta$ 范围内包含真值的不同几率。显然，Δ 越小，测量越精确。有一种特殊情况，即重复测量几次，测量值不变，这并不说明误差为零，而是说明偶然误差小，仪器精度不足以反映其微小差异，此时应当作单次测量处理。

③ 相对不确定度

相对不确定度定义为总不确定度 Δ 与测量值$\overline{N}$ 之比，再乘以 100%，用 E 表示为

$$E=\frac{\Delta}{\overline{N}}\times 100\% \tag{0-5}$$

相对不确定度是无量纲的，它适用于对不同物理量测量不确定度大小的比较，相对不确定度越小，说明结果的可靠性越大。例如用米尺测得物体的长度为(1.00 ± 0.05)cm；用天平称得物体的质量为(50.15 ± 0.01)g，要比较这两个结果的可靠性只能用相对不确定度。前者为 0.5%，后者为 0.02%，说明后者的可靠性比前者大。

在普通物理实验中，有些物理量有公认的标准值，称为约定真值，用 A 表示。如物体的密度、物质的比热、电阻率等。在计算这些量测量值的相对不确定度时，其表达式为

$$E=\frac{|\overline{N}-A|}{A}\times 100\% \tag{0-6}$$

三、间接测量量的结果及其不确定度的估算

在物理实验中，有些量只能通过将直接测量量代入公式计算才能得到结果，我们称这一结果为间接测量量。由于直接测量量有误差，所以间接测量量也必然有误差，我们称其为误差的传递。

1. 间接测量结果不确定度的合成

设间接测量量 N 和 n 个直接测量量 $x,y,z,\cdots$ 的函数关系为

$$N=f(x,y,z,\cdots) \tag{0-7}$$

N 的最终结果仍应写成$\overline{N}\pm\Delta_N$ 的形式，其中 N 的最佳值应写成

$$\overline{N}=f(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\cdots)$$

即用各直接测量量的最佳值代入公式计算 N 的最佳值。那么，N 的不确定度又该如何估算呢？

如果 $x,y,z,\cdots$ 之间为和差关系时，对(0 − 7) 式进行全微分有

$$\mathrm{d}N=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z+\cdots \tag{0-8}$$

如果 $x,y,z,\cdots$ 之间为商积关系，则对(0 − 7) 式取对数后再求全微分有

$$\ln N=\ln f(x,y,z,\cdots) \tag{0-9}$$

式(0 − 8) 和式(0 − 9) 表明：当 $x,y,z,\cdots$ 有微小改变 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z,\cdots$ 时，N 就改变 $\mathrm{d}N$。可以证明，各直接测量量的标准差 $S_x,S_y,S_z,\cdots$ 与间接测量量标准差 S_N 的关系为

$$S_N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2S_x^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2S_y^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2S_z^2+\cdots} \tag{0-10}$$

或

$$\frac{S_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right)^2S_x^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial y}\right)^2S_y^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial z}\right)^2S_z^2+\cdots} \tag{0-11}$$

从上式出发，人们公认：N 的一种以标准差形式表示的不确定度，其合成(传递) 公式形同式(0 − 10)，也是各分量标准差与偏导数之积的方和根。考虑到基础课的特殊性，我们通常采用和式(0 − 10) 同形的总不确定度传递的近似公式为式(0 − 12) 或式(0 − 13)，即

$$\Delta_N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\Delta_x^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\Delta_y^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\Delta_z^2+\cdots} \tag{0-12}$$

$$\frac{\Delta_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right)^2S_x^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial y}\right)^2S_y^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial z}\right)^2S_z^2+\cdots} \tag{0-13}$$

式中　$\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z,\cdots$　　各直接测量量 $x,y,z,\cdots$ 的总不确定度(即合成标准不确定度)。

一般地说，当 $f(x,y,z,\cdots)$ **中各量间为加减关系时用式**(0－12)**比较方便。若各量之间为乘除关系时，用式**(0－13)**比较方便。下面是根据上述两式列出的常用函数不确定度的传递公式，见表**0-2。

表 0-2　**常用函数不确定度传递公式**

函数表达式	不确定度传递(合成)公式
$N = x \pm y$	$\Delta = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}$
$N = x \cdot y$	$\Delta/N = \sqrt{\left(\frac{\Delta_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_y}{y}\right)^2}$
$N = x/y$	$\Delta/N = \sqrt{\left(\frac{\Delta_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_y}{y}\right)^2}$
$N = \frac{x^k y^m}{z^n}$	$\Delta/N = \sqrt{k^2\left(\frac{\Delta_x}{x}\right)^2 + m^2\left(\frac{\Delta_y}{y}\right)^2 + n^2\left(\frac{\Delta_z}{z}\right)^2}$
$N = kx$	$\Delta = k\Delta_x$
$N = \sqrt[k]{x}$	$\Delta/N = \frac{1}{k} \cdot \frac{\Delta_x}{x}$
$N = \sin x$	$\Delta = \mid \cos x \mid \Delta_x$

例 1　**已知金属环的外径** $D_2 = (3.600 \pm 0.004)$ cm，**内径** $D_1 = (2.880 \pm 0.004)$ cm，**高度** $h = (2.575 \pm 0.004)$ cm，**求环的体积** V **及其不确定度** Δ_V。

解：环体积为

$$V = \frac{\pi}{4}(D_2^2 - D_1^2)h = \frac{\pi}{4} \times (3.600^2 - 2.880^2) \times 2.575 = 9.436\ \text{cm}^3$$

环体积的对数及其偏导数为

$$\ln V = \ln\frac{\pi}{4} + \ln(D_2^2 - D_1^2) + \ln h$$

$$\frac{\partial \ln V}{\partial D_2} = \frac{2D_2}{D_2^2 - D_1^2}, \qquad \frac{\partial \ln V}{\partial D_1} = -\frac{2D_1}{D_2^2 - D_1^2}, \qquad \frac{\partial \ln V}{\partial h} = \frac{1}{h}$$

$$\left(\frac{\Delta_V}{V}\right)^2 = \left(\frac{2D_2\Delta_{D_2}}{D_2^2 - D_1^2}\right)^2 + \left(\frac{2D_1\Delta_D}{D_2^2 - D_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_h}{h}\right)^2$$

将数值代入上式，则有

$$\left(\frac{\Delta_V}{V}\right)^2 = \left(\frac{2 \times 3.600 \times 0.004}{3.600^2 - 2.880^2}\right)^2 + \left(\frac{2 \times 2.880 \times 0.004}{3.600^2 - 2.800^2}\right)^2 + \left(\frac{0.004}{2.575}\right)^2$$

$$\approx (38.1 + 24.4 + 2.4) \times 10^{-6} = 64.9 \times 10^{-6}$$

$$\frac{\Delta_V}{V} = (64.9 \times 10^{-6})^{1/2} \approx 0.0081$$

$$\Delta_V = V\frac{\Delta_V}{V} = 9.346 \times 0.0081 \approx 0.08\ \text{cm}^3$$

因此

$$V = (9.44 \pm 0.08) \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

2. **科学选择仪器**

学习误差理论：一方面是为把握测量的精确度；另一方面是要合理、经济的设计实验。对于一个

固定的测量对象，并不是仪器的精度越高结果就越好。科学选择仪器就是既保证测量的精确度又不过高地选用仪器的等级。例如我们要测量一个 2.5 V 左右的电压，手头有 0.5 级量程 15 V 和 1.0 级量程 3 V 的电压表各一块，用哪块表测量的误差小？由式(0－1)可得两块表的最大误差分别为

$$\Delta_{仪1} = 15 \times 0.5\% = 0.075\ \text{V}$$

$$\Delta_{仪2} = 3 \times 1.0\% = 0.03\ \text{V}$$

显然，用级别较低的 1.0 级电压表测量该电压时反而比用级别较高的 0.5 级电压表测量该电压产生的系统误差小。

如果不考虑其他原因引起的系统误差，只考虑仪器本身带来的误差，所谓合理的选择仪器，就是要尽量使式(0－8)或式(0－9)各项绝对值相等，也就是说，要使间接测量量的总不确定度 Δ_N 被各分不确定度均分。对式(0－8)则应有

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\Delta_x\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}\Delta_y\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\Delta_z\right| = \cdots$$

设有 n 项直接测量量，则对第 i 项有

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta_{x_i}\right| = \left|\frac{\Delta_N}{n}\right|$$

若最终结果要求总不确定度不大于 Δ_0，即 $\Delta_N \leqslant \Delta_0$，则应有下式成立：

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta_{x_i}\right| = \frac{\Delta_0}{n} \tag{0-14}$$

这样，每个仪器所引起的不确定度 Δ_{x_i} 应满足

$$\Delta_{x_i} \leqslant \frac{\Delta_0}{\left|\frac{\partial \ln f}{\partial x_i}\right| n} \tag{0-15}$$

同理，若用式(0－9)分析上述内容，则应有

$$\Delta_{x_i} \leqslant \frac{\Delta_0}{\left|\frac{\partial \ln f}{\partial x_i}\right| \sqrt{N \cdot n}} \tag{0-16}$$

式(0－15)和式(0－16)是我们科学选择仪器的主要依据。

例 2 用单摆测量重力加速度的公式为 $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$，已知 $l = 100$ cm，$T = 2$ s，要求 $\Delta_g/g \leqslant 0.2\%$，应选择怎样的仪器？

解：
$$\Delta_g/g = 0.2\% \qquad n = 2$$

由式(0－16)得
$$\frac{\Delta_l}{l} = \frac{0.002}{2} = 0.001$$

$$2\frac{\Delta_T}{T} = \frac{0.002}{2} = 0.001$$

由此要求
$$\Delta_l \leqslant 0.001 l = 0.001 \times 100 = 0.1\ \text{cm}$$

$$\Delta_T \leqslant 0.001 \cdot \frac{T}{2} = \frac{0.001 \times 2}{2} = 0.001\ \text{s}$$

由此可见，用精度为毫米的米尺测量 l，毫秒仪测量 T 就可以满足 $\frac{\Delta_g}{g} \leqslant 0.02\%$ 的实验要求。由于测周期时可以先测 n 个周期的总和，然后再求周期，如一次测得 n 个周期的时间为 t，则

$$t = nT$$

$$\frac{\Delta_t}{t}=\frac{\Delta_T}{T}$$

$$\Delta_t=\frac{\Delta_T}{T}t=n\Delta_T$$

设 $n=100$，则 $\Delta_t=100\times0.001=0.1\ \mathrm{s}$

所以，实验中只要用精度为 0.1 s 的停表去测量时间，就可以满足要求，而不一定非用较高级的毫秒仪。当然，实际测量时，为了尽量减少偶然误差，应采取多次测量的方法。

例 3　用伏安法测电阻，测试电流约为 2.5 A，电阻约为 10 Ω，欲使误差 $\Delta_R\leqslant0.15\ \Omega$ 如何选择电压表和电流表？

解：

$$R=\frac{U}{I}$$

$$U=IR=2.5\times10=25\ \mathrm{V}$$

$$\frac{\Delta_R}{R}=\frac{\Delta_U}{U}+\frac{\Delta_I}{I}\qquad n=2\qquad \Delta_0=0.15\ \Omega$$

$$\Delta_U\leqslant\frac{\Delta_0}{\left|\frac{\partial\ln f}{\partial U}\right|\overline{N}\cdot n}=\frac{\Delta_0}{\frac{R}{U}\cdot n}=\frac{0.15}{\frac{10}{25}\times2}\approx0.19\ \mathrm{V}$$

$$\Delta_I\leqslant\frac{\Delta_0}{\left|\frac{\partial\ln f}{\partial I}\right|\overline{N}\cdot n}=\frac{\Delta_0}{\frac{R}{I}\cdot n}=\frac{0.15}{\frac{10}{2.5}\times2}\approx0.019\ \mathrm{A}$$

由于 $I=2.5\ \mathrm{A}$，$U=25\ \mathrm{V}$，按指示数选在满刻度 2/3 左右的原则，可以选电流表的量程为 3 A 电压表的量程为 30 V。下面我们来确定电流表与电压表的等级。

由式(0－1)可知：

$$\text{级别}=\frac{\Delta_{\text{仪}}\times100}{\text{满量程}}=\frac{2\Delta_{\text{ins}}\times100}{\text{满量程}}$$

所以，电流表级别 $=\dfrac{2\times0.019\times100}{3}=1.27\approx1.0$ 级

电压表级别 $=\dfrac{2\times0.19\times100}{30}=1.27\approx1.0$ 级

按此选择我们估算一下不确定度为

$$\Delta_I=\frac{3\times1.0\%}{2}=0.015\ \mathrm{A}$$

$$\Delta_U=\frac{30\times1.0\%}{2}=0.15\ \mathrm{V}$$

$$\Delta_R=\sqrt{\left(\frac{\Delta_U}{U}\right)^2+\left(\frac{\Delta_I}{I}\right)^2}\cdot R=\sqrt{\left(\frac{0.15}{25}\right)^2+\left(\frac{0.015}{2.5}\right)^2}\times10=0.08\ \Omega<0.15\ \Omega$$

因此仪表选择正确。

例 4　用衍射光栅测量光的波长时，有如下关系：

$$d\sin\varphi=k\lambda$$

式中 d 是光栅常数，k 是衍射光谱的级次，φ 是衍射角，λ 是被测波长。问：在 Δ_φ 一定的情况下，最有利的测量条件是什么？

解：根据误差传递公式有

$$k\Delta_\lambda = d\cos\varphi\Delta_\varphi$$
$$\Delta_\lambda/\lambda = \cot\varphi\Delta_\varphi$$

显然，在 Δ_φ 一定时，使 Δ_λ/λ 小的条件为：φ 越大越好。

以上我们讨论了不确定度及其估算方法。在实际测量时，Δ_A 和 Δ_B 是同时存在的，不应顾此失彼。但具体问题还要具体分析。误差分析，就是要找出产生误差的主要因素，忽略次要因素并做出正确的估算。

第四节　有效数字及其数据处理

一、有效数字的一般概念

我们知道，任何一个物理量，其测量结果都由最佳值及其不确定度表示。如一个间接测量量的计算结果 $\overline{N} = 2.6\,347\,896\cdots$ cm，$\Delta_N = 0.02$ cm。由误差 $\Delta_N = 0.02$ cm 可知，第二位小数已不可靠，在它后面的数已无意义。因此，一个物理量的数值与数学上的数字就有着不同的意义。在数学上 $2.63 = 2.630\,0\cdots$，但物理上 $2.63 \neq 2.630 \neq 2.630\,0$。因为它们有着不同的误差。所以规定：测量结果中可靠的几位数字加上一位可疑的数字，统称为有效数字。

有效数字中的最后一位虽然是可疑的，但是有意义。例如用米尺测量一个物体的长度时，使物体的一端与米尺的零点对齐，另一端正好在两刻度线中间某一位置，这时毫米的整数刻度可以正确的读出，而小数部分只能估读，虽然这一估读的正确性是可疑的，但读出比不读精确，即估读数也有意义。

关于有效数字我们应该清楚：

(1) 有效数字的位数与使用仪器的精度有关

精度高的仪器有效数字多，精度低的仪器有效数字少。如用毫米为刻度的米尺测一物体长度得 $l = 56.4$ mm，有三位有效数字；用 0.02 mm 精度的卡尺测同一物体长度得 $l = 56.42$ mm，有四位有效数字；若用精度为 0.001 mm 的螺旋测微器测这一物体长度则有 $l = 56.421$ mm，就有五位有效数字。也就是说，读数一定要到“位”，若结果正好是整数时，应用“0”将位补齐。如最小刻度值为 0.01 A 的安培表，指针正好指在 1 A 处时，读数应记为1.000 A(最后一位是估读)。

(2) 有效数字的位数与小数点位置无关

例如 14.7 cm，147 mm，0.147 m 均为三位有效数字。因此，有效数字是小数点后面几位的说法是错误的。

(3) 0 在中间或最后是有效的

例如 10 m，10.0 m 和 10.00 m 具有不同的意义。它们分别表示两位、三位和四位有效数字。所以，在记录数据时，小数点后的零不能随便加上，也不能随便去掉。

(4) 数值的大小与有效数字的位数没有必然的联系

当结果中数字很大时，可用 10 的指数形式表示。如某次人口调查估计数字是 10 亿人，误差是 2 000 万。若写成(1 000 000 000 ± 20 000 000) 人显然是不妥的，这与其精确度不符。正确的写法应为 (10.0 ± 0.2) 亿人或 $(10.0 \pm 0.2) \times 10^8$ 人，有效数字是三位。又如光速写成 3.0×10^8 m/s，电子质量写成 9.11×10^{-31} kg。它们的有效数字分别是两位和三位。

(5) 确定测量结果有效数字的方法

由不确定度决定有效数字是处理一切有效数字问题的依据。任何测量结果的有效数字应为：其

数值的最后一位要与误差所在的这一位取齐。如：$L=(1.00\pm0.02)\text{cm}$ 是正确的；而 $I=(360\pm0.5)\text{A}$ 或 $g=(980.125\pm0.03)\text{cm/s}^2$，就是错误的。应写成 $I=(360.0\pm0.5)\text{A}$ 或 $g=(980.12\pm0.03)\text{cm/s}^2$。

二、有效数字的运算法则

进行有效数字的运算有两条规则：

(1) 计算的最终结果只保留一位可疑数字。

(2) 有效数字的末位确定之后，多余的可疑数字采用小于 5 则舍去，大于 5 则末位进 1，遇 5 把末位凑成偶数，例如：

2.034 → 2.03(小于 5 舍去)

0.076 → 0.08(大于 5 进位)

1.535 → 1.54(遇 5 凑成偶数)

12.405 → 12.40(遇 5 成偶数，0 算偶数)

1. 加减法

设　$N=A+B+C$

运算步骤如下：

(1) 计算总不确定度，先将各分量的不确定度平方后相加再开方。运算中可舍去小于分量最大不确定度 1/10 的分量，取两位数字，最终结果取一位数字，得到总不确定度。

(2) 计算 N，各分量位数取到比误差所在位小一位。

(3) 用不确定度决定最后结果的有效数字。

例 1　求 $N=A+B-C+D$　　其中

$A=(71.3\pm0.5)\ \text{cm}^2$　　$B=(6.262\pm0.002)\text{cm}^2$

$C=(0.753\pm0.001)\text{cm}^2$　　$D=(271\pm1)\text{cm}^2$

解：(1) 先计算总不确定度

$$\Delta_N=\sqrt{\Delta_A^2+\Delta_B^2+\Delta_C^2+\Delta_D^2}$$

式中 $\Delta_D=l$ 为最大，且有

$$\Delta_B<\frac{\Delta_D}{10},\Delta_C<\frac{\Delta_D}{10}$$

$$\therefore\Delta_N=\sqrt{\Delta_A^2+\Delta_D^2}=\sqrt{0.5^2+1^2}=\sqrt{1.3}\approx1$$

即 N 的最后一位有效数字在个位上，所以各分量只取到小数点后一位。

(2)$A=71.3\ \text{cm}^2$　　$B=6.3\ \text{cm}^2$　　$C=0.8\ \text{cm}^2$　　$D=271\ \text{cm}^2$

所以 $N=71.3+6.3-0.8+271=347.8\ \text{cm}^2$

(3) 把 N 取到与其不确定度相齐的位上，即

$N=348\ \text{cm}^2$　　　　所以 $N=(348\pm1)\text{cm}^2$

如果各分量没有给出不确定度，则应以其中有效数字的最后一位在数值上最大的为准(如上题中的 D)，其他各量比其多取一位，最后结果与它取齐。

例 2　已知：$x_1=23.4,x_2=5.06,x_3=3.624$，求 $x_1+x_2+x_3$。

解：由于 x_1 最后一位最大，故以 x_1 为准。则取 $x_2=5.06,x_3=3.62$ 有

$$x_1+x_2+x_3=23.4+5.06+3.62=32.08\approx32.1$$