大学物理实验

唐文强　韦名德　杨端翠　等编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书共六部分，编写了38个不同类型的实验，内容涉及测量误差及数据处理、力学和热学实验、电磁学实验、光学实验、近代与综合性物理实验、设计性实验。书中比较详细地介绍了测量误差及数据处理的基本知识，介绍了实验的基本方法，在实验后面适当安排有思考题和实验方法拓展，另外还附有法定计量单位（SI单位制）和基本物理常量，方便学生参考。本书可作为高等院校工科物理实验教材，也可作为成人教育、函授大学、大专物理实验教学参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

大学物理实验/唐文强等编.—北京：北京理工大学出版，2007.2
ISBN 978-7-5640-0920-5

Ⅰ.大…　Ⅱ.唐…　Ⅲ.物理学-实验-高等学校-教材　Ⅳ.O4-33

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第165113号

出版发行/北京理工大学出版社
社　　址/北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编/100081
电　　话/（010）68914775（办公室）68944990（批销中心）68911084（读者服务部）
网　　址/http://www.bitpress.com.cn
经　　销/全国各地新华书店
印　　刷/北京国马印刷厂
开　　本/787毫米×1092毫米　1/16
印　　张/13.25
字　　数/302千字
版　　次/2007年2月第1版　　2007年2月第1次印刷
印　　数/1～4050册　　责任校对/张　宏
定　　价/20.00元　　责任印制/吴皓云

图书出现印装质量问题，本社负责调换

目　录

前　　言

本书系工科院校大学物理实验教学用书。

书中比较详细地介绍了测量误差及数据处理的基本知识，适当引入不确定度的概念。数据处理是大学物理实验中一个重要的组成部分，它渗透在每个实验的全过程中，因此，能否正确运用测量误差知识和数据处理方法去分析、处理物理实验问题，是培养学生具备独立工作能力的教学任务之一。书中在实验训练部分编排了 38 个不同类型的实验，对每个实验原理都作了简明扼要的论述，并介绍了实验仪器的使用方法；在实验内容和方法上都有提示，以便学生课前预习，能够设计出合理的实验方案，进行实验。实验后面有思考题，有的实验还提供了实验方法拓展；有的实验反映了时代气息，如动力学法测弹性模量、核磁共振实验、CCD 光栅光谱仪与光谱分析、光纤传感器设计与应用实验、压力传感器特性的研究及应用实验、激光二极管特性的研究、磁传感器类实验；有的实验引入了计算机采集和处理数据，从而拓展学生视野，使学生的创新能力得到锻炼。

全书实验训练内容分为力学和热学实验、电磁学实验、光学实验、近代与综合性物理实验、设计性实验等几部分。在教学实施过程中，按多层次循环方式，由浅入深，由简到繁，循序前进的原则，以利于培养并逐步提高学生的科学实验能力和素质。

本书的编写分工如下：唐文强编写绪论、第 1 章、第 2 章、第 3 章的 3.9 ~3.11、第 5 章的 5.3 ~5.5 及第 6 章的 6.3 ~6.5；韦名德编写第 4 章、第 5 章的 5.1、5.2、5.6 及第 6 章的 6.1、6.2；杨端翠编写第 3 章的 3.0 ~3.8 及附录；王喜雪、董善许、邵红娟、周文泉、程勇负责校对。在编写中参考了龚镇雄教授、朱鹤年教授的教学研究成果以及相关的实验教学指导书，同时也得到本单位物理教研室同行的热情帮助，在此一并表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中错漏之处在所难免，恳请同行和广大读者批评指正。

编　者
2006 年 12 月

绪　　论

1. 物理实验课的地位和作用

物理学是一门实验性科学，实验在物理学的发展史上有其重要的地位和作用。物理理论是建立在实验的基础上，同时又要接受实验的不断检验，而物理实验本身则必须以理论为指导。理论与实验的这一辩证关系是物理学发展的规律。从经典物理发展到量子物理，从宏观领域深入到微观领域，物理学中的许多成果都是理论与实验密切结合的产物。

大学物理实验是工科院校的一门基础实验课程，是学生进入大学后接受系统、全面实验技能训练的开端，也是后续实验课程的重要基础。在工科的整个教学过程中，它是一门单独开设的课程。物理实验的基本教学内容：如，实验数据处理、误差分析与计算、物理量的测量方法等的基本训练，在理论课教学中是无法学到的。通过实验还有助于巩固和加深理解理论课所学的内容。因此，我们在学习物理学时，应当注意理论联系实际，既要重视理论知识的学习，又要注意培养和提高实验能力。大学物理实验教学的目的和任务是：

① 通过实验方法和实验技能的基本训练，要求学生做到：能自行阅读实验教材或资料，做好实验前的预习；正确理解实验原理，学会并掌握一些物理量的测量方法；熟悉常用仪器仪表的原理、性能及使用方法；能正确记录和处理数据，分析和判断实验结果，并能写出完整合格的实验报告。

② 培养并逐步提高学生观察和分析实验现象的能力以及理论联系实际的独立工作能力。通过对实验的观察、测量、分析和判断，加深对物理学某些概念和定律的理解。

③ 培养学生文明实验的良好作风，严谨的科学实验素质，理论联系实际和实事求是的科学态度，爱护公物、遵守纪律的良好道德。

随着科学技术飞速发展，要求现代工程技术人才必须具有深而广的理论知识和足够的现代科学实验所需要的能力，才能担负起国家现代化建设的重任。

2. 大学物理实验课的教学环节与要求

物理实验课的教学环节是：预习阶段；进行实验和数据处理；写实验报告。对这三个教学环节的要求如下：

（1）预习阶段

由于实验课的时间有限，不允许在上实验课时才开始研究实验教材。为保证学生在实验过程中做到胸有成竹，顺利地进行实验，必须做好实验前的预习工作，为此要求：

① 实验前仔细阅读实验教材。要求以理解教材中将要做的实验目的、原理为主，了解实验所用的仪器以及实验内容与要求，明白实验所要观测的是哪些物理量。

② 写出预习报告。

③ 为保证实验时能及时、迅速、准确地记录实验数据，防止漏测、漏记和记录错误，预习时应根据教材要求，在数据记录本上设计好记录数据的表格。

（2）实验

① 预习报告和上一次的实验报告、数据记录必须于课前交教师审批，预习报告合格者方允许进行实验，没有预习或预习不符合要求者，不得进行实验。

② 操作前，认真听取教师简要讲述。然后安装或调整好仪器，或连接好电路等，做好测量前的准备工作。

③ 实验操作过程中，应做好严格、细致、准确、稳妥、实事求是，注意观察实验现象。

④ 将取得的实验数据如实地填写在已设计好的数据表格内。数据记录要正确。如发现记录的数据有错误，可在错误的数据上画一直线或打叉。

⑤ 两人合做实验时，应互相配合，共同做好实验。不要一人包办代替，也不要其中一人老是处于被动。

⑥ 实验完毕后，数据记录本需经教师签字，整理实验室，完成实验室规定的相关登记。离开实验室后不允许修改记录的数据。

（3）写好实验报告

实验报告是实验完成后的书面总结，是把感性认识深化为理性认识的过程。首先应该完整地分析整个实验过程，实验依据的理论和物理规律；通过计算、作图等数据处理，得到什么实验结果，有的还要进行恰当合理的误差估算，分析有哪些提高，存在什么问题。应该注意的是，写实验报告不要不动脑筋地去抄教材。因为实验教材是供做实验的人阅读、使用的，起到指导做实验的作用。实验报告则是向别人报告实验的原理、方法，使用的仪器，测得的数据，供别人评价自己的实验结果。认真书写实验报告，不仅可以提高自己写科研报告和科学论文的水平，而且可以提高组织材料、语句表达、文字修饰的能力，这是其他理论课程无法替代的。

物理实验报告一般应包括以下几项内容：

① 实验名称。

② 实验目的（或要求）。

③ 实验仪器用具。

④ 实验原理。简要叙述实验的物理思想和依据的物理规律，主要计算公式，原理图（如电学和光学实验应画出相应的电路图或光路图）。

⑤ 数据表格和数据处理。把教师签字的原始数据按照列表的要求如实地誊写在报告的正文中，写出计算结果的主要过程及误差估算过程。进行数值计算时，要先写出公式，再代入数据（数据单位要统一），最后得出结果，并要完整地表达实验结果。若用作图法处理数据，应严格按作图要求，画出符合规定的图线。若上机处理数据，则要有打印结果。

⑥ 小结。讨论实验中遇到的问题，写出自己的见解、体会和收获，提出对实验的改进意见等。

实验报告要用统一的实验报告本或实验报告纸书写，字体要工整，文句要简明。原始数据要粘贴在报告的背面一并交教师审阅，没有原始数据的实验报告是无效的。

第 1 章　测量误差及数据处理

物理实验离不开对物理量进行测量，但任何物理量的测量都必须使用一定的仪器，通过一定的方法，在一定的环境下，由某一观察者去完成，由于仪器、方法、环境和观察者都必然存在某种不理想的情况，使得物理量的测量很难完全准确。也就是说，一个物理量的测量值与其客观存在的值总有一些差异，即测量总存在着误差。由于误差的存在，使得测量结果带有一定的不确定性，因此，对一个测量质量的评估，要给出它的不确定度。另外，对物理量的测量结果总是用一组数字来表示，做完一个实验必定要获得一些测量数据，通过使用一些科学的数据处理方法，如列表计算法、作图法、线性回归法等处理这些原始数据，才能得到实验结果，给出误差或不确定度。测量误差及数据处理的知识贯穿整个实验过程，也是今后从事科学研究必须了解和掌握的，同学们开始就要重视它。

1.1　测 量 误 差

1. 测量及其分类

测量是将被测物理量与选作标准单位的同类物理量进行比较的过程，即以确定被测对象量值为目的的全部操作。其比值即为被测物理量的测量值，被测量的测量结果用标准量的倍数和标准量的单位来表示。因此，测量的必要条件是被测物理量、标准量及操作者。**测量结果应是一组数字和单位**，必要时还要给出测量所用的量具或仪器、测量的方法及条件等。例如测量一个小钢球的直径，选用的标准单位是毫米，测量结果是毫米的 10.508 倍，则直径的测量值为 10.508 mm，使用的量具为螺旋测微计，测量环境温度为 22.0 ℃。

作为比较标准的测量单位其大小是科学地人为规定的，以某几个选定的基本单位为基础，就能推导出一系列导出单位，这一系列基本单位和导出单位的整体叫做单位制。国际单位制（简称 SI）是世界唯一公认的科学的单位制，它选定了七个基本物理量：长度、质量、时间、电流、热力学温度、物质的量和发光强度的单位为基本单位（见附录一）。这七个基本单位已能保证物理学乃至一般工程技术问题单位制的一贯性。

（1）直接测量和间接测量

用预先按标准校对好的测量工具或仪表对被测量进行测量，直接得出测量值的叫直接测量。相应的被测量称为直接测量量。例如，用钢直尺测量钢丝的长度，用天平称量铜柱的质量等。但是，更多的物理量不能直接测量，例如物质的密度、某物体的重力加速度等。如果被测物理量不能用直接测量的方法得到，而是通过测量与被测量有函数关系的其他量，由函数关系式计算得到被测量值的测量方法叫做间接测量，相应的被测量称为间接测量量。例如某一圆柱体的密度 ρ 是通过测量其质量 m、直径 d 及高 h，根据密度的定义式

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 h}$$

计算出的，圆柱体的密度 ρ 就是间接测量量。

（2）等精度测量和不等精度测量

为了减小测量误差，往往对同一固定被测量进行多次重复测量，如果每次测量的条件（同一观测者，同一套仪器，同一种实验原理和方法，同样的环境等）都相同，那就没有任何根据判断某次测量一定比另一次测量更准确，只能认为每次测量的精度都相同，这种重复测量称为等精度测量，测得的一组数据称为测量列。多次重复测量时，只要有一个测量条件发生了变化，这种重复测量称为不（非）等精度测量。对这种测量要引入测量“权”的概念，“权”是用来衡量各单次或局部测量结果可靠性的数字，测量的权越大，说明测量结果的可靠性越大，它在最后测量结果中所占的比重也就越大。

（3）静态测量和动态测量

如果被测量在测量过程中可以认为是固定不变的，对这种被测量进行的测量称为静态测量。静态测量不需要考虑时间因素对测量的影响。如果被测量处在随时间不断变化的状态，对这种被测量进行的测量称为动态测量。进行动态测量和处理这种测量得到的数据，要考虑时间因素对测量的影响。

2. 真值与测得值

任何一个物理量在一定条件下是客观存在的，也就是实际具备的量值称为真值。例如某一物体在常温条件下具有一定的几何形状及质量。真值是一个比较抽象和理想的概念，一般来说不可能准确知道这个值。真值包含**理论真值**（如三角形内角之和恒为 180°）、**约定真值**（如指定值、标准器相对真值、公认值）及**最佳估计值**等。

从计量器具直接得出或经过必要计算而得出的量值称为测得值，**测得值是被测量真值的近似值**，包括：

（1）单次测得值

若只能进行一次测量（如变化过程中的测量）；或对测量结果的准确度要求不高，没有必要进行多次测量；或有足够的把握；或仪器的准确度不高，多次测量结果相同。这时就用单次测得值近似地表示被测量的真值。

（2）算术平均值

对多次等精度重复测量，用所有测得值的算术平均值来替代真值，由数理统计理论可以证明，算术平均值是被测量真值的最佳估计值。

（3）加权平均值

当每个测得值的可信程度或测量准确度不等时，为了区分每个测得值的可靠性，即重要程度，对每个测得值都给一个“权”数。最后测量结果用带上权数的测得值求出的平均值表示，即谓加权平均值。

3. 测量误差及其分类

（1）测量误差的来源

每个测得值都有一定的近似性，它们与真值之间总会有或多或少的差异，这种差异在数值上的表示叫做误差。**误差自始至终存在于一切科学实验和测量过程之中，测量结果都存在误差，这就是误差公理。**

① 在测量过程中产生的误差。

方法误差：由于所采用的测量原理或测量方法本身的近似或不严格、不完备所产生的测量误差。

仪器误差：在进行测量时所使用的测量工具、仪表、仪器、装置、设备本身固有的各种缺陷的影响而产生的误差。

环境误差：测量系统以外的周围环境因素对测量的影响，而使测量产生的误差。如温度、湿度、气压、震动、灰尘、光照、电场、电磁波等。

主观误差：由进行测量的操作人员素质条件所引起的误差，如实验者的分辨能力、反应速度以及固有习惯等。

② 在处理测量数据时产生的误差。如有效数字的舍入误差，利用各种数学或物理常量引入的误差，利用各种近似计算或作图带来的误差等。

（2）测量误差的分类

① 系统误差。在同一条件下（指方法、仪器、环境、人员）多次重复测量同一量时，误差的大小和符号（正、负）均保持不变或按某一确定的已知规律变化，这类误差称为系统误差，它的特征是确定性。前者称为定值系统误差，后者称为变值系统误差。按对系统误差掌握的程度又可分为可定系统误差和未定系统误差，对未定系统误差可按随机误差处理。

例如，称衡质量时，使用的是 20 g 的三等砝码，允许有 ±1 mg 的误差。又如停表指针的转动中心与刻度盘的几何中心不重合，会使停表指示值出现周期性误差。用受热膨胀的米尺测量长度，用零点不准的螺旋测微计测量宽度都会引入系统误差。又如伏安法测电阻，电流表不管内接还是外接都会引入误差等。

② 随机误差。在测量时，即使消除了系统误差，在相同条件下多次重复测量同一量时，各次测得值仍会有些差异，其误差的大小和符号不可预测、无法控制，没有确定的变化规律。但如大量增加测量次数，其总体（多次测量得到的所有测得值）服从一定的统计规律，这类误差称为随机误差。它的特征是偶然性。

随机误差是由于测量过程中存在许多难以控制的不确定的随机因素引起的。这些随机因素有空气的流动、温度的起伏、电压的波动、不规则的微小振动、杂散电磁场的干扰以及实验者感觉器官的分辨能力、灵敏度和仪器的稳定性等。如用停表测量三线摆的周期，按下按钮的时刻有早有迟，动作迟早的程度有差异，从而产生了不可避免的随机误差。假设系统误差已经消除，且被测量本身又是稳定的，在相同条件下，对同一物理量进行大量次数的重复测量，可以发现随机误差服从统计规律，其中最典型的是高斯分布，又称正态分布，其特征为：

单峰性：由大量重复测量所获得的测得值，是以它们的算术平均值为中心而相对集中分布的。即绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率大（次数多）。

对称性：绝对值相等的正误差和负误差出现的概率相同。

有界性：误差的绝对值不会超过某一界限，即绝对值很大的误差出现的概率为零，随机误差的分布具有有限的范围。

抵偿性：随着测量次数的增加，随机误差的代数和趋于零，即随机误差的算术平均值将趋于零。实际上，抵偿性可由单峰性及对称性导出。

③ 粗大误差。明显地歪曲了测量结果的异常误差称为粗大误差。它是由没有察觉到的

实验条件的突变，无意识的不正确的操作等因素造成的。含有粗大误差的测得值称为可疑值或异常值、坏值。在没有充分依据时，绝不能按主观意愿轻易地去除，应按一定的统计准则慎重地予以剔除。

由于实验者的粗心大意，使观察、读数或记录错误，是应该及时发现，力求避免的。错误不是误差。

在分析误差时，必须根据具体情况，对误差来源进行全面分析，不但要找全产生误差的各种因素，而且要找出影响测量结果的主要因素。首先剔除粗差，消除或减弱系统误差，然后估算随机误差与未定系统误差并进行合成。

（3）测量误差的表示

① 绝对误差。绝对误差的定义为

$$\text{绝对误差} = \text{测得值} - \text{真值}$$

绝对误差可正可负，具有与被测量相同的量纲和单位，它表示测得值偏离真值的大小。由于真值一般是得不到的，所以误差也无法计算。实际测量中是用多次测量的算术平均值$\bar{x}$代替真值，测得值 x 与算术平均值之差称为偏差，用 Δx 表示，即

$$\Delta x = x - \bar{x} \tag{1.1.1}$$

注：需要区分“绝对误差”和“误差的绝对值”，绝对误差有正负，而误差的绝对值是误差的模。

② 相对误差。假定一个物体的真实长度为100.0 mm，而测得值为100.5 mm，则测量误差为0.5 mm。另一个物体的真实长度为 10.0 mm，测得值为 10.5 mm，测量误差也为0.5 mm。从绝对误差看两者相等，但测量结果的准确程度却大不一样。显然，评价一个测量结果的准确程度，不仅要看绝对误差的大小，还要看被测量本身的大小，即相对误差。

相对误差定义为测得值的绝对误差除以被测量的真值。由于真值不能确定，实际上常用约定真值，如公认值，算术平均值。相对误差 E_r 是一个无单位的无名数，一般用百分数表示，如

$$E_r = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \times 100\% \tag{1.1.2}$$

前述第一个测量的相对误差 $E_r = \frac{0.5}{100.0} = 0.5\%$，而第二个测量的相对误差 $E_r = \frac{0.5}{10.0} = 5\%$。第一个测量比第二个测量准确度高。

③ 百分误差。有时将测得值与理论值或公认值比较，则用百分误差 E_0 表示，即

$$E_0 = \frac{|\text{测得值} - \text{理论值}|}{\text{理论值}} \times 100\%$$

（4）误差与测量结果的关系

为了定性地描述测量结果的重复性及与其真值的接近程度，常用精密度、正确度、准确度来描述。

精密度：表示重复测量所得结果相互接近的程度，即测得值分布的密集程度，它表征随机误差对测得值的影响，精密度高表示随机误差小，测量重复性好。精密度反映测量结果中随机误差大小的程度。精密度简称为精度。

正确度：表示测得值或实验所得结果与真值的符合程度，它表征系统误差对测量的影

响，正确度高表示系统误差小，测得值接近真值的程度高。正确度表示测量结果中系统误差大小的程度。

准确度：描述各测得值重复性及测量结果与真值的接近程度，它反映系统误差和随机误差综合的大小程度。测量准确度高，表示测量结果既精密又正确，在测量过程中随机误差和系统误差都小。准确度又称精确度。

图 1.1.1 是以打靶时弹着点的情况为例，说明上述三个词的含义。（a）图表示射击的精密度高但正确度低，即随机误差小系统误差大。（b）图表示射击的正确度高但精密度低，即系统误差小而随机误差大。（c）图表示射击的准确度高，既精密又正确，系统误差和随机误差都小。

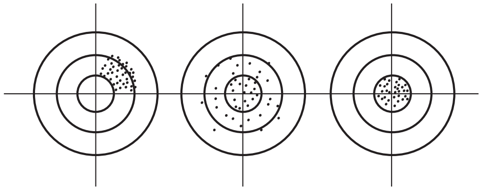

图 1.1.1　射击时弹着点的分布

（a）精密度高正确度低；（b）正确度高精密度低；（c）准确度高

1.2　随机误差的估算

1. 直接测量结果的误差估算

（1）单次测量结果的表示

有些实验是在变化过程中对被测量进行测量的，只能测量一次；有些实验有多个被测量，其中某个被测量的相对误差很小，没有必要多次测量；或仪器的准确度较低，多次测量结果相同等。这时就用**单次测得值近似表示被测量的真值**。

单次测量结果的误差一般用**仪器的额定误差**来表示。例如用 0～25 mm 的一级千分尺测量圆柱体的直径 D 为 9.056 mm，从手册查到示值误差为 0.004 mm，则直径的**单次测量结果**表示为

$$D=(9.056\pm0.004)\mathrm{mm},\quad E_\mathrm{r}=\frac{0.004}{9.056}\times100\%=0.044\%$$

当测量不能在正常状态下进行时，单次测量结果的误差应根据测量的实际情况和仪器误差进行估计。如用米尺测量钢丝的长度，若米尺不能紧靠钢丝，上下两端读数误差可各取 0.5 mm，则钢丝长度的测量误差为 1 mm。又如用停表测量三线摆的周期，误差主要是因为启动和制动按钮时，手的动作和目测位置不完全一致而引起，估计启动和制动各有 0.1 s 的误差，则该周期的误差应估计为 0.2 s。

（2）等精度多次测量结果的误差估算

① 算术平均值。假设在实验中系统误差已被消除或已消减到可以忽略的程度，通过 n 次等精度测量得到一列测得值

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n$$

根据最小二乘法准则：一个等精度测量列的最佳值是能使各次测量值与该值之差的平方和为最小的那个值。设那个值为 x_0，则

$$f(x_0)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)^2=\text{最小值}$$

取 $f(x_0)$ 的一阶导数，并令其等于零，即

$$\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x_0} = -2\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = nx_0$$

从而得到

$$x_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x} \tag{1.2.1}$$

也就是说，**这一组测量数据的算术平均值就是这一测量列真值的最佳估计值**，所以用算术平均值来表示测量结果。对于有限次测量，平均值会随测量次数的不同而有所变动，当测量次数无限增加时，算术平均值将无限接近于真值。

② 算术平均偏差。对一固定量进行多次测量所得**各偏差的绝对值**的算术平均值称为算术平均偏差，即

$$\overline{\Delta x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i| \tag{1.2.2}$$

当测量次数少，测量仪表准确度不高或数据离散度不大时，可用算术平均偏差估算随机误差。

③ 标准偏差。随机误差具有统计规律，其中最典型的是高斯分布，其分布曲线如图 1.2.1 所示。随机误差的概率密度函数为

$$f(\Delta x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{\Delta x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{1.2.3}$$

σ 是式（1.2.3）中唯一的参量，是高斯分布的特征量。在一定测量条件下 σ 是一个常量，从而分布函数就唯一确定下来。测量条件不同造成随机误差大小不同，反映在分布函数上就是 σ 大小不同。σ 大随机误差离散大，测量精密度低，大误差出现的次数多，即各次测得值的分散性大，重复性差，分布曲线较平坦。反之，σ 小随机误差离散小，测量精密度高，小误差占优势，即各测得值的分散性小，重复性好，曲线陡而峰值高。因此在重复测量中，对于一组测得值可用特征量 σ 来描述测量的精密度。

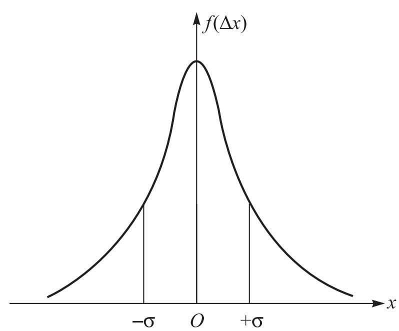

图 1.2.1　高斯分布

σ 称为标准误差，又称为方均根误差。对同一固定量进行无限次测量，各次测得值 x 与被测量真值 x_0 之差的平方和的算术平均值，再开方所得的数值即为标准误差，即

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x - x_0)^2} \quad (n \to \infty) \tag{1.2.4}$$

应该注意，Δx 是实际的误差值，可正可负，而 σ 并不是一个具体的测量误差值，它表示在相同条件下进行多次测量后的随机误差概率分布情况，是**按一定置信概率给出的随机误差变化范围的一个评定参量**，具有统计意义。σ 是评定所得测量列精密程度高低的指标。当测量次数趋于无限时，可以推出

$$\overline{\Delta x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \approx 0.7979\sigma \tag{1.2.5}$$

图 1.2.1 曲线下的总面积表示各种误差出现的总概率为 100%，给定区间（即随机误差大小的变化范围）不同，误差出现的概率，也就是测量值出现的概率不同。这个给定的区间称为置信区间，相应的概率称为置信概率，用 p 表示。

由 $-\sigma$ 到 $+\sigma$ 之间曲线下的面积是总面积的 68.3%，它表示测量列中任一测得值的随机误差落在区间 $[-\sigma, +\sigma]$ 内的概率。或者说，当测量次数无限多时，测得值落在区间 $[\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma]$ 内的次数占总测量次数的 68.3%。也就是说，在区间 $[\bar{x}\pm\sigma]$ 内包含真值的可能性是 68.3%。

在区间 $[\pm 3\sigma]$ 内的置信概率为 99.7%，也就是进行一千次测量，只有三次测得值落在该区间之外，所以把 3σ 定为极限误差，也称误差限。置信区间为 1.96σ 的置信概率为 95%。把算术平均偏差作为置信限，相应的置信概率为 57.5%。为了比较测量列的精密程度，常用在同一置信概率下置信限的大小来表示，置信限越小，则测量列的精密程度越高。

由于真值无法知道，所以 σ 也无法计算。1.2（2）中第①点讨论过，测量列的算术平均值 $\bar{x}$ 是测量结果的最佳值，所以标准误差常用残差来计算，称为**标准偏差**，用 S 表示，可以推导出

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2} \tag{1.2.6}$$

上式称为**贝塞尔公式**，S 是测量列中任何一次测得值的标准偏差。

由于算术平均值比任何一次测得值都更接近于真值，也就是 $\bar{x}$ 的可靠性比任一次测得值 x_i 都高，所以算术平均值的标准偏差 $S_{\bar{x}}$ 就理所当然地小于 S，可以证明

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2} \tag{1.2.7}$$

在实验中实际测量只能进行有限次，随机误差不严格遵从高斯分布，而是遵从 t 分布。t 分布曲线比高斯分布曲线稍低稍宽，t 分布在测量次数 $n\to\infty$ 时趋于高斯分布。因此，对于相同的置信概率，按高斯分布计算出的标准偏差乘以置信因子 t。当置信概率不同时，t 的取值也不同。一般表征测量次数的方法是引入自由度 v，其定义为

$$v = n - 1$$

表 1.2.1 给出了常用的不同自由度 v 的 t 值。

表 1.2.1　常用的不同自由度 v 的 t 值

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	20	∞
$t_{0.683}$	1.84	1.32	1.20	1.14	1.11	1.09	1.08	1.07	1.06	1.03	1
$t_{0.95}$	12.71	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.36	2.31	2.26	2.09	1.96

④ 两种误差的比较。用螺旋测微计测量一钢球的直径，得到两组测量数据。

A 组	x_i/mm	1.250	1.256	1.251	1.255
B 组	x_i/mm	1.253	1.248	1.253	1.258

$$\left.\begin{aligned}\overline{x_A} &= 1.253\ \text{mm}\\ \overline{x_B} &= 1.253\ \text{mm}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{\Delta X_A} &= 0.003\ \text{mm},\ E_A = 0.24\%\\ \overline{\Delta X_B} &= 0.003\ \text{mm},\ E_B = 0.24\%\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}S_A &= 0.003\ \text{mm},\ E_A = 0.24\%\\ S_B &= 0.004\ \text{mm},\ E_B = 0.32\%\end{aligned}\right\}$$

对上列 A，B 两组数据，如果都用算术平均偏差计算，则其绝对误差一样，相对误差也一样，没有区别。若用标准偏差计算，则它们的绝对误差不一样，相对误差也不一样。仔细分析数据可以看出，A 组的涨落小于 B 组，这就清楚的说明，标准偏差比算术平均偏差能更准确的表征测量结果及其数据分布情况。算术平均偏差只是粗略地反映了测量误差的大小，而标准偏差则反映了误差的分布。但算术平均偏差计算比较简单，因此在要求不高或数据离散度不大时，还是一种比较方便的方法。

⑤ 多次测量次数的确定。从式（1.2.7）可以看出，当测量次数 n 增加时，$S_{\bar{x}}$会越来越小，这就是通常所说的增加测量次数可以减小随机误差的道理。$S_{\bar{x}}$随 n 的变化关系可用图 1.2.2 表示，从图中可以看出，$S_{\bar{x}}$的减小，在 n 较大时变得非常缓慢，当 $n>10$ 以后，$S_{\bar{x}}$的减小已很不明显。另外，测量的准确度还受到仪器准确度的制约以及环境因素的影响。所以实际测量次数，在物理实验中一般重复 5 ~ 10 次即可。片面地增加测量次数，不仅误差的减小不明显，而且拖长工作时间，环境条件的不变性也难保证。

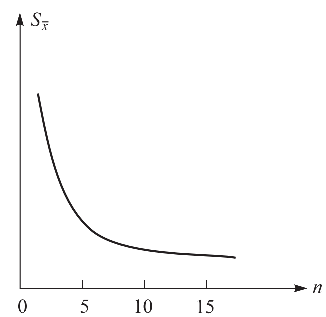

图 1.2.2　标准偏差与测量次数的关系

一般的原则是，各重复测得值若起伏大，就需要多测几次，若起伏小就可以少测几次。对一个被测量至少应先测 2 ~ 3 次，若各次测得值相同，则表明所用仪器准确度不高，反映不出测量的随机误差，可以按单次测量处理。若各次测得值不同，则应再重复测量几次，总共测 5 ~ 10 次即可。

例 1.2.1　用千分尺测量钢球的直径 10 次，数据如下：

d_i/mm　11.998，12.005，11.998，12.007，11.997，11.995，12.005，12.003，12.000，12.002

试估算 d 的平均值、算术平均偏差、单次测得值的标准偏差和平均值的标准偏差，正确表示测量结果。

解： 算术平均值

$$\bar{d} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} d_i = \frac{1}{10}(11.998 + 12.005 + 11.998 + 12.007 + 11.997 + 11.995 + 12.005 + 12.003 + 12.000 + 12.002) = 12.001\ \text{mm}$$

算术平均偏差

$$\overline{\Delta d} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} | d_i - \bar{d} | = \frac{1}{10}(0.003 + 0.004 + 0.003 + 0.006 + 0.004 + 0.006 + 0.004 + 0.002 + 0.001 + 0.001) = 0.003\ \text{mm}$$

单次测得值的标准偏差

$$S_{\mathrm{d}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(d_i-\bar{d})^2}{10-1}}=\sqrt{\frac{144\times10^{-6}}{9}}=0.004\ \mathrm{mm}$$

平均值的标准偏差

$$S_{\bar{\mathrm{d}}}=\frac{S_{\mathrm{d}}}{\sqrt{n}}=\frac{0.004}{\sqrt{10}}=0.001\ \mathrm{mm}$$

测量结果

$$\begin{cases}d=(12.001\pm0.003)\ \mathrm{mm}\\E_{\mathrm{d}}=\dfrac{0.003}{12.001}=0.025\%\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}d=(12.001\pm0.004)\ \mathrm{mm}\\E_{\mathrm{d}}=\dfrac{0.004}{12.001}=0.03\%\end{cases}$$

用标准偏差估算误差时，当被测量是稳定的，测量结果要用算术平均值和平均值的标准偏差表示，即应写出测量结果的最佳值及最佳值的可靠程度。但在被测量本身不稳定时，只须写最佳值和测量列（单次测得值）的标准偏差。本例中小钢球不可能非常圆，直径本身不均匀，在不同部位测量后，所得 $\bar{d}$ 只代表钢球直径的平均效应，而 S_d 反映的仅是被测量 d 的波动性，多次测量并不能减小测量对象本身的这种波动性，所以，测量结果可以不用 $S_{\bar{d}}$ 表示误差。只有当被测对象是稳定的，测量误差纯属服从高斯分布的随机误差才具有抵偿性，这时平均值的标准偏差理所当然地小于单次测量值的标准偏差，所以要用 $S_{\bar{d}}$ 表示测量结果的误差。

2. 间接测量结果的误差估算

物理实验中比较多的测量是间接测量，间接测量结果是由直接测量结果依据一定的数学关系式计算出来的。由于各直接测得值存在误差，因此由直接测得值运算得到的间接测得值也必然存在误差，这就是误差的传递。表达各直接测得值误差与间接测得值误差之间的关系式，称为误差传递公式。

（1）误差传递的基本公式

设间接测得量

$$N=f(x_1,x_2,\cdots,x_m) \tag{1.2.8}$$

式中 x_1，x_2，…，x_m 均为彼此相互独立的直接测得量，每一直接测得量为等精度多次测量，且只含随机误差，那么间接测得量 N 的最可信赖值为

$$\bar{N}=f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_m) \tag{1.2.9}$$

即将各直接测得值的算术平均值代入函数式中，便可求出间接测得量的最可信赖值。

对式（1.2.8）求全微分有

$$\mathrm{d}N=\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_m}\mathrm{d}x_m$$

上式表示，当 x_1，x_2，…，x_m 有微小改变 $\mathrm{d}x_1$，$\mathrm{d}x_2$，…，$\mathrm{d}x_m$ 时，N 有微小改变 $\mathrm{d}N$，一般误差远小于测得值，故可把 $\mathrm{d}x_1$，$\mathrm{d}x_2$，…，$\mathrm{d}x_m$ 看作误差，并用 Δ 代替 d，从最不利情况考虑，取各自变量误差项的绝对值，就得到最大绝对误差传递公式，即**算术合成法传递公式**

$$\Delta N=\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|\Delta x_1+\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|\Delta x_2+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_m}\right|\Delta x_m \tag{1.2.10}$$

对式（1.2.8）两边取自然对数后再求其全微分，可得**相对误差传递的基本公式**