第 5 章　静电场

相对于观察者为静止的电荷所激发的电场，称为静电场。本章我们研究静电场的基本特性，并从电场对电荷有力的作用，电荷在电场中移动时电场力将对电荷作功这两方面，引入描述电场的两个重要物理量：电场强度和电势。同时介绍反映静电场基本性质的场强叠加原理、高斯定理和场强环路定理，并讨论电场强度和电势两者之间的积分形式和微分形式的关系。最后，简单介绍电荷在静电场中所受作用及其运动情况。

5.1　电荷　库仑定律

5.1.1　电荷

早在公元前 600 年，古希腊人就知道琥珀与毛织物摩擦后具有吸引轻物的性质。现今描述这种性质时，称琥珀起电或带电。起电、带电这些名词都来自希腊字“elektron”，意思就是琥珀。后来发现，摩擦后能吸引小物体的性质并不是琥珀所独有。像玻璃棒、硬橡胶棒、有机玻璃棒等，用毛皮或丝绸摩擦后也都能吸引轻小物体。

物体有了这种吸引轻小物体的性质，就说它带了电，或者说有了电荷。带电的物体叫做带电体，使物体带电叫做起电。带电体所带电荷数量的多少叫做电量。带电表示物体处于一种特殊的物理状态。

实验证明，物体所带电荷有两种，而且自然界也只存在这两种电荷。电荷之间有相互作用，同号电荷相互排斥，异号电荷相互吸

引，这种相互作用力称为电性力。历史上，美国科学家富兰克林(Benjamin Franklin，1706—1790　)首先用正电荷和负电荷的名称来区分这两种电荷。这个命名法一直沿用到现在。

电荷具有两个重要的性质。一个是电荷遵从电荷守恒定律，即：一个孤立系统中正、负电荷的代数和总是保持不变。所谓孤立系统，指的是没有任何代数和不为零的电荷通过其边界的系统，或者说一个与外界没有电荷交换的系统。这一定律是被现今所有的实验所证实的。电荷总是成对地出现与消失。电荷守恒定律不仅在一切宏观过程中成立，近代科学实践证明，它也在一切微观过程中普遍成立。

电荷守恒定律是依据对静止或低速运动电荷的观测而确立的。在相对论建立后，人们认识到质量与速率有关，或者说与参照系有关，质量不是相对论不变量。但大量实践证明，电量却不依赖于参照系，或者说电量是相对论不变量。

电荷的另一个重要性质是它的量子化，即任何带电体的电量都只能是某一个基本单元的整数倍，而不可能连续变化。简单地说，电荷量是分立的、不连续的量值。电荷的这个基本单元就是电子所带电荷的绝对值，叫电子电荷，其量值用 e 表示。根据精确测量的结果

$$e = 1.60210 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}\text{(库仑)}$$

在研究宏观电磁现象时，所涉及的电荷通常总是电子电荷的许许多多倍。例如在通常 200V、100W 的灯泡中，每秒通过钨丝的电子数就有 3×10^{18} 个，致使电荷的量子性在研究宏观现象的实验中表现不出来。在这种情况下，我们可以认为电荷连续分布在带电体上，而忽略电荷的量子性。

5.1.2　库仑定律

物体带电后的主要特征是带电体之间存在相互作用的电性力。静止的带电体之间的相互作用力叫做静电力。一般情况下，带

电体之间的相互作用不仅与它们的带电量及相互之间的距离有关，而且还与它们的形状、大小和电荷分布以及周围的介质等有关。因此,影响静电力的因素是复杂的。但进一步的实验指出,当两个带电体相距足够远，以至带电体本身的几何的线度比起带电体之间的距离小得很多,可以忽略不计时,静电力的大小和方向与带电体形状无关,仅由两者的电量以及相互间的距离决定。根据这一事实,我们抽象出点电荷的理想模型,即当带电体本身的几何线度比起它到其它带电体的距离可以忽略不计时，可以把带电体看作点电荷。

所谓‘可以忽略不计’是指在测量的精度范围内,带电体几何形状的任意变化，都不会引起相互作用的静电力的改变。

1785年,库仑(A.de Coulomb,1736—1806)从扭秤实验结果总结出了点电荷之间相互作用的静电力的基本规律，称为库仑定律。可以表述如下：

在真空中，两个静止点电荷之间的相互作用力的大小与它们带电量的乘积成正比，与它们之间距离的平方成反比；作用力的方向沿着两电荷间的连线，且同号电荷相斥，异号电荷相吸,如图 5－1所示。它的数学表达式为

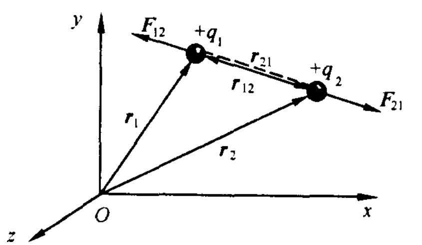


图5－1　两个电荷之间的作用力

$$\boldsymbol{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12} \qquad (5-1)$$

式中 k 是比例系数,q_1,q_2分别是两个点电荷的电量,$\boldsymbol{F}_{12}$ 表示 q_1 对 q_2 的作用力,$\boldsymbol{r}_{12}$ 是由点电荷 q_1 指向点电荷 q_2 的位置矢量。不论 q_1 和 q_2 的正负如何,公式(5－1)都适用。

库仑定律公式中的比例系数 k 的数值和单位,取决于式中各

量所采用的单位，在国际单位制(SI)中，电量的单位是库仑，距离的单位是米，力的单位是牛顿，根据实验测得

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9.0 \times 10^9 \mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}$$

式中常数 ε_0 是真空电容率，也称真空介电常数

$$\varepsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12} \mathrm{C^2/(N \cdot m^2)}$$

因此，库仑定律的表达式也可写成

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \boldsymbol{r}_{12} \tag{5-2}$$

应该指出，本方程被称为‘有理化”就在于因子 4π 的引入。这样，虽然使得库仑定律的表达式变得复杂一些，但以后可以看到，由此而推导出来的一些常用的公式中，却不出现因子 4π，所以这种规定还是有利的。

库仑定律只适用于点电荷，所以其中的两电荷间距离 r_{12} 永不趋于零。有限大小的电荷之间的力当然无法用单一的距离来表示，这种情况下，可以考虑在小体积元之间应用库仑定律，对于任意一个带电体，都可以把它划分成许许多多足够小的小块，以至每一带电小块都可以看成是点电荷，然后通过矢量的求和或积分来求合力。

库仑定律与牛顿万有引力定律类似，也是超距作用。按照现代观念，相互作用是由场以有限速度传播的。库仑定律与万有引力定律都是平方反比律，在数量级上比较而言，引力要弱的多。至于库仑定律是否是严格的平方反比关系，可以把 r^{-2} 写成 $1/r^{2+\varepsilon}$ 而考察偏差 ε 是否为零来证实。现代实验表明：

$$\varepsilon \leqslant (2.7 \pm 3.1) \times 10^{-16}$$

早年的几组实验所显示的结果是：$\varepsilon \leqslant 0.06$(John Robinson)，$\varepsilon \leqslant 0.02$(Henry Cavendish)。有限的 ε 值是和光子质量的有限值相联系的。假如库仑定律偏离平方反比关系，则光子将有有限的静止质量。

库仑定律直接给出的是两个点电荷之间的相互作用。当考虑两个以上点电荷之间的作用时，就必须补充另一个基本实验事实，即：两个点电荷之间的作用力并不因为第三个点电荷的存在而有所改变。由此,当几个点电荷同时存在时,某一点电荷所受的静电力，等于各个点电荷单独存在时该点电荷所受的静电力的矢量和。这个结论叫做静电力叠加原理。库仑定律和静电力叠加原理相配合，原则上可以求出任意两个带电体之间的相互作用力。

例 5－1　在氢原子玻尔模型(Bohr model)中,电子和质子的平均距离是 $\bar{r}_{e-p} = 0.53 \times 10^{-10}\mathrm{m}$,试分别估算库仑力和引力。

解　库仑力为

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{\bar{r}_{e-p}^2} = 9.0\times10^9\frac{(1.6\times10^{-19})^2}{(0.53\times10^{-10})^2} = 8.1\times10^{-8}\mathrm{N}$$

引力为

$$F_g = G\frac{m_e m_p}{\bar{r}_{e-p}^2} = 6.7\times10^{-11}\frac{(9.1\times10^{-31})(1.7\times10^{-27})}{(0.53\times10^{-10})^2} = 3.7\times10^{-47}\mathrm{N}$$

所以,在这一系统中,两者之比为

$$\frac{F_e}{F_g} \propto 10^{39}$$

库仑作用占绝对优势。

5.2　电场　电场强度

5.2.1　电场

摩擦力和各种弹性力，都发生在直接接触的物体之间，因而叫做接触作用或近距作用。例如人推车或开门。如果两个物体彼此不接触时，其相互作用必须依靠其间的物质作为介质来传递。没有物质作介质，物体之间的相互作用就不可能发生，而且物体之间的相互作用的传递需要时间，作用的传递是有速度的。例如，我们听到

喇叭的声音，喇叭声与耳膜的相互作用是依靠其间的空气作为介质来传递的。如果把喇叭放在真空中,由于没有空气作为介质,就不能引起耳膜的振动而听到声音。

库仑定律表明，真空中的两个相隔一定距离的点电荷也可以发生相互作用。这就是说,静电力能够发生在两个相隔一定距离的带电体之间,而两带电体间甚至不需要任何有分子、原子组成的实物作媒介。那么,静电力究竟是怎样作用的呢?或者说作用力是怎么传递的呢?围绕着这个问题,历史上曾有过长期的争论。一种观点叫做超距作用观点，其主要内容为：静电力既不需要任何媒介，也不需要传递时间，就能从一个带电体作用到相隔一定距离的另一个带电体上。另一种观点认为静电力也是近距作用,是通过一种充满空间的弹性媒质——“以太”来传递的。

近代物理学的研究发展告诉我们，任何电荷都在其周围空间激发电场,凡是有电荷的地方,四周就存在着电场,即在任何电荷周围的空间都有电场伴存；而电场的基本特征是对处在其中的任何电荷都有作用力。因此,电荷之间的相互作用,是通过其中的一个电荷所激发的电场对另一个电荷的作用来传递。这种传递虽然很快(约 3×10^{8}m/s),但仍需要时间,这种观点叫做近距作用观点或场的观点。电场对处在其中的其它电荷的作用力叫做电场力,两个电荷之间的相互作用力本质上是一个电荷的电场作用在另一个电荷上的电场力。

电场虽然不像由分子、原子组成的实物那样看得见、摸得着，但近代物理学的发展表明，它具有一系列物质属性，如具有能量、动量,能施于电荷作用力等等,因而能被我们所感知。所以,电场是一种客观存在,是物质存在的一种形式。实际上,电场只是普遍存在的电磁场的一种特殊情况。而电磁场的物质性在它处于迅速变化的情况下,才能明显地表现出来。本章只讨论相对于观察者为静止的带电体周围的电场,称之为静电场,因此我们知道：

(1) 静电场不随时间变化；

(2) 电场中的任何带电体都将受到电场的作用力；
(3) 当带电体在电场中移动时，电场力将对带电体作功。

5.2.2 电场强度

为了定量地研究电场，需要引入描述电场的基本物理量——电场强度矢量。

一个被研究对象的物理特性，总是通过对象与其它物体的相互作用显示出来。静电场的一个基本特性是它对引入电场的任何电荷有力的作用。因此,我们利用电场的这一特性,从中找出能反映电场性质的某个物理量来。所以我们可以引入一试探电荷 q_0,通过观测 q_0 在电场中不同地点的受力情况,来研究电场性质。试探电荷应该满足下列条件 首先,它所带的电量必须足够小,当把它引入电场后,不能对原有电场有任何显著的影响,否则测出来的将是原电荷重新分布后的电场；其次，它的几何线度也必须充分小,可以看成是点电荷,以保证能反映电场中某一点的性质,不然，只能反映出所占空间的平均性质。

根据库仑定律可以知道，当试探电荷 q_0 放置在电场中任一固定点 P 时,由于构成带电体 Q 的任一带电小块施于 q_0 的力都与电量 q_0 成正比,所以整个带电体 Q 施于 q_0 的电场力 $\boldsymbol{F}$ 也必定与 q_0 成正比。即对于电场中任一固定点 P,$\boldsymbol{F}/q_0$ 的大小和方向都与 q_0 无关,而仅仅与试探电荷所在点的电场性质有关。由此可见，$\boldsymbol{F}/q_0$ 这个量反映了电场在 P 点的性质。我们把它定义为 P 点的电场强度矢量,简称场强,用 $\boldsymbol{E}$ 来表示,即

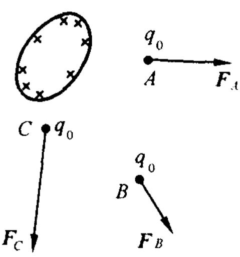


图 5-2 试探电荷 q_0 在电场中受力的情况

$$E = \frac{F}{q_0} \tag{5-3}$$

根据上式,可以把电场强度矢量的定义表述为 静电场中任一点的电场强度是一个矢量，其大小等于带有单位电量的电荷在该点所受的电场力的大小，其方向与正电荷在该点所受电场力的方向一致。

从物理意义上,式(5－3)可以表示成如下形式

$$E = \lim_{q_0 \to 0} \frac{F}{q_0} \tag{5-4}$$

取极限是一个物理过程,在目前阶段,从物理上,我们不能要求电荷小于 e。

在国际单位制(SI)中,力的单位是牛顿(N),电量的单位是库仑(C)，所以由式(5－3)可以看出，场强的单位为牛顿／库仑(N/C)。以后将见到,场强的单位也可以写作伏特/米(V/m)。

电场中每一点都有一个确定的场强矢量。不同点的场强的大小和方向一般是不相同的。这些矢量的总体叫做矢量场。用数学的语言来说，矢量场是空间坐标的一个矢量函数。在以后的讨论中,我们的着眼点往往不是某一点的场强,而是场强的空间分布,即场强与空间坐标的函数关系。

从场的观点来看，库仑定律所给出的是与点电荷伴存的静电场的分布规律。实践表明,静电场只是电场的一种。当电荷相对于某一参照系运动时,其伴存场的分布与静电场不同。此外,还有不直接依赖于电荷而存在的电场。式(5－3)给出了各种电场场强的共同定义。各种电场具有共同属性,也有各自的特殊属性。库仑定律是精确描述静电场的定律,它反映了静电场的特殊属性,但同时也蕴含了各种电场的共性。

在实际中,并不存在绝对静止的电荷及绝对的静电场。静电场是运动电荷伴存电场的一种极限情况。

由于电场强度是一个矢量，矢量叠加法则适用。

当空间同时存在一组点电荷 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 时,它们将共同激发电场。这些电荷的总体称为电荷系。根据电场力的叠加原理,试探电荷 q_0 在电荷系的伴存电场中某点 P 处所受的力等于各个点电荷单独存在时对 q_0 的作用力的矢量和,即

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i$$

两边同时除以 q_0 得

$$\frac{\boldsymbol{F}}{q_0} = \frac{\boldsymbol{F}_1}{q_0} + \frac{\boldsymbol{F}_2}{q_0} + \cdots + \frac{\boldsymbol{F}_n}{q_0}$$

按场强定义，等号右边各项分别是各个点电荷单独存在时在 P 点激发的场强,而左边为 P 点的总场强,即

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \cdots + \boldsymbol{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i \qquad (5-5)$$

上式说明，点电荷系在空间任一点所激发的总场强等于各个点电荷单独存在时在该点各自所激发的场强的矢量和。这个规律称为场强叠加原理，这是电场的基本性质之一。

5.2.3 场强的计算

如果电荷分布已知，那么从点电荷的场强公式出发，根据场强的叠加原理，就可求出任意电荷分布所激发的电场的场强。下面说明计算场强的方法。

(1)点电荷的场强

下面我们来研究在真空中点电荷 q 的电场。设在真空中有一个静止的点电荷 q,则欲求场强的分布,只要求出电场中任一点的场强即可。我们把点电荷 q 所在处 O 称为源点，并取为坐标原点，把要研究的任一点 P 称为场点(图 5－3)。在 P点放置一试探电荷 q_0 ，由库仑定律则其受到的电场力为

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q q_0}{r^3} \boldsymbol{r}$$

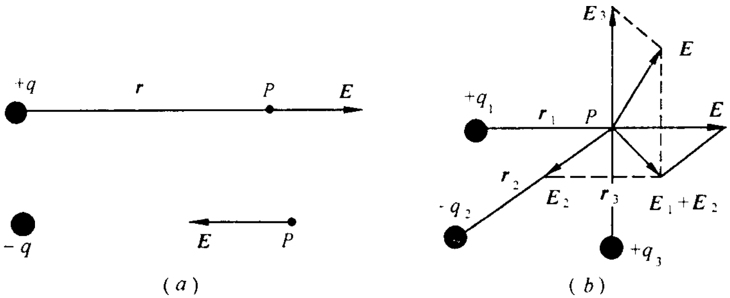


图 5－3 (a)、(b) 点电荷系的场强

$\boldsymbol{r}$ 为从点电荷 q 指向 P 点的矢径，由定义式(5－3)而知 P 点的场强是

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q_0}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r} \tag{5-6}$$

如果 q 为正电荷，$\boldsymbol{E}$ 的方向与 $\boldsymbol{r}$ 的方向一致，即背离点电荷 q 当 q 是负电荷，$\boldsymbol{E}$ 的方向与 $\boldsymbol{r}$ 的方向相反，即指向点电荷 q。如图 5－3 所示。

(2) 点电荷系的场强

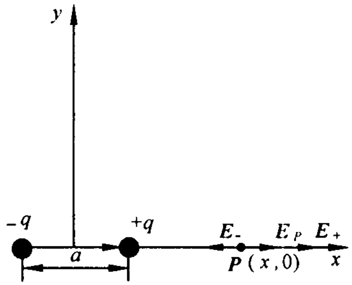
如有一个由 n 个点电荷 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 组成的点电荷系，求其在空间的场强分布。取场点为 P。设各点电荷到 P 点的矢径分别为 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots \boldsymbol{r}_n$，根据式(5－6)，各点电荷在 P 点所激发的场强分别为

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^3}\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{E}_2=\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^3}\boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_n=\frac{q_n}{4\pi\varepsilon_0 r_n^3}\boldsymbol{r}_n$$

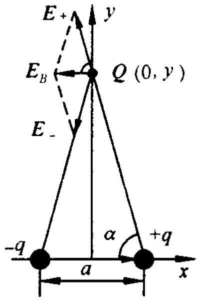
根据场强叠加原理，这个点电荷系在 P 点所激发的总场强 $\boldsymbol{E}$ 为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\cdots+\boldsymbol{E}_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_i^3}\boldsymbol{r}_i \tag{5-7}$$

例 5－2　求电偶极子的电场强度。



(a)在轴线上的场强



(b)在中垂线上的场强

图 5-4　电偶极子

由图 5-4 所示知,点电荷 $+q$ 与点电荷 $-q$ 间的距离为 $\boldsymbol{a}$,试求这两个点电荷连线上任一点，以及中垂线上任一点的电场强度。

解　当两点电荷 $+q$ 和 $-q$ 之间的距离比所考虑的场点到二者的距离小的多时,这一电荷系就称为电偶极子。连接两电荷的直线称为电偶极子的轴线，取从负电荷指向正电荷的矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向作为轴线的正方向。电量 q 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积定义为电偶极矩,简称电矩,用 $\boldsymbol{p}_e$ 表示

$$\boldsymbol{p}_e = q\boldsymbol{a}$$

首先计算在两点电荷连线的延长线上某点 P 的场强 $\boldsymbol{E}_P$。取电偶极子轴线的中心 O 为坐标原点,取 x,y 坐标轴如图,P 点的坐标为$(x,0)$,$x \gg 0$,如图 5-4(a)所示。$+q$ 和 $-q$ 分别在 P 点所激发的场强 $\boldsymbol{E}_+$ 和 $\boldsymbol{E}_-$ 为

$$\boldsymbol{E}_+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{E}_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(x+\frac{a}{2}\right)^2}\boldsymbol{i}$$

因而 P 点的总场强 $\boldsymbol{E}_P$ 为

$$\boldsymbol{E}_P = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{q}{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2}\right]\boldsymbol{i}$$

$$= \frac{2qxa}{4\pi\varepsilon_0 x^4 (1 - \frac{a}{2x})^2 (1 + \frac{a}{2x})^2} \boldsymbol{i}$$

因为 $x \gg a$，上式分母中 $\frac{a^2}{4x^2} \ll 1$，所以

$$\boldsymbol{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2qa}{x^3} \boldsymbol{i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\boldsymbol{p}_e}{x^3}$$

$\boldsymbol{E}_P$ 的方向与电矩 $\boldsymbol{p}_e$ 的方向相同，如图 5－4(a)所示。

其次，计算电偶极子的中垂线上某点 $Q(0, y)$ 的场强 $\boldsymbol{E}_Q$。$+q$ 和 $-q$ 分别在 Q 点所激发的场强 $\boldsymbol{E}_+$ 和 $\boldsymbol{E}_-$ 的大小相等，其值为

$$E_+ = E_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (y^2 + \frac{a^2}{4})}$$

其矢量式分别为

$$\boldsymbol{E}_+ = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (y^2 + \frac{a^2}{4})} \cos\alpha \boldsymbol{i} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (y^2 + \frac{a^2}{4})} \sin\alpha \boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{E}_- = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (y^2 + \frac{a^2}{4})} \cos\alpha \boldsymbol{i} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (y^2 + \frac{a^2}{4})} \sin\alpha \boldsymbol{j}$$

因而 Q 点的总场强为

$$\boldsymbol{E}_Q = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- = -2 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (y^2 + \frac{a^2}{4})} \cos\alpha \boldsymbol{i}$$

$$= -\frac{qa}{4\pi\varepsilon_0 (y^2 + \frac{a^2}{4})^{3/2}} \boldsymbol{i}$$

利用 $y \gg a$ 的条件，则 $(y^2 + \frac{a^2}{4})^{3/2} \approx y^3$，由此可得

$$\boldsymbol{E}_Q = -\frac{qa}{4\pi\varepsilon_0 y^3} \boldsymbol{i} = -\frac{\boldsymbol{p}_e}{4\pi\varepsilon_0 y^3}$$

$\boldsymbol{E}_Q$ 的方向与电矩 $\boldsymbol{p}_e$ 的方向相反，如图 5－4(b)所示。

由上述结果可见，在远离电偶极子处的场强与距离的三次方成反比，因此电偶极子的电场都集中分布在电偶极子附近，而远处的电场十分微弱，所以在处理宏观问题时，一般不考虑中性分子在宏观距离上的电场。场强与电偶极子的电矩值 qa 成正比。若电荷量 q 增大一倍而同时 a 减小一半，则电偶极子在远处激发的场强不变。因此，能够表征电偶极子电性质的量，既不单是电荷量 q，也不单是距离 a，而是它的电偶极矩 $\boldsymbol{p}_e = q\boldsymbol{a}$。

(3) 连续分布电荷的场强

由于基元带电粒子电子（或质子）的体积非常非常小，因此从宏观角度来看，可以把电荷看作连续分布在带电体上。一般说来，电荷在带电体上的分布是不均匀的，为了表征电荷在任一点附近的分布情况，引入电荷密度的概念。

如果电荷分布在整个体积内，这种分布称为体分布。在带电体内任取一点，作一包含该点的体积元 ΔV，设该体积元内的电荷量为 Δq，则该点的电荷体密度 ρ 定义为 Δq 与 ΔV 比值的极限

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$$

应该指出，这里的极限并不是一个严格的数学过程，而是一个物理意义上的极限。今后的公式中的极限，如没有作特殊声明都是指上述含义的极限。

如果电荷分布在极薄的表面层里，我们可以把带电薄层抽象为“带电面”，称为面分布。引入电荷面密度来表征电荷在该面上任一点附近的分布情况。面上某点电荷面密度 σ 的定义如下

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}$$

式中，ΔS 为包含某点的面积元，Δq 为 ΔS 面元上所带的电荷量。

如果电荷分布在细长的线上，则定义电荷线密度 λ 如下

$$\lambda = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}$$

式中，Δl 为包含某点的线元，Δq 为 Δl 线元上所带的电荷量。

将连续分布电荷的概念与场强叠加原理联合应用，原则上就可以计算任意带电体所激发的场强。方法是，把带电体看成是许多极小的连续分布的电荷元 $\mathrm{d}q$ 的集合,每一个电荷元 $\mathrm{d}q$ 都当作点电荷来处理,而电荷元 $\mathrm{d}q$ 在场点所激发的场强，按点电荷的场强公式可写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^3}\boldsymbol{r}$$

式中的 $\boldsymbol{r}$ 是从 $\mathrm{d}q$ 所在点到场点的矢径。带电体的全部电荷在场点激发的场强，是所有电荷元所激发场强 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 的矢量和。因为电荷是连续分布的，故而求和号应该用积分号代换。求得场点的场强为

$$\boldsymbol{E} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}q}{r^3}\boldsymbol{r} \qquad (5-8)$$

根据带电体上的电荷是体分布、面分布或线分布等不同情况，相应地计算场强的式$(5-8)$可改写为

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho\mathrm{d}V}{r^3}\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint\frac{\sigma\mathrm{d}S}{r^3}\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\lambda\mathrm{d}l}{r^3}\boldsymbol{r} \qquad (5-9)$$

上三式的右端是矢量的积分式,实际上在具体运算时,一般要化成标量式才可进行数学积分计算，即通常必须把 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 在坐标轴上的分量式写出,然后再积分。

下面我们用几个典型的例题说明计算连续分布电荷所激发的场强的方法。

例 5－3　计算均匀带电细棒的电场。设真空中有一均匀带电细棒如图 5－5 所示,长为 L,总电荷量为 Q。细棒外有一点 P 离开棒的垂直距离 a,P 点和细棒两端的连线与细棒之间的夹角分别为 θ_1 和 θ_2,求 P 点的场强。

解　这是一个连续分布的带电体,且题中所给为‘细棒”,故

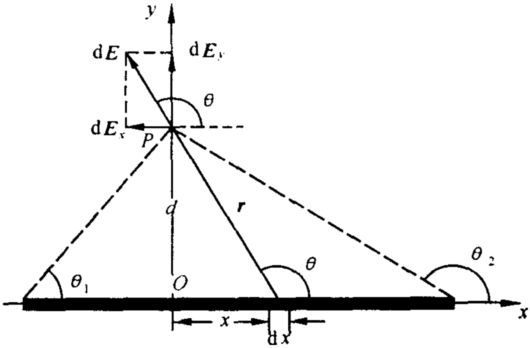


图 5－5　均匀静电直线线外任一点处的框图

而可以看成线电荷分布。

我们选取 P 点到棒的垂足 O 为原点,取 x 轴沿细棒,y 轴通过 P 点,如图 5－5 所示。设细棒上每单位长度所带的电荷量为 λ,则电荷线密度 $\lambda=\dfrac{Q}{L}$。在带电细棒上(即 x 轴上)离原点为 x 处取长度元 $\mathrm{d}x$,此为电荷元的长度。电荷元 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$ 在 P 点产生的场强 $\mathrm{d}E$ 为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\frac{\lambda\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 是从 $\mathrm{d}x$ 指向 P 点的矢径,r 的大小为 $r=(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}$。设 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 与 x 轴的夹角为 θ,则 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 沿 x 轴和 y 轴分量分别为

$$\mathrm{d}E_x=\mathrm{d}E\cos\theta,\qquad \mathrm{d}E_y=\mathrm{d}E\sin\theta$$

图中 z 轴没有画出,显然 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 在 z 轴的分量为 $\mathrm{d}E_z=0, E_z=\int\mathrm{d}E_z=0$。

因为积分式中有三个变量，现在统一用一个变量 θ 来表示,以便计算出积分。由图可知

$$x = a\tan(\theta - \frac{\pi}{2}) = - a\cot\theta, \quad dx = a\csc^2\theta d\theta,$$

$$r^2 = a^2 + x^2 = a^2\csc^2\theta$$

所以 $$dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta d\theta, \quad dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta d\theta$$

将上面两式积分,得

$$E_x = \int dE_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$E_y = \int dE_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

由 E_x、E_y 就可以确定 $\boldsymbol{E}$ 的大小和方向。

如果这一均匀带电细棒是无限长的，即 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$,那么

$$\boldsymbol{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\boldsymbol{j} \qquad (5-10)$$

式(5 - 10)表明，无限长带电直线附近某点的场强 $\boldsymbol{E}$ 与该点离带电直线的距离 a 成反比,$\boldsymbol{E}$ 的方向垂直于直线。若 λ 为正,$\boldsymbol{E}$ 背离直线 若 λ 为负,$\boldsymbol{E}$ 指向直线。以上结果对有限长的细直线来说,再 $a \ll L$ 的区域也近似成立。

例 5 - 4 计算均匀带电圆环的电场强度。真空中均匀带电荷量为 q 的圆环(图 5 - 6),半径为 R,求圆环中心轴上与环心相距为 x 的一点 P 处的电场强度。

解 在圆环上任取长度元 dl,dl 上所带的电荷量为

$$dq = \frac{q}{2\pi R}dl$$

dq 在 P 点处产生的电场强度 $d\boldsymbol{E}$ 为

$$d\boldsymbol{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q dl}{2\pi R r^3}\boldsymbol{r}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 是从 dl 指向 P 点的矢径,其大小为 $r = (x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}$。由于圆环上每个电荷元在 P 点产生的场强 $d\boldsymbol{E}$ 的方向各不相同,为此把 $d\boldsymbol{E}$ 分解为平行于 x 轴线的分量 $d\boldsymbol{E}_{/\!/}$ 和垂直于轴线的分量

$\mathrm{d}\boldsymbol{E}_{\perp}$。根据对称性,各电荷元的场强在垂直于 x 轴方向上的分矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_{\perp}$ 相互抵消。所以 P 点的合场强是平行于 x 轴的那些分矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_{/\!/}$ 的总和,即

$$\boldsymbol{E}=\int \mathrm{d}E\cos\theta\boldsymbol{i}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{2\pi R}\frac{\cos\theta}{r^2}\oint \mathrm{d}l\boldsymbol{i}=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}\boldsymbol{i}$$

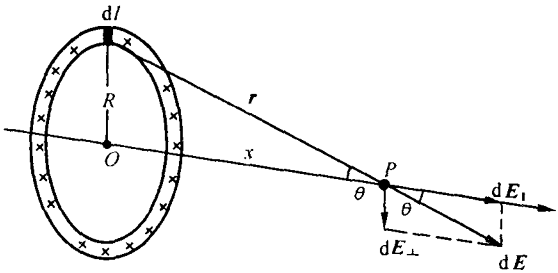


图 5－6　均匀带电圆环上任一点处的场强

例 5－5　试计算均匀带电圆盘轴线上与盘心 o 相距为 x 的任一给定点 P 处的场强。设盘的半径为 R,电荷面密度为 σ。

解　如图 5－7 所示,把圆盘分成许多同心的细圆环,考虑圆盘上任一半径为 r、宽度为 $\mathrm{d}r$ 的细圆环。显然它的带电荷量为

$$\mathrm{d}q=\sigma 2\pi r\mathrm{d}r$$

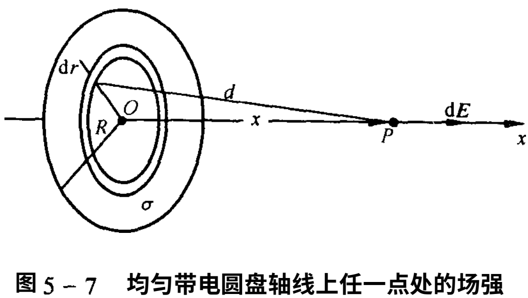


图 5－7　均匀带电圆盘轴线上任一点处的场强

将此细圆环看成圆盘的微分元，则利用例题 5－3 的结果,可得到