第一篇　力学

力学是一门古老的学问。在我国，公元前 5 世纪的《墨经》中已有关于杠杆原理的论述；在西方也可追溯到公元前 4 世纪亚里士多德(Aristotle) 关于力产生运动的说教。但是力学作为一门科学理论的建立则已到了公元 17 世纪。公元 16 世纪末至 17 世纪初，伽利略(G. Galilei)用实验的方法发现了落体定律，其后牛顿（I. Newton）提出了以他名字命名的三个运动定律和万有引力定律，从而奠定了古典力学的基础。现在把以牛顿定律为基础的古典力学称为牛顿力学，或经典力学。经典力学理论是物理学中发展最早、最成熟的理论，它有严谨的理论体系和完备的研究方法。因而，从建立到 20 世纪初,牛顿力学兴盛了约 300 年。虽然在 20 世纪初发现了经典力学的局限性（局限于宏观物体的低速运动),因而在宏观物体的高速运动领域建立了相对论,在微观物体的低速运动领域建立了量子力学，但是在一般技术领域，更多的只涉及宏观低速问题,因此,经典力学是各工程技术(包括机械、建筑、水利、造船、航空、航天等）的理论基础。力学研究的对象是机械运动。机械运动是指物体间或物体内各部分之间相对位置的变化。机械运动是存在于自然界中最普遍和最基本的运动形式。力学中提出的许多物理概念和物理原理适用于整个物理学。所以经典力学也是物理学和自然科学的基础。物体的运动总是在一定的空间和时间进行的，所以时空观问题也属力学研究的范畴。

本篇共 4 章。第一章质点运动学，主要研究质点运动的描述；第二章质点动力学，主要研究物体间的相互作用以及它们对物体运动的影响,着重介绍动量、能量等概念及相应的守恒定律 第三章介绍刚体定轴转动的运动学和动力学问题；第四章介绍狭义相对论的基本原理和概念。因为狭义相对论的时空观已成为现代物理的基础概念，而且与牛顿

力学有紧密的联系，所以把狭义相对论与经典力学放在一起介绍给学生。这样更有利于学生对这一部分内容的学习和理解。

考虑到中学物理已为学生打下了良好的基础，为处理好与中学物理的衔接,这一部分的第一、二章中,对中学已有的概念只作简单复习,而不作更多重复。在处理问题上注重建立坐标系的训练和微积分及矢量运算的应用。这一思想广泛体现在教学内容和例题、习题中。

第一章　质点运动学

质点运动学侧重用几何学的观点研究质点机械运动状态随时间变化的关系。本章主要内容为:位置矢量、位移、速度和加速度等基本概念及质点的曲线运动和相对运动等。

§1-1　质点运动的描述

一、参照系、坐标系、质点

自然界中所有的物体都在不停地运动，绝对静止不动的物体是不存在的。运动是物质存在的形式，是物质的固有属性，运动和物质是不可分割的。这就是运动的绝对性。例如在地面上相对静止的高楼都随地球一起以 $3.0\times10^4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的速度绕太阳运动，而太阳又以 $3.0\times10^5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的速度在银河系中运动。但是，要描述一个物体的机械运动，必须选择另一个运动物体或几个虽在运动而相互间相对静止的物体作为参考，然后再研究这个运动物体是如何相对于参考物体运动的。以上在描述物体运动时被选作参考的物体称为参照系。

在运动学中，参照系的选择可以是任意的。在实际问题中，参照系选择既要考虑问题的性质和需要，又要力求使对运动的描述变得简单。例如，确定交通车辆的位置时，可选用固定于地面上的房子或路牌作参照系，这样的参照系通常叫地面参照系。在实验室中确定某一物体的位置时，可选实验室的墙壁或固定的实验桌作参照系，这样的参照系就叫实验室参照系。经验表明，对同一物体的运动选择不同的参照系，对物体运动描述的结果是不相同的。例如，加速上升的升降机天花板上一松动螺钉的下落过程，以升降机为参照系，螺钉的初速为零，作加速下落的直线运动；以地面为参照系，螺钉以脱落时升降机速度为初速作竖直上抛运动。在不同参照系中，对同一物体的运动具有不同的描述，叫做运动描述的相对性。运动描述的相对性表明，参照系的选择对描述一个物体的运动具有重要的意义。当我们研究一个物体的运动时，必须明确地选择恰当的参照系，只有选定了参照系，运动的描述才有意义。以后还会看到，凡是描述物体运动状态的物理量都具有相对性，如位置矢量、速度矢量等。

参照系选定之后,为了定量地描述一个物体相对于此参照系的位置,需在此参照系上建立固定的坐标系。最常用的坐标系是笛卡儿直角坐标系。

任何物体都有一定的大小、形状和内部结构。通常情况下,物体运动时,内部

各点的运动情况常常是不相同的。因此要精确描写一般物体的运动并不是一件简单的事。为使问题简化，可以采用抽象的办法：如果物体的大小和形状在所研究的问题中不起作用，或所起的作用可以忽略不计，我们就可以近似地把此物体看作一个没有大小和形状的理想物体，称为质点。质点是一个理想化模型，质点仍然是一个物体，它具有质量，同时它已被抽象化为一个几何点。质点是实际物体在一定条件下的抽象。理想化模型的引入在物理学中是一种常见的重要的科学分析方法，在以后的课程中还将引入一系列理想模型，例如刚体、理想气体、点电荷等。把物体抽象为质点的方法具有很大的实际意义和理论价值。如在天文学中把庞大的天体抽象为质点的方法已获得极大的成功。从理论上讲，我们可以把整个物体看成由无数个质点所组成的质点系，从分析研究这些最简单的质点入手，就可能把握整个物体的运动，所以质点运动是研究物体运动的基础。物体抽象为质点需要注意：①同一个物体在一个问题中可抽象为质点，在另一个问题中则不能简化为质点。例如研究地球绕太阳公转时，由于地球至太阳的平均距离（约 1.5×10^{8} km)比地球的半径(约为 6370 km）大得多，地球上各点相对于太阳的运动可以看作是相同的,可以把地球当作质点 但研究地球自转时,地球上各点的运动情况大不相同,地球就不能当作质点处理了。②注意区别质点与小物体。物体再小（原子核的线度约为 10^{-15} m)也有大小、形状,而质点为一几何点,它没有大小,在空间占有确切的位置。

二、位置矢量、位移

1. 位置矢量

空间任一点 P 的位置，在直角坐标系中可以用一组坐标(x,y,z)来表示,也可以用从坐标原点向 P 点引一有方向的线段 $\boldsymbol{r}$ 来表示。如图 1-1 所示。$\boldsymbol{r}$ 称为位置矢量,简称位矢,也叫矢径。

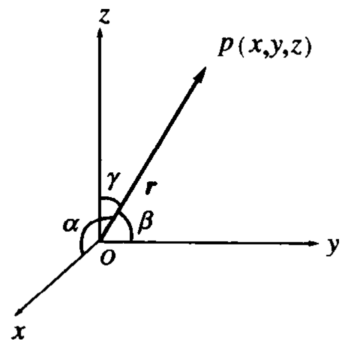

图 1-1　质点的位置表示

矢径的端点就是质点的位置，矢径在笛卡儿坐标系坐标轴上的投影分别为 x、y、z。位置矢量可表示为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

式中 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别为沿 x、y、z 轴的单位矢量。位置矢量的大小为

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

位置矢量的方向余弦为

$$\cos\beta=\frac{y}{r},\quad \cos\gamma=\frac{z}{r}$$

式中 α、β 和 γ 分别是 $\boldsymbol{r}$ 与 x 轴、y 轴和 z 轴之间的夹角。

质点运动时，质点的空间位置随时间的变化关系可用矢径或坐标表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \tag{1.1}$$

或

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t) \tag{1.2}$$

当质点在 Oxy 平面内运动时，则式(1.2)简化为

$$x=x(t),y=y(t)$$

知道了运动方程，质点的整个运动情况也就清楚了，所以运动学的主要任务之一就是根据各种问题的具体条件，求解质点的运动方程。

运动质点在空间所经过的径迹称为轨道。轨道为直线的运动，称为直线运动；轨道为曲线的运动，称为曲线运动。从式(1.2)中消去 t 后可得轨道方程，而式(1.2)是轨道的参数方程。例如一运动质点的运动方程为

$$\boldsymbol{r}=a\cos\omega t\,\boldsymbol{i}+a\sin\omega t\,\boldsymbol{j}$$

由 $x=a\cos\omega t$，$y=a\sin\omega t$ 消去 t 便得其轨道方程为

$$x^2+y^2=a^2$$

位置矢量具有大小、方向，服从几何加法。位置矢量具有瞬时性，质点在运动过程中，不同时刻的位置矢量不同。位置矢量描述质点的运动状态，前面已经讲过，它具有相对性。运动质点的某一空间位置，用不同的坐标系来描写，表达式是不一样的。

式(1.1)表明：质点的实际运动是各分运动的矢量合成，这个由空间的几何性质所决定的各分运动和实际运动的关系叫运动的叠加（或合成）原理。

2. 位移

设曲线 AB 是质点轨道的一部分，如图 1-2 所示。t 时刻质点在 A 点处，$t+\Delta t$ 时刻，质点到达 B 点处。A、B 两点的位置分别由 $\boldsymbol{r}_A$ 和 $\boldsymbol{r}_B$ 来表示。在 Δt 时间内，质点位置的变化可以用由 A 到 B 的有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 来表示，称为质点的位移。显然

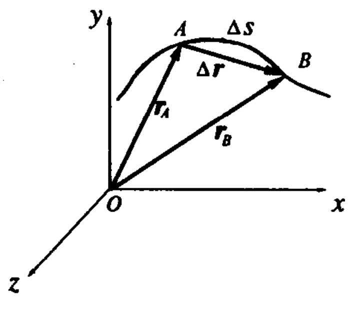

图 1-2　位移矢量

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A=\Delta\boldsymbol{r} \tag{1.3}$$

$\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A$ 表示矢径 $\boldsymbol{r}$ 在 Δt 时间内的增量，所以用 $\Delta\boldsymbol{r}$ 表示。$\Delta\boldsymbol{r}$ 即质点在 t 到 $t+\Delta t$ 这一段时间内的位移。

应该注意：①位移表示质点位置的改变，并非质点所经历的路程。如图 1-2 所

示，$\Delta \boldsymbol{r}$ 为矢量，它的量值 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 即割线 AB 的长度，而路程 Δs 是标量，即曲线 AB 的长度。只有在时间 Δt 趋近于零时 Δs 和 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 方可视为相等。即使在直线运动中，位移和路程也是两个截然不同的概念。

②$|\Delta \boldsymbol{r}|$ 不等于 Δr。$\Delta r = r(t+\Delta t) - r(t)$，它反映 Δt 时间内质点相对于原点的径向长度增加。一般地说 $|\Delta \boldsymbol{r}| \neq \Delta r$，如图 1-2 所示。

③位置矢量和位移在量值上都表示长度，常用单位为米(m)、千米(km)和厘米(cm)。

三、速度、加速度

1. 速度

位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 和发生这段位移所经历的时间 Δt 的比称为质点在这一段时间内的平均速度。以 $\overline{\boldsymbol{v}}$ 表示平均速度，则

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1.4}$$

平均速度是矢量，它的方向就是位移的方向。

当 Δt 趋于零时式(1.4)的极限，即质点位置矢量对时间的变化率，称为质点在时刻 t 的瞬时速度，也叫即时速度，简称速度。用 $\boldsymbol{v}$ 表示速度，则

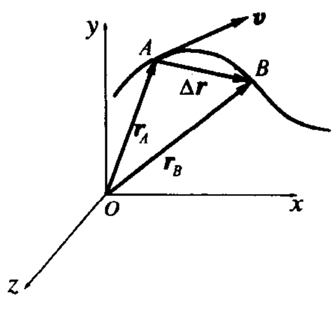

图 1-3 速度矢量

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.5}$$

速度为矢量，速度的方向就是 Δt 趋于零时 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向，如图 1-3 所示，即质点运动轨道在 A 点的切线方向。因此，质点在 t 时刻的速度的方向就沿着该时刻质点所在处运动轨道的切线而指向运动的前方。

速度的大小叫速率，以 v 表示，则有

$$v = |\boldsymbol{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| \tag{1.6}$$

若以 Δs 表示在 Δt 时间内质点沿轨道所经过的路程，当 Δt 趋于零时，$|\Delta \boldsymbol{r}| = \Delta s$，由此可得

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.7}$$

上式表明速率的大小又等于质点所走过的路程对时间的变化率。一般地，

$$v=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|\neq\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

将式(1.1)代入式(1.5),由于 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 不随时间改变,所以有

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{1.8}$$

速度沿三个坐标轴的分量 v_x、v_y、v_z 分别为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\qquad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\qquad v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{1.9}$$

速度的大小为

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} \tag{1.10}$$

速度是矢量,既有大小,又有方向,服从几何加法 速率是标量,只有大小,没有方向。速度是描述质点运动状态的物理量，对于不同的参照系，质点速度的大小、方向是不同的，速度具有相对性。

在国际单位制即 SI 制中,速度的单位是米·秒$^{-1}$($\mathrm{m\cdot s^{-1}}$)。

一些物体运动速度大小：如光在真空中速度为 $3.0\times10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,北京正负电子对撞机中电子速度为 0.999 999 98 倍的光速，空气中声速（0℃)为 $3.3\times10^2\mathrm{m\cdot s^{-1}}$,人跑步(最大)速度约为 $11\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$。

2. 加速度

在变速运动中,质点的运动速度是随时间变化的,而质点速度的变化情况要用加速度来表示。

若以 $\boldsymbol{v}(t)$和 $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$分别表示质点在 t时刻和 $t+\Delta t$ 时刻的速度,如图 1-4所示。则在这段时间内的平均加速度 $\overline{\boldsymbol{a}}$ 由下式定义：

$$\overline{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(\Delta t)}{\Delta t}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1.11}$$

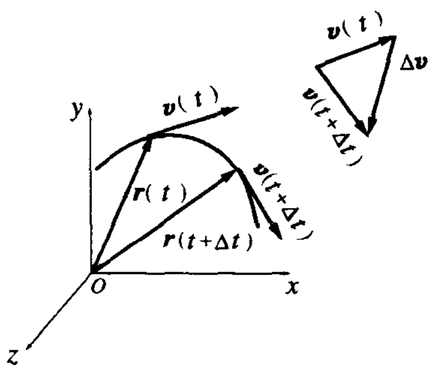

图 1-4 加速度矢量

当 Δt 趋于零时，此平均加速度的极限,即速度对时间的变化率，称为质点在时刻 t 的瞬时加速度,简称加速度,以 $\boldsymbol{a}$ 表示加速度,则有

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{1.12}$$

加速度是矢量,是速度对时间的变化率,因此,不论是速度的大小发生变化,或者是速度的方向发生变化，或者是速度的大小和方向同时发生变化，都有加速度。

把式(1.5)代入式(1.12)得

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.13}$$

把式(1.8)代入式(1.12)得

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{1.14}$$

加速度沿三个坐标轴的分量分别为

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\qquad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\qquad a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.15}$$

加速度的大小为

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \tag{1.16}$$

加速度的单位是米·秒$^{-2}$($\mathrm{m\cdot s^{-2}}$)。

例 1-1 汽车向东行驶 5 km,又向南行驶 4 km,再向西行驶 2 km,求汽车合位移的方向和大小。

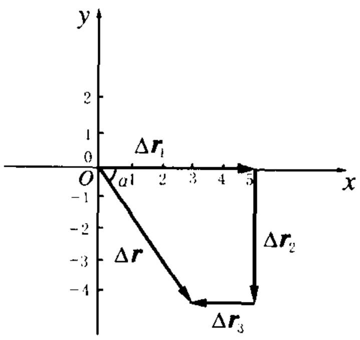

图 1-5 例 1-1 图

解 取向东为 x 轴的正方向,向北为 y 轴正方向建立坐标系,如图 1-5 所示,则对

第一位移矢量 $\Delta\boldsymbol{r}_1$ 有 $\Delta x_1=5\ \mathrm{km}$, $\Delta y_1=0$

第二位移矢量 $\Delta\boldsymbol{r}_2$ 有 $\Delta x_2=0$, $\Delta y_2=-4\ \mathrm{km}$

第三位移矢量 $\Delta\boldsymbol{r}_3$ 有 $\Delta x_3=-2\ \mathrm{km}$, $\Delta y_3=0$

由位移定义得

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}$$

$$|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

此处

$$\Delta x=\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3=(5+0-2)\ \mathrm{km}=3\ \mathrm{km}$$

$$\Delta y=\Delta y_1+\Delta y_2+\Delta y_3=-4\ \mathrm{km}$$

$$|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}\ \mathrm{km}=5\ \mathrm{km}$$

合位移与 x 轴夹角为

$$\alpha=\arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\arctan\left(\frac{-4}{3}\right)=-53.1^\circ$$

例 1-2 一质点在 Oxy 平面内运动，其运动方程为 $x=4t, y=6-2t^2$,式中 x、y 以 m 计，t 以 s 计。

(1)求质点的轨道方程；

(2)求 2 s 末质点的位置矢量、速度和加速度；

(3)在什么时刻，质点的位置矢量与速度矢量相互垂直？

(4)在什么时刻，质点离原点最近？其距离是多少？

解 (1)由运动方程 $x=4t$ 和 $y=6-2t^2$ 消去 t 得轨道方程为

$$y=6-2t^2=6-2\left(\frac{x^2}{16}\right)=6-\frac{x^2}{8}$$

(2)位置矢量 $\boldsymbol{r}=4t\boldsymbol{i}+(6-2t^2)\boldsymbol{j}$,第 2 s末位置矢量 $\boldsymbol{r}(2)$为

$$\boldsymbol{r}(2)=8\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$$

速度矢量 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=4\boldsymbol{i}+(-4t)\boldsymbol{j}=4\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j}$,第 2 s末速度 $\boldsymbol{v}(2)$为

$$\boldsymbol{v}(2)=4\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}$$

加速度矢量 $\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-4\boldsymbol{j}$,第 2 s 末加速度仍为 $-4\boldsymbol{j}$,本题加速度大小为 $4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$，方向沿 y 轴负方向。

(3)由 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{v}$ 得 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}=0$,即 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}=xv_x+yv_y=0$,由此得

$$4t\times4+(6-2t^2)\times(-4t)=16t-24t+8t^3=8t^3-8t=0$$

由上式解得 $t_1=0, t_2=1\ \mathrm{s}, t_3=-1\ \mathrm{s}$舍去 所以 $t=0$ 和 $t=1\ \mathrm{s}$ 时位置矢量与速度矢量相互垂直。

(4)质点到原点的距离 r 为

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{16t^2+(6-2t^2)^2}=\sqrt{4t^4-8t^2+36}=2\sqrt{t^4-2t^2+9}$$

由$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=0$ 得 $$4t^3-4t=0$$

解得 $t_1=0, t_2=1\ \mathrm{s}, t_3=-1\ \mathrm{s}$ 舍去。而 $t_1=0, r_1=6\ \mathrm{m}; t_2=1\ \mathrm{s}, r_2=5.66\ \mathrm{m}$,所以 $t=1\ \mathrm{s}$ 时质点离原点最近,距离为 5.66 m。

例 1-3 某物体的运动规律为$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv^2t$,式中 k 为大于零的常数,当 $t=0$ 时,初速为 v_0 ,求速度 v 与时间的关系。

解 由$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv^2t$,得$-\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=kt\ \mathrm{d}t$,由题意知 $t=0, v=v_0$,所以

$$\int_{v_0}^{v} -\frac{\mathrm{d}v}{v^2} = \int_0^t kt\ \mathrm{d}t$$

积分并整理得

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{2}kt^2$$

四、质点运动学的两类问题

有了运动方程,不仅可以知道质点任意时刻所处的位置,而且通过微分还可以确定其速度和加速度。反过来,若已知质点的速度或加速度,则根据初始条件、通过积分可以建立起质点的运动方程。这就构成了常说的运动学的两类问题。第一类问题通过前面的例题已作过讨论，下面仅以一维运动为例说明如何建立运动方程。掌握了基本方法后，读者不难自行推广到二维和三维运动情况。

一维运动中,位移、速度和加速度各矢量全都在同一直线上,因此可以把各量当标量来处理。设质点的直线运动沿 x 轴进行,显然质点的坐标 x(质点的位置)是随时刻 t 而改变的。即

$$x = x(t)$$

x 为正值表示质点的位置在原点的右边（x 轴正向）, x 为负值表示质点在原点左边。相应地,瞬时速度,瞬时加速度分别为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \qquad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

v 和 a 的正负表示它们指向沿 x 轴正方向或沿 x 轴负方向。a 大于零或小于零并不表示质点是加速运动或减速运动。a 与 v 同向表示质点加速运动，a 与 v 反向表示质点减速运动。

例 1-4 设质点沿 x 轴匀加速直线运动。已知其加速度 a 为一恒量,且 $t=0$ 时刻，质点的初位置为 x_0,初速度为 v_0。确定任一时刻质点的运动状态。

解　由 $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 得 $\mathrm{d}v = a\mathrm{d}t$ 两边积分得

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = \int_0^t a\mathrm{d}t$$

即

$$v - v_0 = at \qquad \text{或} \qquad v = v_0 + at \tag{①}$$

再由 $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 得 $\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t = (v_0 + at)\mathrm{d}t$,然后对两边积分得

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^t (v_0 + at)\mathrm{d}t$$

即
$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad （位移公式） \qquad ②$$

或
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad （运动方程） \qquad ③$$

若由
$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

便有
$$v\mathrm{d}v = a\mathrm{d}x$$

对两边积分
$$\int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v = \int_{x_0}^{x} a\mathrm{d}x$$

得
$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = a(x - x_0)$$

或
$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \qquad ④$$

以上①、②、③、④便是匀加速直线运动的基本公式。

例 1-5 如图 1-6 所示，几个不同倾角的光滑斜面，有共同的底边，顶点也在同一竖直面上。当从各斜面顶端同时释放物体（视为质点）时，试问沿哪个斜面下滑的物体最先到达底端？

解 选沿倾角 θ 的斜面下滑的物体来研究，质点做匀加速直线运动。取此斜面顶端为坐标原点，x 轴沿斜面向下。沿 x 方向物体下滑的加速度 a 是重力加速度沿 x 方向的分量，即

$$a = g\sin\theta$$

由初始条件：$t = 0$ 时，$x_0 = 0, v_0 = 0$，则

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(g\sin\theta)t^2$$

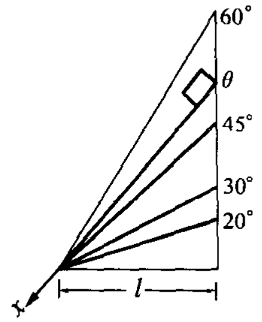

图 1-6 例 1-5 图

物体从顶端下滑到底端经过的距离为 $x = l/\cos\theta$，代入上式得

$$t = \left[\frac{2l}{g\sin\theta\cos\theta}\right]^{1/2} = \left[\frac{4l}{g\sin 2\theta}\right]^{1/2}$$

很显然，当 $2\theta = \pi/2$，即 $\theta = \pi/4 = 45°$ 时，t 有最小值。即，沿倾角为 45° 的斜面下滑的物体最先到达底端。

例 1-6　一小球从屋檐落下,在 0.25 s 内经过 3 m 高的窗户,问窗顶距屋檐有多远？

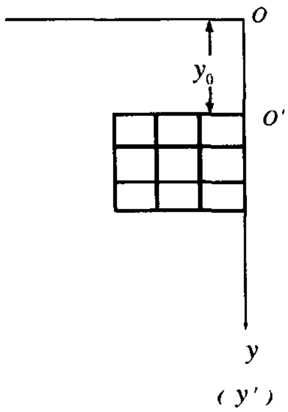

图 1-7　例 1-6 图

解一　以屋檐为坐标原点 O,竖直向下为 y 轴正向,设球过窗户顶时速度为 v_0,此时开始计时。则有

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \qquad ①$$

$t = 0.25$ s时　　　$y - y_0 = 3$ m　　　②

由式①、②得

$$v_0 = \frac{y - y_0 - \frac{1}{2}gt^2}{t}$$

$$= \frac{3 - \frac{1}{2}\times 10\times(\frac{1}{4})^2}{\frac{1}{4}}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 10.75\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

再由 $v_0^2 = 2gy_0$得

$$y_0 = \frac{v_0^2}{2g} = 5.78\ \mathrm{m}$$

解二　选窗户为坐标原点 O',竖直向下为 y'轴正方向。设屋檐到窗顶高为 h,球过窗顶时速度为 v_0,此时开始记时。则有

$$y' = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$$

将 $t = 0.25$ s 时 $y' = 3$ m 代入上式得

$$v_0 = \frac{y' - \frac{1}{2}gt^2}{t} = \frac{3 - \frac{1}{2}\times 10\times(\frac{1}{4})^2}{\frac{1}{4}}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 10.75\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

由 $v_0^2 = 2gh$ 得　　　$h = \dfrac{v_0^2}{2g} = 5.78$ m

§1-2　曲线运动

物体运动轨迹为曲线的运动称为曲线运动。较简单的曲线运动是平面曲线运

动，如抛体运动、圆周运动。描述质点的曲线运动仍然用位置矢量 $\boldsymbol{r}$，位移 $\Delta\boldsymbol{r}$，速度 v 和加速度 a，这四个物理量前面已经讨论过。值得注意的是，在一般曲线运动中，质点速度的大小、方向都随时间变化，所以，曲线运动中的加速度 a 同时反映着 v 的大小变化和方向变化。为了研究问题方便，我们把曲线运动看成是两种直线运动（在相互正交方向上的两种直线运动）的合成，把曲线运动中的加速度分解为切向加速度和法向加速度，分别表示速度的大小和方向随时间的变化。

一、运动叠加原理

在上一节我们已经介绍了运动叠加原理。为了便于下面应用该原理讨论抛体运动，在此再一次给出该原理的文字叙述：

一个实际发生的运动，可以看成是几个各自独立进行的运动叠加而成。这个结论称为运动的独立性原理或运动叠加原理。

二、抛体运动

下面应用运动叠加原理，分析竖直平面内的抛体运动。

设有一质点自某点 O 以初速度 v_0 抛出。取 O 点为坐标原点，水平向右为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向。设 v_0 与 x 轴所成的抛射角为 θ_0。求质点：(1)任意时刻的速度 v；(2)运动方程、位置矢量；(3)轨道方程；(4)飞行时间；(5)射程；(6)飞行的最大高度。

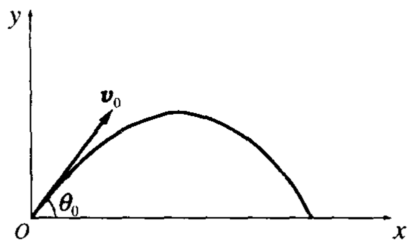

图 1-8　抛体运动

解　如果不考虑空气阻力、风速、风向等影响，则质点在水平方向上作匀速直线运动，而在竖直方向的运动为竖直上抛。设抛出时刻为零，则质点在水平和竖直方向的初速度分别为

$$v_{0x}=v_0\cos\theta_0,\qquad v_{0y}=v_0\sin\theta_0$$

质点总加速度为重力加速度 g，方向沿负 y 方向。所以 t 时刻质点速度为

(1)　$$v_x=v_{0x}=v_0\cos\theta_0,\qquad v_y=v_0\sin\theta_0-gt$$

$$\boldsymbol{v}=(v_0\cos\theta_0)\boldsymbol{i}+(v_0\sin\theta_0-gt)\boldsymbol{j}$$

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{(v_0\cos\theta_0)^2+(v_0\sin\theta_0-gt)^2}=\sqrt{v_0^2-2v_0\sin\theta_0 gt+g^2t^2}$$

(2)运动方程，位置矢量

$$x=v_0\cos\theta_0 t,\qquad y=v_0\sin\theta_0 t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$\boldsymbol{r}=(v_0\cos\theta_0 t)\boldsymbol{i}+(v_0\sin\theta_0 t-\frac{1}{2}gt^2)\boldsymbol{j}$$

(3)轨道方程

从 x、y 两式中消去 t 得轨道方程为

$$y=\tan\theta_0 x-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}x^2$$

(4)飞行总时间 T

令 $y=0$,即 $0=v_0\sin\theta_0 t-\frac{1}{2}gt^2$,得 $T_1=0$,表示质点在起点时刻。

$$T_2=\frac{2v_0\sin\theta_0}{g}\text{(飞行总时间)}$$

(5)射程 R

在飞行总时间内，质点在水平方向运动的距离为

$$R=v_0\cos\theta_0 T_2=v_0\cos\theta_0\times\frac{2v_0\sin\theta_0}{g}=\frac{v_0^2\sin 2\theta_0}{g}$$

在初速度一定情况下,显然 $\theta_0=\pi/4$时射程最大。则最大射程为

$$R_{\max}=\frac{v_0^2}{g}$$

(6)飞行的最大高度 H

先求得飞到最高点所需的时间 t_H,质点达到最高点时 $v_y=0$,即 $0=v_0\sin\theta_0-gt_H$,得

$$t_H=\frac{v_0\sin\theta_0}{g}$$

恰为飞行总时间的一半。将 t_H 代入 y 式得最高点的高度 H 为

$$H=v_0^2\sin^2\theta_0/(2g)$$

从上式可知,在初速度一定的情况下,当 $\theta_0=\pi/2$ 时得最大高度为

$$H_{\max}=v_0^2/(2g)$$

以上各式是弹道学的基本公式。在此基础上如果考虑空气阻力、风速、风向等影响并加以校正，便可得到炮弹等抛体运动的正确轨道。

例 1-7 从离地 $h=8.0$ m 的高处,以抛射角 $\theta_0=30°$、初速度 $v_0=10$ m·s^{-1} 抛出一个小球,问小球在何时、何处落地?并求落地时速度的大小、方向。

解　小球作抛体运动，建立坐标如图 1-9 所示,其运动方程为

$$x = v_0 \cos \theta_0 t \quad ①$$

$$y = v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad ②$$

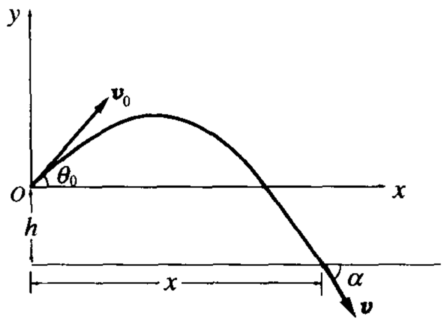

图 1-9　例 1-7 图

轨道方程为

$$y = \tan \theta_0 x - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta_0}$$

由小球落地,以 $y = -8.0\ \mathrm{m}, g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ 代入轨道方程,得

$$-8 = x_1 \tan 30^\circ - \frac{10 x_1^2}{2 \times 10^2 \times (\cos 30^\circ)^2}$$

即

$$\frac{x_1^2}{15} - 0.58 x_1 - 8 = 0$$

$$x_1 = \frac{0.58 \pm \sqrt{(-0.58)^2 + \frac{4}{15} \times 8}}{2/15}\ \mathrm{m} = \begin{cases} 16.1\ \mathrm{m} \\ -7.4\ \mathrm{m}\ \text{舍去} \end{cases}$$

即落在距抛点水平距离为 16.1 m 外。

再由 $x = x_1 = v_0 \cos \theta_0 t$,得落地时刻为

$$t = \frac{x_1}{v_0 \cos \theta_0} = \frac{16.1}{10 \times \cos 30^\circ}\ \mathrm{s} = 1.86\ \mathrm{s}$$

速度的大小、方向如下：

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 = 10 \times \cos 30^\circ\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 8.66\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - g t = (10 \times \sin 30^\circ - 10 \times 1.86)\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = -13.6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 16.1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

v 与 x 轴的夹角为

$$\alpha = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan\left(\frac{-13.6}{8.66}\right) = -57.5^\circ$$

三、曲线运动中的切向、法向加速度

1. 匀速圆周运动

圆周运动是曲线运动的重要特例。物体绕定轴转动时，物体中每一个质点都

在作圆周运动。

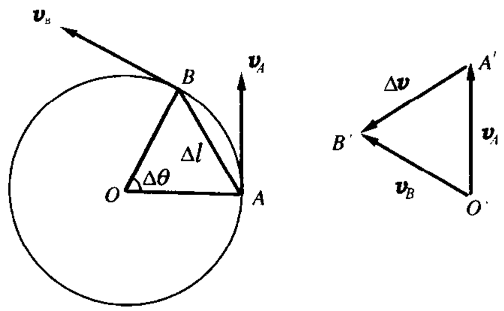

图 1-10　匀速圆周运动

质点作圆周运动时，如果每一时刻的速率都相等，则这种运动称为匀速圆周运动。设圆周的半径为 R,圆心为 O,t 时刻质点在圆周上 A 点,速度为 $\boldsymbol{v}_A$,$t+\Delta t$ 时刻质点沿圆周到达 B 点处,速度为 $\boldsymbol{v}_B$,$\boldsymbol{v}_A$ 与 $\boldsymbol{v}_B$ 大小相等均等于 v,且 v_A 和 v_B 分别与半径OA 和 OB 垂直,如图 1-10所示,则速度的增量为

$$\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A$$

按加速度定义有

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A}{\Delta t}$$

很容易看出,$\triangle AOB \backsim \triangle A'O'B'$。按相似三角形对应边成比例可得

$$\frac{|\Delta \boldsymbol{v}|}{v} = \frac{\Delta l}{R}$$

式中 Δl 为AB 弦的长度。上式两边同除以 Δt 得

$$\frac{|\Delta \boldsymbol{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{R}\frac{\Delta l}{\Delta t}$$

当 Δt 趋于零时,B 点趋于 A 点,弦长 Δl 趋于弧长 Δs,于是求得加速度的大小为

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \boldsymbol{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{R}\frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{v}{R}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} \qquad (1.17)$$

加速度的方向即 $\Delta \boldsymbol{v}$ 的极限方向。当 $\Delta t \to 0$,角 $\Delta\theta \to 0$,$\Delta \boldsymbol{v}$ 的极限方向垂直于 $\boldsymbol{v}_A$。所以在 A 点处加速度 $\boldsymbol{a}$ 的方向沿半径 OA 指向圆心。这个加速度通常称为向心加速度，它反映了速度方向随时间的改变。

2. 变速圆周运动

如果质点作圆周运动时其速度是随时间变化的，则这种运动称为变速圆周运动。如图 1-11 示,质点在 t 时刻与 $t+\Delta t$ 时刻分别在圆周上 A、B 两点处,其速度分别为 $\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}_B$。则

$$\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A$$

在速度三角形 CE 上截取 $CF = CD$,则可将 $\Delta \boldsymbol{v}$ 分解为两个矢量:$\Delta \boldsymbol{v}_n$(即 $\overrightarrow{DF}$)和

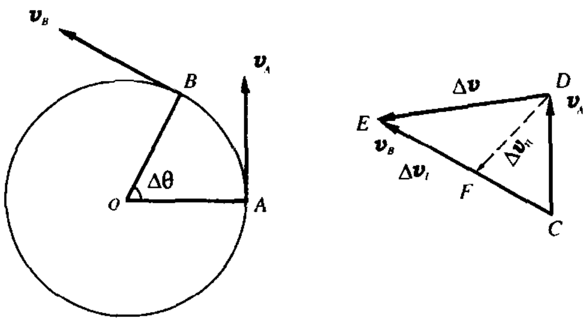

图 1-11　变速圆周运动

Δv_t(即 FE),于是 $\Delta\boldsymbol{v}=\Delta\boldsymbol{v}_n+\Delta\boldsymbol{v}_t$,两边同除 Δt 得平均加速度 $\overline{\boldsymbol{a}}$为

$$\overline{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}_n}{\Delta t}+\frac{\Delta\boldsymbol{v}_t}{\Delta t}$$

瞬时加速度 $\boldsymbol{a}$ 为

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}_n}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}_t}{\Delta t}\tag{1.18}$$

其中 $\Delta\boldsymbol{v}_n$ 与匀速圆周运动时的 $\Delta\boldsymbol{v}$ 相当,$\lim\limits_{\Delta t\to0}\Delta\boldsymbol{v}_n/\Delta t$ 所表示的分加速度就是向心加速度,也叫法向加速度,用 $\boldsymbol{a}_n$ 表示。它反映速度方向的变化。 $\Delta\boldsymbol{v}_t$ 的极限方向与 v_A 方向一致,在 A 点的切线方向上,所以 $\lim\limits_{\Delta t\to0}\Delta\boldsymbol{v}_t/\Delta t$ 表示的分加速度叫切向加速度,用 $\boldsymbol{a}_t$ 表示,它反映速度大小的变化。

$\boldsymbol{a}_n$、$\boldsymbol{a}_t$ 的大小 由式(1.17)知法向加速度的大小 $a_n=v^2/R$,式中 R 为圆半径,v 为质点所在点的瞬时速率。而切向加速度 $a_t=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$,等于瞬时速率的时间增加率。

总加速度为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_t\tag{1.19}$$

$\boldsymbol{a}$ 的大小与方向(如图 1-12 所示) 如下:

$$a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=\sqrt{(\frac{v^2}{R})^2+(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t})^2},\qquad \tan\theta=\frac{a_n}{a_t}\tag{1.20}$$

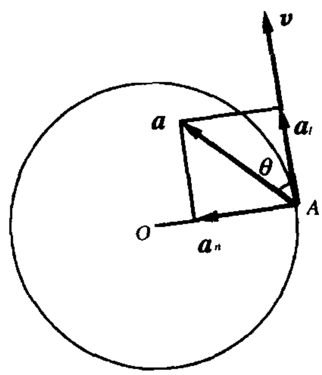

图 1-12　切向、法向加速度

式中 θ 为$\boldsymbol{a}$ 与瞬时速度 $\boldsymbol{v}$ 的夹角。

3. 一般曲线运动

质点在平面内作一般曲线运动时, 在 任 意 一 段 时