概率论与数理统计中的典型例题分析与习题

龙永红 主编

高等教育出版社

—北京

内容简介

本书是面向21 世纪课程教材《概率论与数理统计(第二版) (龙永红主编) 》的配套辅导书, 是“ 高等教育百门精品课程教材建设计划 ”立项研究项目成果.

为帮助读者系统地学习和掌握概率论与数理统计的主要内容和基本方法, 本书的各章都提纲挈领地列出了基本概念、重要定理与结论. 在教材例题的基础上, 有针对性地精选了大量的例题和习题, 帮助读者系统地掌握基本概念、基本的解题方法与思路.

本书不仅适合于经济管理学科本科生的需要, 也是一本适用成人教育考试、高等教育自学考试的参考书. 对于有志报考研究生的读者, 本书也是一本有价值的复习用书.

图书在版编目(CIP) 数据

概率论与数理统计中的典型例题分析与习题 / 龙永红主编. —北京: 高等教育出版社, 2004. 6
ISBN 7 - 04 - 014380 - 1

Ⅰ. 概... Ⅱ. 龙... Ⅲ. ①概率论 - 高等学校 - 教学参考资料②数理统计 - 高等学校 - 教学参考资料
Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004) 第 051013 号

策划编辑 马 丽 责任编辑 李 陶 师钦贤 封面设计 张 楠
责任绘图 宗小梅 版式设计 胡志萍 责任校对 胡晓琪
责任印制

出版 行	高等教育出版社	购书热线	010 - 64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	网 址	http: / /www. hep. edu. cn
总 机	010 - 82028899		http: / /www. hep. com. cn

经 销 新华书店北京发行所
印 刷

开 本	787× 960 1 /16	版 次	年 月 第 1 版
印 张	16.75	印 次	年 月 第 次印刷
字 数	310 000	定 价	17.90 元

前　　言

本书是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果,是面向21世纪课程教材《概率论与数理统计(第二版)(龙永红主编)》的配套辅导书.

全书以教材内容为主线,围绕教材中的基本概念、理论和方法,精心组织典型例题与习题.对每一章教材内容,本书编配四部分内容:内容提要、典型例题分析、习题和习题解答.编写时力求突出以下特点:

1.选题及其内在的逻辑顺序和结构与课程内容和要求有机联系起来,有助于学生对基础知识的巩固、理解和提高;

2.选题广泛、典型且新颖,使学生能够受到启发并开拓思路;

3.打破以往教材按填空、选择、求解题型的分类方式,而按知识和解题思路的自然顺序编排,有助于学生把握知识间的联系;

4.既有对局部概念的深入理解的问题,又有综合运用相关知识的问题.通过点面结合,促使学生打牢基础的同时,加强知识间的联系并提高综合分析和应用的能力;

5.启发式的解题分析,帮助学生迅速抓住问题的关键和本质,培养灵活性,避免简单的、机械的模仿,真正提高解题能力;

6.将知识点和解题方法相结合的分类归纳方法,更有助于学生将巩固基础和提高解题能力相结合;

7.例题和习题相搭配,联系紧密,使学生能够学练结合,巩固提高;

8.归纳总结了几乎所有的历届考研题型,使学生能够在巩固基础的同时提高应试能力,避免学生考研复习和一些考研辅导书偏离基础的通病;

9.对教材中部分较难的习题给以详细的解答,解决学生在学习课程时遇到的困难.

本书第1~3章由龙永红教授编写,第4~7章由刘刚老师编写.欢迎广大师生提出批评和建议.

龙永红

2004年4月10日

第 1 章　随机事件与概率

(一) 内 容 提 要

一、随机事件

1．随机现象　事先无法准确预知其结果的现象.

2．随机现象的统计规律性　随机现象在大量重复出现时所表现出来的量的规律性.

3．随机试验　对随机现象的观察称为随机试验, 一般地, 要求随机试验满足(i) 相同条件下可重复试验; (ii) 试验的结果是可观察的, 所有可能结果是明确的; (iii) 每次试验将要出现的结果是不确定的, 事先无法准确预知.

4．样本点　随机试验的每个可能的结果称为该试验的一个样本点, 用 ω表示.

5．样本空间　一个随机试验所有样本点构成的集合称为该试验的样本空间, 记作 Ω

6．随机事件　随机试验的一个可观察的特征称为该试验的一个随机事件. 简称为事件, 记作 $A, B, \cdots$.

7．必然事件　在试验中一定发生的事件, 用 Ω表示.

8．不可能事件　在试验中一定不发生的事件, 用狖表示.

9．基本事件　由一个样本点, 即试验的一个可能结果所构成的事件.

10．事件的集合表示　随机事件可由满足相应特征的可能结果(即样本点) 的集合来描述, 因而可用集合来表示事件. 一个试验的结果为 ω, 则当 $\omega\in A$ 时, 称事件 A 发生.

二、事件的关系与运算

1．事件的包含　如果事件 A 发生必然导致 B 发生, 则称事件 B 包含事件 A, 记作 $A \quad B$.

2．事件的相等　如果 $A \quad B$ 且 $B \quad A$, 则称事件 A 与 B 相等, 记作 $A = B$.

3．事件的并(和)　“ A 与 B 中至少有一个事件发生 ”这一事件称为事件 A 与事件 B 的并(和) , 记作 $A\cup B$ 或 $A + B$.

4．事件的交(积)　“ A 与 B 两个事件均发生 ”这一事件称为事件 A 与事件 B 的交(积) , 记作 $A\cap B$ 或 AB.

5．事件的差　“事件 A 发生而事件 B 不发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的差，记作 $A - B$.

6．互不相容事件　若事件 A 与事件 B 不可能同时发生，即 $AB = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互不相容.

7．对立事件　“事件 A 不发生”这一事件称为 A 的对立事件，记作 $\bar{A}$. 事件 A 与事件 B 互为对立事件当且仅当(ⅰ) $AB = \varnothing$；(ⅱ) $A + B = \Omega$.

8．有限或可数个事件的并　“有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生”这一事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并，记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$；“可数个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 中至少有一个发生”这一事件称为 $A_1, A_2, \cdots$ 的并，记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

9．有限或可数个事件的交　“$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 均发生”这一事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交，记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$；“$A_1, A_2, \cdots$ 均发生”这一事件称为 $A_1, A_2, \cdots$ 的交，记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

10．完备事件组　有限个或可数个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 如果两两不相容且并为必然事件，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 为一个完备事件组.

三、事件的关系与运算的性质

1．基本性质

(1) $\varnothing \subset A \subset \Omega$；

(2) $A - B = A\bar{B} = A - AB$；

(3) $\bar{A} = \Omega - A$；

(4) $A \cup B = A \cup (B - A) = (A - B) \cup (B - A) \cup (AB)$；

(5) $\bar{\bar{A}} = A$.

2．运算律

(1) 交换律：$A \cup B = B \cup A$；　$A \cap B = B \cap A$；

(2) 结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$；

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$；

(3) 分配律：$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$；

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$；

(4) De Morgan 对偶律：

$$\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \bar{A}_i;\quad \overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \bar{A}_i.$$

四、随机事件的概率

1．概率的描述性定义　一个事件发生的可能性大小的度量.

2．频率　在 n 次试验中，事件 A 发生的次数为 $r_n(A)$，称 $f_n(A) = \dfrac{r_n(A)}{n}$ 为

事件 A 在 n 次试验中发生的频率.

3. **概率的频率解释(统计定义)** 在 n 次独立重复试验中,事件 A 发生的频率为 $f_n(A)$,当 $n\to\infty$ 时,$f_n(A)$ 趋于一个稳定值,这个稳定值就是事件 A 在每次试验中发生的概率.

4. **概率的公理化定义** 设 Ω 是样本空间,定义在 Ω 的事件域 F(全体事件构成的集合)上的实值函数 $P(\cdot)$ 称为 Ω 上的一个概率测度,如果它满足下列三条公理:

公理 1: $P(\Omega)=1$;

公理 2: 对任意事件 A,有 $P(A)\geq 0$;

公理 3: 对任意可数个两两不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

5. **概率的性质**

(1) $P($狖$)=0$;

(2) $0\leq P(A)\leq 1$;

(3) $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两不相容,则 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$;

(4) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$;

(5) $P($珔 $=1-P(A)$;

(6) $P(A-B)=P(A)-P(AB)$;

(7) $A\quad B$,则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$,$P(A)\geq P(B)$;

(8) $\quad(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,

$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$.

6. **古典概型**

(1) 古典概型的假设条件

(i) 随机试验只有有限个可能结果,即样本点总数有限,亦即基本事件总数有限;

(ii) 每一个可能结果出现的可能性相同.

(2) 古典概型的概率计算公式

设 Ω 是一个古典概型样本空间,则对任意事件 A,有

$$P(A)=\frac{A\text{中的样本点数}}{\Omega\text{中的样本点数}}=\frac{\text{使}A\text{发生的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}.$$

7. **几何概型**

(1) 几何概型的假设条件

(i) 试验的样本空间 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个区域;

(ii) 每一个样本点出现的可能性相同.

(2) 几何概型的概率计算公式

对任意事件 $A \subset \Omega$, 有

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

其中 $\mu(\cdot)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的几何测度, 当 $n=1,2,3$ 时, 分别表示长度, 面积和体积.

对 A 不是 Ω 的子集的情形, 公式变为:

$$P(A)=\frac{\mu(A\cap\Omega)}{\mu(\Omega)}.$$

五、条件概率与事件的独立性

1. 条件概率的定义

若 $P(A)>0$, 称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件 A 发生的条件下 B 发生的条件概率.

2. 条件概率的性质

(1) 条件概率满足概率的三条公理:

(i) $P(\Omega|A)=1$;

(ii) $P(B|A)\geq 0$;

(iii) $A_1, A_2, \cdots$ 为一列两两不相容的事件, 则

$$P(\bigcup_i A_i|A)=\sum_i P(A_i|A).$$

(2) 条件概率满足概率的其他性质

3. 两个事件的相互独立

(1) 定义

若 $P(AB)=P(A)P(B)$, 则称 A 与 B 相互独立.

(2) 等价条件

(i) 若 $P(A)>0$, 则 A 与 B 相互独立等价于 $P(B|A)=P(B)$;

(ii) 若 $P(B)>0$, 则 A 与 B 相互独立等价于 $P(A|B)=P(A)$.

4. 有限个事件的两两独立与相互独立

(1) 两两独立的定义

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个事件, 若其中任何两个事件均相互独立, 即 $P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$, $i\neq j$, $i,j=1,2,\cdots,n$, 则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两独立.

(2) 相互独立的定义

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个事件, 若对任意 $2\leq k\leq n$, 及 $1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n$ 均

有:

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立.

5. 相互独立的性质

(1) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立, 则其中任意 $k(2 \leq k \leq n)$ 个事件均相互独立, 特别地 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两独立.

(2) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立, 则将其中任意一个或多个事件换成相应的对立事件, 新的事件组仍然相互独立.

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - P(A_i)).$$

(4) 任意事件与不可能事件相互独立, 也与必然事件相互独立.

(5) 任意两个非零概率事件, 若其不相容, 则一定不独立.

6. 可数个事件的两两独立与相互独立

(1) 两两独立

$A_1, A_2, \cdots$ 是可数个事件, 如果其中任意两个事件均相互独立, 则称 $A_1, A_2, \cdots$ 两两独立.

(2) 相互独立

如果 $A_1, A_2, \cdots$ 中任意有限个事件均相互独立, 则称 $A_1, A_2, \cdots$ 相互独立.

六、乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式

1. 乘法公式

(1) 两个事件的情形

若 $P(A_1) > 0$, 则 $\quad P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)$;

若 $P(A_2) > 0$, 则 $\quad P(A_1A_2) = P(A_2)P(A_1 \mid A_2)$.

(2) n 个事件的情形

若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$, 则

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

2. 全概率公式

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一个完备事件组, 且 $P(A_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, n$ 则对任意事件 B, 有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_iB) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i).$$

3. 贝叶斯公式

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一个完备事件组, 且 $P(A_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 则对任意事件 $B, P(B) > 0$, 有

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(BA_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)}, i = 1, 2, \cdots, n.$$

七、独立试验概型

1. 独立试验序列: 如果一系列试验, 各次试验的结果之间相互独立, 则称这一系列试验为一个独立试验序列.

2. 伯努利试验: 只有两个可能结果的试验称为伯努利试验.

3. 伯努利试验序列: 独立重复进行的一系列伯努利试验称为伯努利试验序列.

4. 伯努利定理

在一次试验中, 事件 A 发生的概率为 $p(0 < p < 1)$, 则在 n 次独立重复试验中,"事件 A 恰好发生 k 次"的概率为

$$b(k, n, p) = \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k},$$

其中 $q = 1 - p$.

5. 等待概率

在伯努利试验序列中, 设每次试验中事件 A 发生的概率为 p, 则"直到第 k 次试验事件 A 才首次发生"的概率为

$$g(k, p) = q^{k-1}p.$$

(二) 典型例题分析

一、事件的表示及其等价表示

例 1 设 A, B, C 为三个事件, 则"A, B, C 中至少有一个不发生"这一事件可表示为(   ).

(A) $AB + AC + BC$　　(B) $A + B + C$

(C) $AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC$　　(D) $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$

分析 根据事件的并的定义, 凡是出现"至少有一个", 均可由"并"来表示, 在本题中, 要表示的事件是"至少有一个不发生", 由于不发生可由对立事件来表示, 于是"A, B, C 至少有一个不发生"等价于"$\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 中至少有一个发生", 故答案(D) 正确.

答 选择(D).

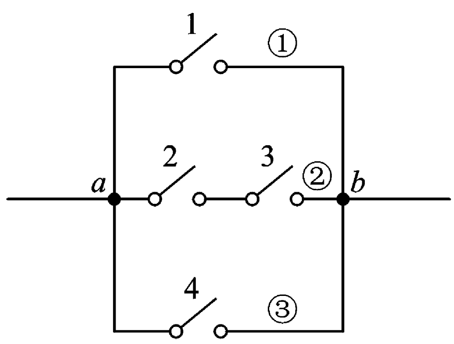
注 ① 事件的表示往往不是唯一的, 比如本例中, 该事件还可表述为"恰好一个不发生或恰好两个不发生或三个都不发生", 或者"三个都发生"的对立事件等来得到相应的表示.

② 在学习和复习时不要仅限于事件表示的"简单", 要多考虑同一事件的不

同表示方法, 越复杂的表示可能越有用, 在实际中特别是概率计算中要根据问题的需要选择相应的表示方法.

③ 读者可以对选项(A), (B), (C)分别给出事件的文字描述.

例 2 一个电路如下图所示, A_i 表示"第 i 个开关闭合", 则"电路 a 至 b 导通"这一事件可表示为( ).



(A) $A_1+A_2+A_3+A_4$　　(B) $(A_1+A_2+A_3)A_4$

(C) $A_1+A_2A_3+A_4$　　(D) $A_1A_2A_3A_4$

分析 首先要理清问题的线索:"电路 a 至 b 导通"等价于"①, ②, ③三个分支至少有一个导通", 将每一个"分支 i 导通"视为一个事件, 则所求事件归结为三个事件的并, 接下来关键是要表示出"分支 i 导通"这三个事件. "分支①导通"和"分支③导通"分别等价于"第 1 个开关闭合"和"第 4 个开关闭合"即 A_1 和 A_4, 而"分支②导通"等价于"第 2 个开关与第 3 个开关均闭合", 即 A_2A_3, 于是答案(C)正确.

答 选择(C).

例 3 设三个元件寿命分别为 T_1, T_2, T_3, 并联成一个系统, 则只要有一个元件能正常工作, 系统便能正常工作, 事件"系统的寿命超过 t"可表示为( ).

(A) $\{T_1+T_2+T_3>t\}$　　(B) $\{T_1T_2T_3>t\}$

(C) $\{\min\{T_1, T_2, T_3\}>t\}$　　(D) $\{\max\{T_1, T_2, T_3\}>t\}$

分析 "系统的寿命超过 t"等价于"至少有一个元件的寿命超过 t", 这又等价于"三个元件中最大的寿命超过 t", 即(D)是正确的.

答 选择(D).

注 ① 上述事件亦可表示为$\{T_1>t\}\cup\{T_2>t\}\cup\{T_3>t\}$.

② 如果系统是串联的, 答案是(C)或表示为$\{T_1>t\}\cap\{T_2>t\}\cap\{T_3>t\}$.

二、事件的关系与运算

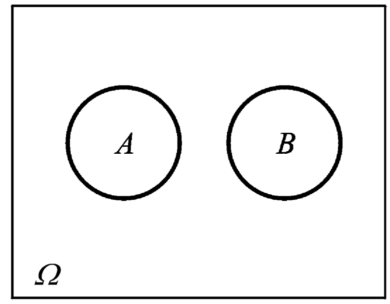
例 4 如果 A 与 B 互不相容, 则( ).

(A) $\bar{A}\bar{B}=\varnothing$　　(B) $\bar{A}=B$

(C) $\bar{A}+\bar{B}=\Omega$　　(D) $A+B=\Omega$

分析 这里要区分互不相容和对立事件. 如图, A 与 B 互不相容, 显然(D),

(B) 不成立. 而 $\bar{A}\bar{B} = \Omega - (A\cup B)$ 也不为 $\varnothing$, 故(A) 也不成立, 事实上, 由于 $\bar{A} + \bar{B} = \overline{AB} = \Omega$ 于是选择(C).



答　选择(C).

例 5　A, B 是两个事件, 则下列关系正确的是(　).

(A) $(A - B) + B = A$　　(B) $AB + (A - B) = A$

(C) $(A + B) - B = A$　　(D) $(AB + A) - B = A$

分析　这类问题关键在于正确理解事件运算的定义和性质, 必要时可借助于文氏图来分析. 比如选项(A) 的左边的运算结果应该等于 $A + B$, 而不是 A; 而选项(C) 左边运算的含义是 A 发生而 B 不发生, 即为 $A - B$, 这两个选项的关键在于要注意求并和差运算的顺序. 选项(B) 的左边实际上等于 $AB + A\bar{B} = A(B + \bar{B}) = A$, 从而选项(B) 是正确的. 最后选项(D) 左边的括号中运算结果实际上等于 A, 从而左边运算结果为 $A - B$.

答　选择(B).

注　① 注意集合(事件) 运算与代数运算的区别, 不能简单地抵消.

② 注意事件的结合律和交换律只在纯粹的并运算或纯粹的交运算中成立.

三、应用概率性质计算概率

例 6　已知 $P(A) = p, P(B) = q, P(A\cup B) = p + q$, 则 $P(\bar{A}\cup B) =$ ________.

分析　首先, 由题设及加法法则知 $P(AB) = 0$, 尽管 AB 一般不一定等于 $\varnothing$, 但在概率计算时视其为 $\varnothing$ 也不会影响计算结果. 在求填空题时, 这是一种好的技巧. 接下来不妨设 $AB = \varnothing$, 此时 B　$\bar{A}$ 从而 $P(\bar{A}\cup B) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - p$.

答　$1 - p$.

注　也可由概率公式直接计算:

$$
\begin{aligned}
P(\bar{A}\cup B) &= P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A}B) = P(\bar{A}) + P(B) - (P(B) - P(AB)) \\
&= P(\bar{A}) = 1 - p.
\end{aligned}
$$

例 7　已知 $P(B) = 0.4, P(AB) = 0.2, P(A\bar{B}) = 0.6$, 则 $P(\bar{A}\bar{B}) =$ ________.

分析　由于 $P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(A + B)$, 因而需计算 $P(A + B)$. 又根据加法公式有 $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, 其中题设中已知 $P(B)$ 和 $P(AB)$, 因而需计算 $P(A)$, 注意到 $P(AB) + P(A\bar{B}) = P(A)$. 由此可计算 $P(A + B)$ 从而得 $P(\bar{A}\bar{B})$.

答　0.

四、由概率性质导出的一些结果

例 8 如果 $P(AB)=0$，则(　　).

(A) A 与 B 不相容　　　　(B) $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 不相容

(C) $P(A-B)=P(A)$　　　　(D) $P(A-B)=P(A)-P(B)$

分析 首先注意到零概率事件不一定是不可能事件，因而(A)不成立，其次注意到即便是 $AB=\varnothing$，$\bar{A}$ $\bar{B}$ 也不一定不相容，因而(B)也不成立. 事实上，由 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$ 立即得知(C)是正确的，而(D)不成立.

答 选择(C).

例 9 设 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$，证明 $0.3\leq P(AB)\leq 0.6$.

分析 证明概率不等式的基本依据是概率的性质，通常包括：事件的概率介于 0 和 1 之间；子事件的概率不大于母事件的概率；概率的计算公式等.

证明 首先由 $AB\subset A$，知 $P(AB)\leq P(A)=0.6$. 其次，由 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.6+0.7-P(A\cup B)$，又由 $P(A\cup B)\leq 1$ 知 $P(AB)\geq 0.6+0.7-1=0.3$.

例 10 设 $P(A)+P(B)=1$，则(　　).

(A) $P(A\cup B)=1$　　　　(B) $P(A\cap B)=0$

(C) $P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(A\cap B)$　　　　(D) $P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(A\cup B)$

分析 由加法法则知选项(A)和(B)一般不成立，事实上取 $A=B$，且 $P(A)=\dfrac{1}{2}$，便否定了(A)和(B)的正确性. 选项(C)和(D)可利用概率性质来分析：

$$P(\bar{A}\cap\bar{B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=P(AB),$$

故知(C)是正确的.

答 选择(C).

五、古典概率的概率计算

1. 袋中取球问题

例 11 一袋中有 $m+n$ 个球，其中 m 个黑球，n 个白球，现随机地从袋中取出 k 个球($k\leq m+n$)，求其中恰好有 l 个白球($l\leq n$)的概率.

分析 这是古典概型中的一类最基本的问题，由于许多问题常常归结为此类问题，所以尽管它简单，我们还是列出. 这类问题的特点是所考虑的事件中只涉及球的结构，不涉及取球的顺序，因而计算样本点数(即基本事件数)时，只需考虑组合数.

解 首先，从 $m+n$ 个球中任取 k 个，取法共有 C_{m+n}^{k} 种，即试验的基本事件数为 C_{m+n}^{k}，而这些取法中恰好有 l 个白球的取法共有 $C_n^l C_m^{k-l}$，于是所求事件 A "恰好有 l 个白球"的概率为

$$P(A) = \frac{C_n^l C_m^{k-l}}{C_{m+n}^k}.$$

例 12　一袋中装有 $m+n$ 个球，其中 m 个黑球，n 个白球，现随机地从中每次取出一个球（不放回），求下列事件的概率：

(1) 第 i 次取到的是白球；

(2) 第 i 次才取到白球；

(3) 前 i 次中能取到白球；

(4) 前 i 次中恰好取到 l 个白球（$l \leq i \leq m+n, l \leq n$）；

(5) 到第 i 次为止才取到 l 个白球（$l \leq i \leq m+n, l \leq n$）；

(6) 取球直到剩下的球的颜色都相同为止，最后剩下的全是白球.

分析　本题中取球是按顺序取的，所考虑的事件往往也涉及取球的顺序，所以在计算样本点数（即基本事件数）时，要用排列数.

解　(1) $m+n$ 个球按顺序取出共有 $(m+n)!$ 种取法，其中第 i 次取出的是白球的取法按乘法法则共有 $C_n^1(m+n-1)!$ 种取法，于是“第 i 次取到的是白球”这一事件 A_i 的概率为

$$P(A_i) = \frac{C_n^1(m+n-1)!}{(m+n)!} = \frac{n}{m+n}.$$

(2) 同(1)，基本事件总数为 $(m+n)!$ 而“第 i 次才取到白球”等价于“前 $i-1$次取到的全是黑球，而且第 i 次取到的是白球”，由乘法法则，其取法共有 $C_n^1 P_m^{i-1}(m+n-i)!$. 于是“第 i 次才取到白球”这一事件 B_i 的概率为

$$P(B_i) = \frac{C_n^1 P_m^{i-1}(m+n-i)!}{(m+n)!}$$

$$= \frac{nP_m^{i-1}}{P_{m+n}^i}.$$

(3) 记该事件为 C_i，先计算其对立事件“前 i 次没有取到白球”的概率，

$$P(\overline{C_i}) = \frac{P_m^i(m+n-i)!}{(m+n)!} = \frac{P_m^i}{P_{m+n}^i} = \frac{C_m^i}{C_{m+n}^i}.$$

于是

$$P(C_i) = 1 - P(\overline{C_i}) = 1 - \frac{P_m^i}{P_{m+n}^i} = 1 - \frac{C_m^i}{C_{m+n}^i};$$

(4) 记该事件为 D_i，则易知

$$P(D_i) = \frac{C_i^l P_n^l P_m^{i-l}(m+n-i)!}{(m+n)!}$$

$$=\frac{C_i^l P_n^l P_m^{i-l}}{P_{m+n}^i}=\frac{C_n^l C_m^{i-l}}{C_{m+n}^i}.$$

(5)“到第 i 次为止才取到 l 个白球”等价于“前 $i-1$ 次恰好取到 $l-1$ 个白球,而第 i 次取到的是白球”,于是该事件 E_i 的概率为

$$P(E_i)=\frac{C_{i-1}^{l-1}P_n^{l-1}P_m^{(i-1)-(l-1)}C_{n-l+1}^1(m+n-i)!}{(m+n)!}$$

$$=\frac{(i-1)!C_n^{l-1}C_m^{i-l}C_{n-l+1}^1}{P_{m+n}^i}=\frac{C_n^{l-1}C_m^{i-l}(n-l+1)}{iC_{m+n}^i}.$$

(6)首先注意到“剩下都是白球”等价于“最后一次取到的是白球”于是由(1)的结果,该事件 F 的概率为

$$P(F)=\frac{n}{m+n}.$$

注 ① 例 12 中的问题(1)就是著名的抽签问题,问题的结果表明,抽到好签的机会(概率)与抽签的次序无关,说明抽签的公平性.

② 由于问题(1)—(5)中的事件均只涉及前 i 次取球,因而我们可以只考虑取 i 次球的试验,比如,此时的基本事件总数为 P_{m+n}^i,类似可计算相应事件所含基本事件数,这样计算会更简单,而结果与例中解法的结果一致.

③ 尽管试验中取球是按顺序抽取的,但如果所考虑的事件,只涉及取出的球的结构而不涉及取球的顺序则可以按组合数来计算基本事件总数和事件中所包含的基本事件数(但注意二者必须统一!),所得结果与考虑顺序时按排列数计算的结果是一致的,比如例 12 中的问题(3)和(4).

④ 本例中的顺序取球问题等价于排序问题,也等价于将 $m+n$ 个球随机放入 $m+n$ 个箱子中,每箱只放一球.

⑤ 问题(3)的解法也是典型的,在遇到“能”或“至少一个”等时,直接计算需要考虑的情况比较多,较复杂,往往先计算对立事件的概率.

⑥ 上面的例子中,我们还注意到事件表述的“转化”是解决问题的关键所在.在后面的讨论中,我们会经常遇到.

例 13 一袋中装有 $m+n$ 个球,其中有 m 个黑球,n 个白球.每次从中任取一球,取后放回,求下列事件的概率:

(1) 第 i 次取到的是白球;

(2) 第 i 次才取到白球;

(3) 前 i 次能取到白球;

(4) 前 i 次中恰好取到 l 个白球;

(5) 到第 i 次为止才取到 l 个白球.

分析　对于有放回的取球,计算取法要用重复排列数,比如 $m+n$ 个球,每次取一个球有 $m+n$ 种取法,根据乘法法则,i 次取球便有 $(m+n)^i$ 种取法.此外类似于例 12 的注中所说明的,这里我们可以仅考虑 i 次取球.

解　(1) i 次取球的取法共有 $(m+n)^i$ 种,"第 i 次取到的是白球"的取法根据乘法法则共有 $C_n^1(m+n)^{i-1}$ 种,从而所求事件 A_i 的概率

$$P(A_i)=\frac{C_n^1(m+n)^{i-1}}{(m+n)^i}=\frac{n}{m+n}.$$

(2) 基本事件总数同(1),而"第 i 次才取到白球"等价于前 $i-1$ 次取到的都是黑球(共有 m^{i-1} 种取法)且第 i 次取到的是白球(共有 n 种取法),由乘法法则 i 次取球的取法共有 nm^{i-1} 种,于是事件 B_i"第 i 次才取到白球"的概率

$$P(B_i)=\frac{m^{i-1}n}{(m+n)^i}=\left(\frac{m}{m+n}\right)^{i-1}\frac{n}{m+n}.$$

(3) 设所求事件为 C_i,先计算对立事件 $\overline{C}_i$ 的概率,容易得到

$$P(\overline{C}_i)=\frac{m^i}{(m+n)^i}=\left(\frac{m}{m+n}\right)^i,$$

于是

$$P(C_i)=1-P(\overline{C}_i)=1-\left(\frac{m}{m+n}\right)^i.$$

(4)"设前 i 次恰好取到 l 个白球"为事件 D_i,取法使用乘法法则:在 i 次中选取 l 次取白球共有 C_i^l 种选取法.其次每次取到的白球是 n 个球中的一个,共 n 种取法.l 次共有 n^l 种取法.然后其它 $i-l$ 次取球应为黑球.共 m^{i-l} 种.从而第 i 次中恰好取到 l 个白球的取法共有 $C_i^l n^l m^{i-l}$ 种

$$P(D_i)=\frac{C_i^l n^l m^{i-l}}{(m+n)^i}=C_i^l\left(\frac{n}{m+n}\right)^l\left(\frac{m}{m+n}\right)^{i-l}.$$

(5) 事件 E_i"到第 i 次为止才取到 l 个白球"等价于"第 $i-1$ 次恰好取到 $l-1$ 个白球而第 i 次取到的是白球.根据乘法法则.其取法有 $C_{i-1}^{l-1}n^{l-1}m^{(i-1)-(l-1)}\cdot n=C_{i-1}^{l-1}n^l m^{i-l}$ 种.于是

$$P(E_i)=\frac{C_{i-1}^{l-1}n^l m^{i-l}}{(m+n)^i}=C_{i-1}^{l-1}\left(\frac{n}{m+n}\right)^l\left(\frac{m}{m+n}\right)^{i-l}.$$

注　有放回的取球问题也可视为独立试验序列,因而可以用独立事件概型来求解,特别的这里只有两种球因而实际上可使用伯努利概型:每次取球看成一次试验,"取到白球"看成事件 A.那么 $P(A)=\frac{n}{m+n}$.由伯努利概型来计算会更简便,结果与例中解法一致.

例 14　一人的口袋中放有 2 盒火柴,每盒 n 支,每次从口袋中随机的取一盒并用去一支.当他发现一盒空了,另一盒还恰有 m 支的概率是多少?

分析　这里 2 盒火柴相当于 2 个球. 每次从中取出一盒相当于取到一个球, 因而是有放回的取球问题、难点和关键是正确的求出所考虑事件的基本事件数.

解　由于每次取火柴有两种方式, 当发现一盒空了, 另一盒还恰有 m 支火柴, 说明已取了 $2n-m$ 支火柴. 加上最后一次取出火柴盒发现是空的, 一共取了 $2n-m+1$ 次, 故总取法有 2^{2n-m+1} 种. 先假设最后取到的是甲盒, 即此时甲盒空, 乙盒还剩 m 根火柴, 那么前 $2n-m$ 次中必有 n 次取到的是甲盒, 最后一次取到的也是甲盒, 共有 C_{2n-m}^{n} 种取法, 同样, 如果最后取到的是乙盒, 此时乙盒空, 而甲盒还剩 m 根火柴, 一共也有 C_{2n-m}^{n} 种取法, 于是导致所求事件发生共有 $2C_{2n-m}^{n}$ 种取法, 故所求事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{C_{2n-m}^{n}}{2^{2n-m}}.$$

注　① 本例是古典概率计算中著名的巴拿赫问题, 它是放回取球问题的一个具体应用.

② 读者也可以用伯努利概型来解此问题.

例 15　有 k 个坛子, 每一个坛子中装有 n 个球, 分别编号为 1 至 n. 今从每个坛子中任取一球, 问 m 是所取的球中最大编号的概率.

分析　此问题中尽管有 k 个坛子, 但由于每个坛子中球的结构是一样的, 因而每个坛子中取一球, 实际上等同于在一个坛子中有放回地每次取一球, 共取 k 次. 此外直接求 m 是最大号码的取法很麻烦, 利用差事件容易求解. 记 A_k 为取得的号码不超过 l 的事件, 则“ m 为最大号码 ”这一事件等于 A_m-A_{m-1}.

解　每次取球编号有 n 种可能, k 次取球共有 n^k 种可能. 记事件 A_m 为事件“ 取得号码不超过 m ”, 则导致 A_m 发生的可能取法有 m^k 种, 类似事件 A_{m-1}“ 取得号码不超过 $m-1$ ”的取法有 $(m-1)^k$ 种, 从而最大号码为 m 的取法有 $m^k-(m-1)^k$ 种, 于是“ m 为最大号码 ”的事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m^k-(m-1)^k}{n^k}.$$

2. **排序问题**

例 16　将标号为 $1, 2, \cdots, n$ 的 n 个球随意地排成一行. 求下列事件的概率:

(1) 标号是递增或递减的序列;

(2) 第 1 号球排在最左或最右;

(3) 第 1 号球与第 2 号相邻;

(4) 第 1 号球在第 2 号球右边(但不一定相邻!);

(5) 第 1 号球与第 2 号之间恰有 r 个球($r<n-1$);

分析　这是一个最基本的排序问题. 需使用排序数计算基本事件数.

解　(1) n 个球随意排序共有 $n!$ 种排法. 由于标号递增或递减的排法有 2

种. 故所求事件 A 的概率为:

$$P(A)=\frac{2}{n!}.$$

(2) 基本事件总数同(1). 第一个球排在最左或右有两种选择. 剩下的球在余下的 $n-1$ 个位置随意排, 有 $(n-1)!$ 种排法. 于是由乘法法则. 导致事件发生的排法有 $2(n-1)!$ 种. 于是所求事件 B 的概率为

$$P(B)=\frac{2(n-1)!}{n!}=\frac{2}{n}.$$

(3) 基本事件总数同(1). 其中共有 $(n-1)$ 对相邻的位置. 任选一对共有 $n-1$种, 在所选择相邻位置中排第 1 号球和第 2 号球有两种排法. 然后其它$n-2$ 个球在其它的 $n-2$ 个位置上随意排序, 共有 $(n-2)!$ 种排法. 于是根据乘法法则, 第 1 号与第 2 号球相邻的排法共有 $2(n-1)[(n-2)!]$. 于是所求事件 C 的概率为

$$P(C)=\frac{2(n-1)[(n-2)!]}{n!}=\frac{2}{n}.$$

(4) 基本事件数同(1). 由于"第 1 号球排在第 2 号球右边"的每一种排法. 在交换第 1 号和第 2 号球位置后便对应于"第 1 号球在第 2 号左边"的排法, 反之亦然. 于是"第 1 号球排在第 2 号球右边"与"第 1 号球排在第 2 号左边"的排法相等. 各占总排法的 1 2. 于是所求事件 D 的概率为

$$P(D)=\frac{1}{2}.$$

(5) 基本事件总数同(1). 第 1 号球与第 2 号球中间恰有 r 个球, 表明这两个球必定在中间相隔 r 个位置的这样两个位置上排列, 这样的位子共有 $(n-r-1)$ 对. 第 1、2 号球在所选定的一对上有 $2!$ 种排法; 其它球在剩下的 $n-2$ 个位置上随意排序, 有 $(n-2)!$ 种排法. 于是该事件对应的排法有 $(n-r-1)\cdot 2!\cdot(n-2)!$. 从而该事件 E 的概率为

$$P(E)=\frac{2(n-r-1)(n-2)!}{n!}=\frac{2(n-r-1)}{n(n-1)},$$

特别的, 当 $r=0$ 时即为问题(3) 的结果.

注　如果 n 个球排成的是一圈, 则各球的相对位置有 $(n-1)!$ 种排法. 此时第 1 号球与第 2 号球按顺时钟中间恰有 r 个球的排法有 $(n-2)!$ 种. 于是其概率为$\frac{1}{n-1}$, 与 r 无关.

例 17　一套书共 3 卷, 其中第 1 卷 2 册, 第 2 卷 3 册, 第 3 卷 2 册. 现随意排放在一层书架上, 则同一卷书恰好摆在一起的概率为________.

分析　这是一个分类排序问题. 基本事件总数按全排列计算, 共 7 册书, 随