大学数学学习辅导丛书

《数学模型(第三版)》习题参考解答

姜启源　谢金星　叶　俊　编

高等教育出版社

郑 重 声 明

策划编辑　李艳馥
编　　辑　王　强
封面设计　于文燕
责任绘图　尹　莉
版式设计　王艳红
责任校对　夏　晔
责任印制

内容提要

本书对《数学模型(第三版)》中的大部分习题给出了解答或提示,其中部分解答包含编者在多年教学中发现的学生遇到的问题和常犯的错误.一些习题、特别是综合题目是开放性的,没有标准答案,本书给出的仅供参考.

本书可作为讲授数学建模课程和辅导数学建模竞赛的教师的参考资料,也可作为《数学模型(第三版)》自学者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学模型(第三版)习题参考解答 姜启源等编.
北京:高等教育出版社,2003.6
ISBN 7-04-011945-5

Ⅰ.数... Ⅱ.姜... Ⅲ.数学模型-高等学校-解答 Ⅳ.022-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 037489 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http: www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http: www.hep.com.cn

经　　销	新华书店北京发行所
排　　版	高等教育出版社照排中心
印　　刷	

开　　本	787×960　1 16	版　　次	2003 年　月第 1 版
印　　张	9.5	印　　次	年　月第 1 次印刷
字　　数	170 000	定　　价	11.60 元

前　　言

学习数学建模(主要指用机理分析建立数学模型)的有效方法之一是实例研究(Case studies),而实例研究至少有两方面的工作,一方面是阅读、分析、评价、改进别人做的模型,另一方面是亲自动手,认真做几个实际题目(哪怕是已经相当简化的).《数学模型(第三版)》中的习题大体上分两类,一类是对书里某个模型的某些性质进行推导、证明,或模型的进一步研究,主要配合上述第一方面的学习;另一类(标以 * 号)需要读者自己作出假设、构造模型并求解,因而没有确定的答案,它们配合上述第二方面的研究.书最后的综合题目(其中部分选自我国和美国大学生数学建模竞赛题目)的开放性更强,给读者提供更大的发挥创造力的机会.

这本参考解答是为《数学模型(第三版)》的习题编写的,其中第一类习题的解答基本上是正确的,甚至是唯一的,虽然不可避免地存在一些纰漏和缺陷;而第二类习题,包括综合习题的解答则只能作为参考,我们相信一定会有不少与所提供的完全不同的答案.对于这部分题目,作为教师,应该允许和鼓励学生作出与本书不同的答案;作为同学,应该努力开发自己的想像力和创造力,争取得到有特色的结果.编者特别希望学习数学建模的同学们,对于这部分题目不要先看本书给出的解答,可以等自己作出来(哪怕是非常粗糙的)之后,再与参考答案比较.

为使用方便起见,将《数学模型(第三版)》每章的习题重排在每章参考解答的前面,习题所涉及的参考文献见原书.

《数学模型(第三版)》和本书只能作为学习的入门,数学建模在各门学科及各个领域中有着广泛的应用和强盛的生命力,希望读者在实践中不断提高数学建模的意识和能力,真正解决一些生活和工作中需要用到数学方法的实际问题.

编者

2003.2

目　　录

第 1 章　习　　题

1. 举出两三个实例说明建立数学模型的必要性.包括实际问题的背景,建模目的,需要大体上什么样的模型以及怎样应用这种模型等.

2. 从下面不太明确的叙述中确定要研究的问题,要考虑哪些有重要影响的变量[20]:

(1) 一家商场要建一个新的停车场,如何规划照明设施.

(2) 一农民要在一块土地上作出农作物的种植规划.

(3) 一制造商要确定某种产品的产量及定价.

(4) 卫生部门要确定一种新药对某种疾病的疗效.

(5) 一滑雪场要进行山坡滑道和上山缆车的规划.

3. 怎样解决下面的实际问题.包括需要哪些数据资料,要作些什么观察、试验以及建立什么样的数学模型等[20,26].

(1) 估计一个人体内血液的总量.

(2) 为保险公司制定人寿保险金计划(不同年龄的人应缴纳的金额和公司赔偿的金额).

(3) 估计一批日光灯管的寿命.

(4) 确定火箭发射至最高点所需的时间.

(5) 决定十字路口黄灯亮的时间长度.

(6) 为汽车租赁公司制订车辆维修、更新和出租计划.

(7) 一高层办公楼有 4 部电梯,早晨上班时间非常拥挤,试制订合理的运行计划.

4. 在 1.3 节"椅子能在不平的地面上放稳吗"的假设条件中,将四脚的连线呈正方形改为呈长方形,其余不变.试构造模型并求解.

5. 模仿 1.4 节商人过河问题中的状态转移模型,作下面这个众所周知的智力游戏:人带着猫、鸡、米过河,船除需要人划之外,至多能载猫、鸡、米三者之一,而当人不在场时猫要吃鸡、鸡要吃米.试设计一个安全过河方案,并使渡河次数尽量地少.

6. 利用 1.5 节表 1 和表 3 给出的 1790—2000 年的美国实际人口资料建立下列模型:

(1) 分段的指数增长模型.将时间分为若干段,分别确定增长率 r.

(2) 阻滞增长模型.换一种方法确定固有增长率 r 和最大容量 x_m.

7. 说明 1.5 节中 Logistic 模型(9)可以表为 $x(t)=\frac{x_m}{1+e^{-r(t-t_0)}}$,其中 t_0 是人口增长出现拐点的时刻,并说明 t_0 与 r, x_m 的关系.

8. 假定人口的增长服从这样的规律:时刻 t 的人口为 $x(t)$, t 到 $t+\Delta t$ 时间内人口的增量与 $x_m - x(t)$成正比(其中 x_m 为最大容量).试建立模型并求解.作出解的图形并与指数增长模型、阻滞增长模型的结果进行比较.

9. 为了培养想象力、洞察力和判断力,考察对象时除了从正面分析外,还常常需要从侧面或反面思考.试尽可能迅速地回答下面的问题:

(1) 某甲早 8:00 从山下旅店出发,沿一条路径上山,下午 5:00 到达山顶并留宿.次日早 8:00 沿同一路径下山,下午 5:00 回到旅店.某乙说,甲必在 2 天中的同一时刻经过路径中的同一地点.为什么.

(2) 37 支球队进行冠军争夺赛,每轮比赛中出场的每两支球队中的胜者及轮空者进入下一轮,直至比赛结束.问共需进行多少场比赛,共需进行多少轮比赛.如果是 n 支球队比赛呢.

(3) 甲乙两站之间有电车相通,每隔 10 分钟甲乙两站相互发一趟车,但发车时刻不一定相同.甲乙之间有一中间站丙,某人每天在随机的时刻到达丙站,并搭乘最先经过丙站的那趟车,结果发现 100 天中约有 90 天到达甲站,约有 10 天到达乙站.问开往甲乙两站的电车经过丙站的时刻表是如何安排的.

(4) 某人家住 T 市在他乡工作,每天下班后乘火车于 6:00 抵达 T 市车站,他的妻子驾车准时到车站接他回家.一日他提前下班搭早一班火车于 5:30 抵 T 市车站,随即步行回家,他的妻子像往常一样驾车前来,在半路上遇到他,即接他回家,此时发现比往常提前了 10 分钟.问他步行了多长时间.

(5) 一男孩和一女孩分别在离家 2 km 和 1 km 且方向相反的两所学校上学,每天同时放学后分别以 4 km/h 和 2 km/h 的速度步行回家.一小狗以 6 km/h 的速度由男孩处奔向女孩,又从女孩处奔向男孩,如此往返直至回到家中.问小狗奔波了多少路程.

如果男孩和女孩上学时小狗也往返奔波在他们之间,问当他们到达学校时小狗在何处[32].

第 1 章习题参考解答

3.

(1) 注射一定量的葡萄糖,采集一定容积的血样,测量注射前后葡萄糖含量的变化,即可估计人体的血液总量.注意采集和测量的时间要选择恰当,使血液中的葡萄糖含量充分均匀,又基本上未被人体吸收.

(2) 调查不同年龄的人的死亡率,并估计其在未来一定时期的变化,还应考虑银行存款利率和物价指数,保险金与赔偿金之比大体上应略高于死亡率.

(3) 从一批灯管中取一定容量的样本,测得其平均寿命,可作为该批灯管寿命的估计值.为衡量估计的精度,需要从样本寿命确定该批灯管寿命的概率分布,即可得到估计值的置信区间. 还可试验用提高电压的办法加速寿命测试,以缩短测量时间.

(4) 根据牛顿第二定律建立火箭向上发射后的运动方程,初速已知,若不考虑空气阻力,很容易算出到达最高点(即速度为零)时间;若考虑空气阻力,不妨设其与火箭速度(或速度的平方)成正比,并由试验及拟合方法确定阻力系数,再解方程得到结果.

(5) 司机看到黄灯后停车要有一定的刹车距离 S_1,设通过十字路口的距离为 S_2,汽车行驶速度为 v,则黄灯的时间长度 t 应使距停车线 S_1 之内的汽车能通过路口,即 $t\approx(S_1+S_2)\ v$. S_1 可由试验得到,或按照牛顿第二定律解运动方程,进一步可考察不同车重、不同路面及司机反应灵敏程度等因素的影响.

(6) 根据资料和经验确定维修费用随着车龄和行驶里程的增加而增加的关系,再考虑维修和更新费用,可以以一年为一个时段,结合租金决定应该维修或更新.

(7) 统计在各层上班的人数,通过数据或计算确定电梯运行时间,以等待的人数与时间乘积为目标,建立优化模型,确定每部电梯运行的楼层(有的从大厅直接运行到高层).

4. 相邻两椅脚与地面距离之和分别定义为 $f(\theta)$和 $g(\theta)$,将椅子旋转 $180°$,其余作法与 1.3 节相同.

5. 人、猫、鸡、米分别记为 $i=1,2,3,4$,当 i 在此岸时记 $x_i=1$,否则记 $x_i=0$,则此岸的状态可用 $s=(x_1, x_2, x_3, x_4)$表示.记 s 的反状态为 $s'=(1-x_1, 1-x_2, 1-x_3, 1-x_4)$,允许状态集合为 $S=\{(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,$

1),(1,0,1,1),(1,0,1,0)及它们的 5 个反状态}.

决策为乘船方案,记作 $d=(u_1,u_2,u_3,u_4)$,当 i 在船上时记 $u_i=1$,否则记 $u_i=0$,允许决策集合为 $D=\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(1,0,0,0)\}$.

记第 k 次渡河前此岸的状态为 s_k,第 k 次渡河的决策为 d_k,则状态转移律为 $s_{k+1}=s_k+(-1)^k d_k$,设计安全过河方案归结为求决策序列 $d_1,d_2,\cdots,d_n\in D$,使状态 $s_k\in S$ 按状态转移律由初始状态 $s_1=(1,1,1,1)$ 经 n 步到达 $s_{n+1}=(0,0,0,0)$.一个可行方案如下:

k	1	2	3	4	5	6	7	8
s_k	(1,1,1,1)	(0,1,0,1)	(1,1,0,1)	(0,1,0,0)	(1,1,1,0)	(0,0,1,0)	(1,0,1,0)	(0,0,0,0)
d_k	(1,0,1,0)	(1,0,0,0)	(1,0,0,1)	(1,0,1,0)	(1,1,0,0)	(1,0,0,0)	(1,0,1,0)	

6.

(1) 分段的指数增长模型.根据 1.5 节表 3 中的增长率将时间分为 3 段:1790 年至 1880 年平均年增长率为 2.83%;1890 年至 1960 年平均年增长率为 1.53%;1970 年至 2000 年平均年增长率为 1.12%.3 段模型为(1790 年为 $t=0$,1800 年为 $t=1,\cdots$)

$$x_1(t)=3.9e^{0.283t},\quad t=0,1,\cdots,10$$
$$x_2(t)=x_1(10)e^{0.153(t-10)},\quad t=11,\cdots,18$$
$$x_3(t)=x_2(18)e^{0.112(t-18)},\quad t=19,\cdots,21$$

(2) 阻滞增长模型.可以用实际增长率数据中前 5 个的平均值作为固有增长率 r,取某些专家的估计 400 百万为最大容量 x_m,以 1790 年的实际人口为 x_0,模型为 1.5 节的(9)式.

以上两个模型的计算结果见下表.

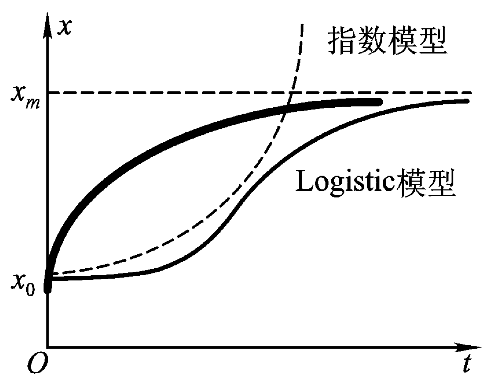
年	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860
实际人口	3.9	5.3	7.2	9.6	12.9	17.1	23.2	31.4
模型(1)	3.9	5.2	6.9	9.1	12.1	16.1	21.3	28.3
模型(2)	3.9	5.2	7.0	9.4	12.6	16.7	22.2	29.3
年	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940
实际人口	38.6	50.2	62.9	76.0	92.0	106.5	123.2	131.7
模型(1)	37.5	49.8	66.1	77.0	89.7	104.6	121.9	142.0
模型(2)	38.4	49.9	64.1	81.2	101.3	124.1	149.0	174.9

续表

年	1950	1960	1970	1980	1990	2000
实际人口	150.7	179.3	204.0	226.5	251.4	281.4
模型(1)	165.5	192.9	224.7	251.4	281.2	314.5
模型(2)	200.9	225.8	248.6	268.7	285.9	300.1

7. 注意到 $t = t_0$ 时 $x = x_m\ 2$,立即可得 $x(t) = \dfrac{x_m}{1+e^{-r(t-t_0)}}$,且 $t_0 = \dfrac{1}{r}\ln\dfrac{x_m - x_0}{x_0}$.

8. $\dfrac{dx}{dt} = r(x_m - x)$,$r$ 为比例系数,$x(0) = x_0$,解为 $x(t) = x_m - (x_m - x_0)e^{-rt}$,如右图中粗实线所示.当 t 充分大时,它与 Logistic 模型相近.



9.

(1) 设想有两个人一人上山,一人下山,同一天同时出发,沿同一路径,必定相遇.

(2) 36 场比赛,因为除冠军队外,每队都负一场;6 轮比赛,因为 2 队赛 1 轮,32 队赛 5 轮.n 队需赛 $n-1$ 场,若 $2^{k-1} < n \leq 2^k$,则需赛 k 轮.

(3) 不妨设从甲到乙经过丙站的时刻表是:8:00,8:10,8:20,…,那么从乙到甲经过丙站的时刻表应该是:8:09,8:19,8:29,….

(4) 步行了 25 分钟.设想他的妻子驾车遇到他后,先带他去车站,再回家,汽车多行驶了 10 分钟,于是带他去车站这段路程汽车跑了 5 分钟,而到车站的时间是 6:00,所以妻子驾车遇到他的时刻是 5:55.

(5) 放学时小狗跑了 3 km.孩子上学到达学校时小狗的位置不定,因为设想放学时小狗从任何位置起跑,都会与孩子同时到家.之所以出现位置不定的结果,是由于上学时小狗初始跑动的方向无法确定.

第 2 章　习　题

1. 学校共 1 000 名学生,235 人住在 A 宿舍,333 人住在 B 宿舍,432 人住在 C 宿舍.学生们要组织一个 10 人的委员会,试用下列办法分配各宿舍的委员数:

(1) 按比例分配取整数的名额后,剩下的名额按惯例分给小数部分较大者.

(2) 2.1 节中的 Q 值方法.

(3) d'Hondt 方法:将 A, B, C 各宿舍的人数用正整数 $n = 1,2,3,\cdots$ 相除,其商数如下表:

	1	2	3	4	5	…
A	$\underline{235}$	$\underline{117.5}$	78.3	58.75	…	
B	$\underline{333}$	$\underline{166.5}$	$\underline{111}$	83.25	…	
C	$\underline{432}$	$\underline{216}$	$\underline{144}$	$\underline{108}$	$\underline{86.4}$	

将所得商数从大到小取前 10 个(10 为席位数),在数字下标以横线,表中 A, B, C 行有横线的数分别为 2,3,5,这就是 3 个宿舍分配的席位.你能解释这种方法的道理吗.

如果委员会从 10 人增至 15 人,用以上 3 种方法再分配名额.将 3 种方法两次分配的结果列表比较.

(4) 你能提出其它的方法吗.用你的方法分配上面的名额.

2. 用微积分的方法导出 2.2 节的公式(2).

3. 在 2.5 节中考虑 8 人艇分重量级组(桨手体重不超过 86 kg)和轻量级组(桨手体重不超过 73 kg),建立模型说明重量级组的成绩比轻量级组大约好 5%.

4. 用 2.7 节实物交换模型中介绍的无差别曲线的概念,讨论以下雇员和雇主之间的协议关系:

(1) 以雇员一天的工作时间 t 和工资 w 分别为横坐标和纵坐标,画出雇员无差别曲线族的示意图.解释曲线为什么是你画的那种形状.

(2) 如果雇主付计时工资,对不同的工资率(单位时间的工资)画出计时工资线族.根据雇员的无差别曲线族和雇主的计时工资线族,讨论双方将在怎样的一条曲线上达成协议.

(3) 雇员和雇主已经达成了一个协议(工作时间 t_1 和工资 w_1).如果雇主想使雇员的工作时间增加到 t_2,他有两种办法:一是提高计时工资率,在协议线的另一点(t_2, w_2)达成新的协议;二是实行超时工资制,即对工时 t_1 仍付原计时工资,对工时 $t_2 - t_1$ 付给更高的超时工资.试用作图方法分析哪种办法对雇主更有利,指出这个结果的条件[6].

5. 在 2.8 节核武器竞赛模型中,证明由(6)式表示的乙安全线 $y = f(x)$的性质.

6. 在 2.8 节核武器竞赛模型中,讨论以下因素引起的平衡点的变化[20]:

(1) 甲方提高导弹导航系统的性能.

(2) 甲方增加导弹爆破的威力.

(3) 甲方发展电子干扰系统.

(4) 双方建立反导弹系统.

7. 在超市购物时你注意到大包装商品比小包装商品便宜这种现象了吗.比如洁银牙膏 50 g 装的每支 1.50 元,120 g 装的每支 3.00 元,二者单位重量的价格比是 1.2∶1.试用比例方法构造模型解释这个现象.

(1) 分析商品价格 c 与商品重量 w 的关系.价格由生产成本、包装成本和其它成本等决定,这些成本中有的与重量 w 成正比,有的与表面积成正比,还有与 w 无关的因素.

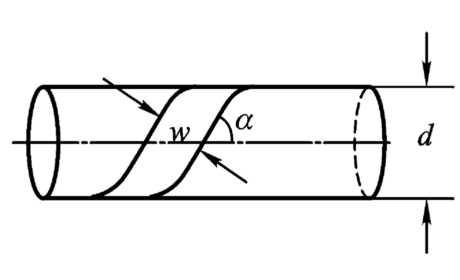
(2) 给出单位重量价格 c 与 w 的关系,画出它的简图,说明 w 越大 c 越小,但是随着 w 的增加 c 减小的程度变小.解释实际意义是什么.

*8. 一垂钓俱乐部鼓励垂钓者将钓上的鱼放生,打算按照放生的鱼的重量给予奖励,俱乐部只准备了一把软尺用于测量,请你设计按照测量的长度估计鱼的重量的方法.假定鱼池中只有一种鲈鱼,并且得到 8 条鱼的如下数据(胸围指鱼身的最大周长):

身长(cm)	36.8	31.8	43.8	36.8	32.1	45.1	35.9	32.1
重量(g)	765	482	1162	737	482	1389	652	454
胸围(cm)	24.8	21.3	27.9	24.8	21.6	31.8	22.9	21.6

先用机理分析建立模型,再用数据确定参数[20].

9. 用宽 w 的布条缠绕直径 d 的圆形管道,要求布条不重叠,问布条与管道轴线的夹角 α 应多大(如图).若知道管道长度,需用多长布条(可考虑两端的影响).如果管道是其它形状呢[17].



*10. 用已知尺寸的矩形板材加工半径一定的圆

盘,给出几种简便、有效的排列方法,使加工出尽可能多的圆盘[17].

11. 雨滴匀速下降,空气阻力与雨滴表面积和速度平方的乘积成正比,试确定雨速与雨滴质量的关系.

*12. 动物园里的成年热血动物靠饲养的食物维持体温基本不变,在一些合理、简化的假设下建立动物的饲养食物量与动物的某个尺寸之间的关系[20].

*13. 生物学家认为,对于休息状态的热血动物消耗的能量主要用于维持体温,能量与从心脏到全身的血流量成正比,而体温主要通过身体表面散失,建立一个动物体重与心率之间关系的模型,并用下面的数据加以检验[20].

动　物	体重(g)	心率(次 分)
田鼠	25	670
家鼠	200	420
兔	2 000	205
小狗	5 000	120
大狗	30 000	85
羊	50 000	70
人	70 000	72
马	450 000	38

*14. 举重比赛按照运动员的体重分组,你能在一些合理、简化的假设下建立比赛成绩与体重之间的关系吗.下面是一届奥运会的竞赛成绩,可供检验你的模型[20].

组　别	最大体重(kg)	抓举(kg)	挺举(kg)	总成绩(kg)
1	54	132.5	155	287.5
2	59	137.5	170	307.5
3	64	147.5	187.5	335
4	70	162.5	195	357.5
5	76	167.5	200	367.5
6	83	180	212.5	392.5
7	91	187.5	213	402.5
8	99	185	235	420
9	108	195	235	430
10	>108	197.5	260	457.5

15. 速度为 v 的风吹在迎风面积为 s 的风车上,空气密度是 ρ.用量纲分析

方法确定风车获得的功率 P 与 v, s, ρ 的关系.

16. 雨滴的速度 v 与空气密度 ρ、粘滞系数 μ 和重力加速度 g 有关,其中粘滞系数的定义是:运动物体在流体中受的摩擦力与速度梯度和接触面积的乘积成正比,比例系数为粘滞系数.用量纲分析方法给出速度 v 的表达式.

17. 原子弹爆炸时巨大的能量从爆炸点以冲击波形式向四周传播.据分析在时刻 t 冲击波达到的半径 r 与释放能量 e,大气密度 ρ,大气压强 p 有关(设 $t=0$ 时 $r=0$).用量纲分析方法证明 $r=\left(\frac{et^2}{\rho}\right)^{1/5}\varphi\left(\frac{p^5t^6}{e^2\rho^3}\right)$,$\varphi$ 是未定函数[47].

18. 用量纲分析方法研究人体浸在匀速流动的水里时损失的热量.记水的流速 v,密度 ρ,比热 c,粘性系数 μ,热传导系数 k,人体尺寸 d.证明人体与水的热交换系数 h 与上述各物理量的关系可表为 $h=\frac{k}{d}\varphi\left(\frac{v\rho d}{\mu},\frac{\mu c}{k}\right)$,$\varphi$ 是未定函数,h 定义为单位时间内人体的单位面积在人体与水的温差为 1℃时的热量交换[23].

19. 用量纲分析方法研究两带电平行板间的引力.板的面积为 s,间距为 d,电位差为 v,板间介质的介电常数为 ε,证明两板之间的引力 $f=\varepsilon v^2\varphi(s/d^2)$.如果又知道 f 与 s 成正比,写出 f 的表达式.这里介电常数 ε 的定义是 $f=\frac{q_1q_2}{\varepsilon d^2}$,其中 q_1, q_2 是两个点电荷的电量,d 是点电荷的距离,f 是点电荷间的引力[23].

20. 考察阻尼摆的周期,即在单摆运动中考虑阻力,并设阻力与摆的速度成正比.给出周期的表达式,然后讨论物理模拟的比例模型,即怎样由模型摆的周期计算原型摆的周期.

21. 考察模拟水下爆炸的比例模型.爆炸物质量 m,在距爆炸点距离 r 处设置仪器,接收到的冲击波压强为 p,记大气初始压强 p_0,水的密度 ρ,水的体积弹性模量 k,用量纲分析方法已经得到 $p=p_0\varphi\left(\frac{p_0}{k},\frac{\rho r^3}{m}\right)$.设模拟实验与现场的 p_0, ρ, k 相同,而爆炸物模型的质量为原型的 1∶1 000.为了使实验中接收到与现场相同的压强 p,问实验时应如何设置接收冲击波的仪器,即求实验仪器与爆炸点之间的距离是现场的多少倍[23].

22. 质量为 m 的小球以速度 v 竖直上抛,阻力与速度成正比,比例系数 k.设初始位置为 $x=0$, x 轴竖直向上,则运动方程为

$$m\ddot{x}+k\dot{x}+mg=0,\ x(0)=0,\ \dot{x}(0)=v$$

方程的解可表为 $x=x(t; v, g, m, k)$.试选择两种特征尺度将问题无量纲化,并讨论 k 很小时求近似解的可能性[30].

第 2 章习题参考解答

1. 按照题目所给方法(1),(2),(3)的席位分配结果如下表:

宿舍	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
A	3	2	2	4	4	3
B	3	3	3	5	5	5
C	4	5	5	6	6	7
总计	10	10	10	15	15	15

方法(3)的道理是:记 p_i 和 n_i 为各宿舍的人数和席位($i = 1,2,3$ 代表 A,B,C 宿舍),$p_i \ \ n_i$ 是每席位代表的人数,取 $n_i = 1,2,\cdots$,从得到的 $p_i \ \ n_i$ 中选较大者,可使对所有的 i,$p_i \ \ n_i$ 尽量接近.数学模型可记作 $\max(\min_i p_i \ \ n_i)$,其中 n_i 满足 $\sum_i n_i = n$(n 为总席位).

2. 考察 t 到 $t+\Delta t$ 时间内录像带缠绕在右轮盘上的长度,可得 $v\mathrm{d}t = (r + wkn)2\pi k\mathrm{d}n$,两边积分即为(2)式.

3. 由模型假设 3,划桨功率 p 与体重 w 成正比,而桨手数 $n = 8$ 不变,所以 2.5 节(2)式改为 $v \propto (w \ \ s)^{1\ 3}$.记重量级组和轻量级组的体重、艇速、比赛成绩和艇的浸没面积分别为 w_1,w_2,v_1,v_2,t_1,t_2,s_1,s_2,则 $\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = {\frac{w_2}{w_1}}^{1\ 3} \ {\frac{s_1}{s_2}}^{1\ 3}$.估计 $s_1 \ \ s_2$ 的大小:重量级组体重大,会使浸没面积增加,但艇身略大,又会使浸没面积减小,因而 $s_1 \ \ s_2$ 不会超过 1.05.代入 $w_1 = 86$,$w_2 = 73$,可得 $t_1 \ \ t_2 \approx 0.96$.

4.

(1) 雇员的无差别曲线族 $f(w,t) = c$ 是下凸的,如图 1,因为工资低时,他愿以较多的工作时间换取较少的工资;而当工资高时,就要求以较多的工资来增加一点工作时间.

(2) 雇主的计时工资族是 $w = at$,a 是工资率.这族直线与 $f(w,t) = c$ 的切点 P_1,P_2,P_3,$\cdots$的连线 PQ 为雇员与雇主的协议线.通常 PQ 是上升的(至少有一段应该是上升的),见图 1.

(3) 设双方在 $P_1(t_1, w_1)$点达成协议,当雇主想使雇员的工作时间增至 t_2 时,用提高计时工资率 a 的办法,应在协议线 PQ 上找出横坐标为 t_2 的 P_2 点,工资额为 w_2,见图 2.用超时工资的办法,应从 P_1 点作某一条无差别曲线的切线(粗虚线),使切点 P_2'的横坐标刚好是 t_2,若点 P_2'在 P_2 下方(图 2 表示了这种情况),则工资额 $w_2' < w_2$,即第二种办法对雇主有利.得到这个结果的条件是,在雇员没有工作时和已经工作了 t_1 时(得到工资 w_1),其无差别曲线族 $f(w, t) = c$没有变化.

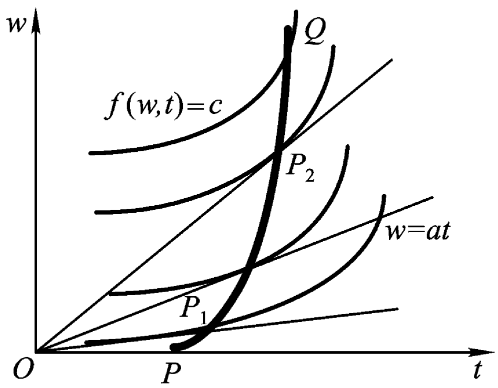


图 1

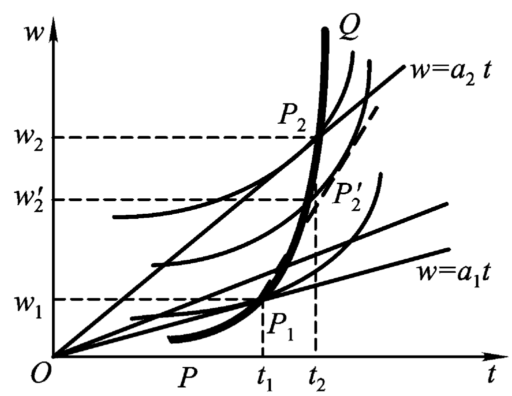


图 2

5. 乙安全线 $y = f(x)$表为 $y = \frac{y_0}{s^a} = \frac{y_0}{s^{x\ y}}$, $0 < s < 1$,可计算出 $y' = \frac{-\ln s}{1 + \ln(y\ \ y_0)}$,而 $y = f(x)$的极坐标表达式为 $r = \frac{y_0}{\sin\theta s^{\cot\theta}}$.由这些结果容易证明 $y = f(x)$的性质.

6.

(1) 若甲方提高导弹导航系统的性能,则乙方的残存率 s 变小, y 增加,乙安全线上移且变陡,平衡点向右上方移动.

(2) 若甲方增加导弹爆破的威力,则甲方的威慑值 x_0 减小,甲安全线左移且变陡,平衡点向左下方移动.

(3) 若甲方发展电子干扰系统,则乙方的威慑值 y_0 和甲方的残存率 s 变大,乙安全线 $y = f(x)$上移且变陡,甲安全线变陡,平衡点向左上方移动.

(4) 若双方发展反导弹系统,则双方的威慑值和残存率均变大,前者使平衡点向右上方移动,后者使平衡点向左下方移动,综合影响无法确定.

7.

(1) 生产成本主要与重量 w 成正比,包装成本主要与表面积 s 成正比,其它成本也包含与 w 和 s 成正比的部分,上述三种成本中都含有与 w, s 均无关