《大学数学》学习辅导与习题选解(上)

湖南大学数学与计量经济学院　组编
主编　马柏林　孟益民

高等教育出版社

内容简介

本书是编者所编的普通高等教育"十五"国家级规划教材——大学数学系列教材之《大学数学(一)》和《大学数学(三)》(高等教育出版社2003年出版)的配套学习辅导教材,可作为大学理科、工科学生学习一元微积分和多元微积分课程的辅导教材,也可供报考研究生的读者作为参考书。

本书的内容与《大学数学(一)》和《大学数学(三)》的内容平行,虽紧扣原教材但又具有相对的独立性,共分十六章,其中前八章为《大学数学(一)》部分,后八章为《大学数学(三)》部分。每章分内容要点、基本要求、疑难解析和习题选解四部分。

图书在版编目(CIP)数据

《大学数学》学习辅导与习题选解(上)/湖南大学数学与计量经济学院组编;马柏林,孟益民主编.—北京:高等教育出版社,2004.7

ISBN 7-04-014391-7

Ⅰ.大… Ⅱ.①湖…②马…③孟… Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第047655号

策划编辑 王 强 责任编辑 丁鹤龄 封面设计 刘晓翔 责任绘图 黄建英
版式设计 张 岚 责任校对 杨雪莲 责任印制

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷			
开 本	787×960 1/16	版 次	年 月 第1版
印 张	22.75	印 次	年 月 第 次印刷
字 数	420 000	定 价	23.90元

前　言

由湖南大学数学与计量经济学院编写的《大学数学》系列教材是国家教育部“新世纪高等教育教学改革工程”本科教育教学改革项目的研究成果之一,是湖南大学自 1989 年以来非数学类理工科各专业数学课程教学与教材改革有关成果的延续。

本系列教材对非数学类理工科数学课程所授知识进行了重新分块,进一步理顺了非数学类理工科数学各门课程之间的关系和内涵。在内容叙述与介绍中以物理、力学和工程中的数学模型为背景,辅以代数结构,注意内容间的有机结合,避免不必要的重复;注意连续和离散的关系,加强了函数的离散化处理;内容展开注重由浅入深、由特殊到一般,给学生一个完整的知识体系,并注重培养学生研究问题和解决实际问题的能力;采用了近代数学观点和数学思想方法,以集合、向量及映射贯穿全书,加强了近代数学思想方法和数学实践的内容,为学生今后学习近代数学知识奠定了良好的基础,使之更符合新世纪培养高素质人才的要求。在教材编写中特别注重教育观念的更新、教学内容的更新、教学模式的更新,注重对学生数学素质、计算及应用能力、创新意识和工程意识的培养。教材编写以培养学生的良好数学素质为主要目标,同时为适应近年来随经济发展出现的专业调整和专业知识更新,为在教育教学改革中已调整、拓宽的各专业服务。本系列教材还适当地开设了一些有关的现代数学的知识窗口,以拓宽学生的知识面,使教材具有较宽的口径和较大的适应性。本系列教材中,概念、定理及理论叙述准确、精炼,语言规范,知识点突出,难点分散;证明和计算过程均着重体现近代数学思想方法,注意加强对学习人员的数学素质和创新意识的培养;例题、习题等均经过精选,具有代表性和启发性。本系列教材适合大学非数学类理工科本科生以及各类需要提高数学素质和能力的人员使用。本系列教材中难免会有不妥之处,希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见。

本系列教材包括大学数学(一)(含一元微积分、常微分方程、级数、差分方程等)、大学数学(二)(含代数与几何等)、大学数学(三)(含多元微积分、向量分析、场论、积分变换、偏微分方程等)、大学数学(四)(含概率论、数理统计等)、大学数学(五)(含数值计算、数学建模、计算机与数学等)、大学数学学习辅导与习题选解(上、下)。整套教材由刘楚中任总主编,黄立宏任副总主编。本书的主编为

马柏林、孟益民，参加编写的人员有王利平、付玉霞、郭上江、楚新根、周超英、肖庆丰。

编者诚心希望读者对书中的不足之处，给出批评和指正。

湖南大学《大学数学》教材编写组

2003 年 12 月

目　录

大学数学(一)部分

大学数学(三)部分

大学数学(一)部分

第一章　集合与函数

一、内容要点

1. 集合的概念及其表示法,集合的关系及运算,De Morgan 律.
2. 映射的概念,恒等映射、单射、满射、双射的定义,映射的相等、乘积运算.
3. 函数的概念,函数的基本性质.
4. 函数的代数运算、复合函数、反函数.

二、基本要求

1. 熟练掌握集合的表示及其运算.
2. 正确理解函数概念、熟练解出函数的定义域、值域.
3. 掌握函数的单调性、有界性、奇偶性、周期性的分析表示和图形特征.
4. 会求各类函数(包括分段函数)的反函数.
5. 知道复合函数的复合和分解步骤.
6. 了解"取整函数"和"符号函数".
7. 能对常见实际问题进行分析并建立函数关系模型.

三、疑难解析

1. 怎样判断两个函数是否相等?

答　① 从图形上,如果在坐标系中,两个函数的图像完全一样(注意包括位置和形状),则两个函数相等;

② 从分析的角度,函数的三要素是定义域,值域和对应法则,而值域是由定义域和对应法则来确定的,因此,判断两个函数是否相等,比较其定义域和对应法则即可.对应法则和定义域相同的两个函数是相等的.

2. 反函数的存在性与函数的单调性的关系是怎样的?

答　由定理：在区间 A 上严格单调递增(减)的函数必有反函数．因此，函数的严格单调性是反函数存在的充分条件，但反过来，有反函数存在的函数却不一定是严格单调的，如

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x, & -2\leq x\leq 0, \\ 2x+1, & 0<x\leq 2 .\end{cases}$$

有反函数

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} -2x, & 0\leq x\leq 1, \\ \dfrac{1}{2}(x-1), & 1<x\leq 5 .\end{cases}$$

而在区间$[-2,2]$上，$f(x)$并不是严格单调的．

反函数的存在取决于原函数的定义域与值域之间是否一一对应，如果是一一对应的，则必有单值反函数，而函数的严格单调性只是一一对应的特殊形式，因此，是反函数存在的充分而非必要条件．

3．任意两个基本初等函数都能复合成初等函数吗？

答　错．根据复合函数的定义：$y=f(u)$，$u\in A$ 与函数 $u=g(x)$ $x\in B$，如果 $g(B)$　A，则 $y=f(g(x))$是定义在 B 上的复合函数，因此，函数的复合是需要一定条件的，任意两个基本初等函数，如果 $u=g(x)$的值域与 $y=f(u)$的定义域没有交集，则不能复合．例如 $y=$　u $(u\geq 0)$，$u=-e^{x}$ $(x\in \mathbf{R})$是不能复合的．因为对于 $u=-e^{x}$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$内任何 x 值所对应的 u 值(负数)，都不能使 $y=$　u有意义．

四、习题选解

习题 1－1

1．用集合表示：

(1) 直线 $y=x-1$ 与圆 $x^2+y^2=13$ 的交点．

解　解方程组

$$\begin{cases} y=x-1, \\ x^2+y^2=13 .\end{cases}$$

得：

$$\begin{cases} x_1=-2, & x_2=3, \\ y_1=-3; & y_2=2 .\end{cases}$$

所以，直线 $y=x-1$ 与圆 $x^2+y^2=13$ 的交点集为$\{(-2,-3),(3,2)\}$．

(2) 能够被 π 整除的实数．

解　$\{x \mid x = k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

2. 设 $A = \{1, 2, 3\}$，试列出 A 的一切子集.

解　A 的子集为：　，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1, 2\}$，$\{1, 3\}$，$\{2, 3\}$，$\{1, 2, 3\}$.

3. 下列各题集合之间有何关系？

(1) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 4x + 3 < 0\}$，$B = \{x \in \mathbf{R} \mid |x - 2| < 1\}$.

解　$x^2 - 4x + 3 < 0 \quad 1 < x < 3$，

$|x - 2| < 1 \quad 1 < x < 3$，

$\therefore A = B$.

(2) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$，$B = \{x \in \mathbf{R} \mid (x - 1)^2 = 0\}$.

解　$x^2 - 1 = 0 \quad x = -1$ 或 $x = 1$，

$(x - 1)^2 = 0 \quad x = 1$，

$\therefore A \quad B$

(3) $A = \{a, \{a\}\}$，$B = \{a\}$.

解　$A \quad B$，且 $\quad B \in A$

(4) $A = \{a, b\}$，$B = \{b, a\}$.

解　$A = B$.

(5) $A = \{1, 2\}$，$B = \{\{1\}, \{2\}\}$，$C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$，$D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

解　$A \in C$，$B \quad D$，$C \quad D$，$A \in D$.

4. 证明　$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

证明　任取 $x \in (A \cap B) \cup C$，则 $x \in A \cap B$ 或 $x \in C$，若 $x \in A \cap B$，则 $x \in A$ 且 $x \in B$. 于是 $x \in A \cup C$，$x \in B \cup C$，$\therefore x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$；若 $x \in C$，则 $x \in A \cup C$ 且 $x \in B \cup C$，$\therefore x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$，由于 x 在 $x \in (A \cap B) \cup C$ 中任意性，知 $(A \cap B) \cup C \quad (A \cup C) \cap (B \cup C)$；另一方面，任取 $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$，则 $x \in A \cup C$ 且 $x \in B \cup C$，若 $x \in C$，则 $x \in (A \cap B) \cup C$，若 $x \notin C$，则 $x \in A$ 且 $x \in B$. 故 $x \in (A \cap B) \cup C$，即有

$$(A \cup C) \cap (B \cup C) \quad (A \cap B) \cup C.$$

由集合相等的定义有　$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

5. 设 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 1\}$，$B = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}$，求 $A \cup B$，$A \cap B$ 和 $A - B$，$B - A$.

解　如图 1-1-1.

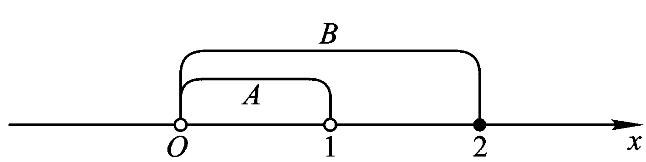

图 1-1-1

$A\cup B=B=\{x\in\mathbf{R}\mid 0\leq x\leq 2\}$.

$A\cap B=A=\{x\in\mathbf{R}\mid 0<x<1\}$.

$A-B=$.

$B-A=\{x\in\mathbf{R}\mid\mid 1\leq x\leq 2,\ x=0\}$.

6. **设** $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2\}$, $C=\{x\mid 0\leq x\leq 1\}$, **求** $A\times B$, $B\times A$, $A\times C$.

解 $A\times B=\{(0,1),(0,2),(1,1),(1,2)\}$.

$B\times A=\{(1,0),(1,1),(2,0),(2,1)\}$.

$A\times C\quad\{(x,y)\mid x=0$ **或** $1, 0\leq y\leq 1\}$

$=\{(x,y)\mid x=0, 0\leq y\leq 1\}\cup\{(x,y)\mid x=1, 0\leq y\leq 1\}$.

7. **设** $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 4\}$, $B=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$, $C=\{y\mid -1\leq y\leq 1\}$, **在平面直角坐标系下画出集合** $A\cap(B\times C)$.

解 **如图** 1-1-2.

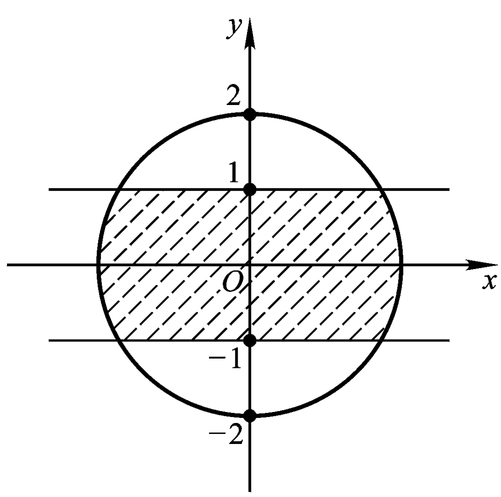

图 1-1-2

8. **设** f, g, h **均为 Z 到 Z 的映射**.

$$f: x\mapsto 3x,\quad g: x\mapsto 3x+1,\quad h: x\mapsto 3x+2,$$

计算 $f\ g$, $g\ f$, $g\ h$, $f\ g\ h$.

解 $f\ g: x\mapsto 9x+3$.

$g\ f: x\mapsto 9x+1$.

$g\ h: x\mapsto 9x+7$.

$f\ g\ h: x\mapsto 27x+21$.

9. **下列映射是** S **到** S **的, 其中** $S=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$.

(1) $f(x,y)=(-y,x)$; 2) $g_1(x,y)=(x,0)$;

(3) $g_2(x,y)=(0,y)$; (4) $h_1(x,y)=(x,-y)$;

(5) $h_2(x,y)=(-y,-x)$; (6) $I(x,y)=(x,y)$.

问哪些映射是一一对应? 若是一一对应, 则求其逆映射.

答　(1),(4),(5),(6)是一一对应.

$f^{-1}(x,y)=(y,-x)$.

$h_1^{-1}(x,y)=(x,-y)$.

$h_2^{-1}(x,y)=(-y,-x)$.

$I^{-1}(x,y)=(x,y)$.

10. 对于映射 $f: x \mapsto y=x^2-4x-9\ (-\infty<x\leq 2)$,求逆映射并计算集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid -1\leq x\leq 1\}$的像及集合 $B=\{y\in\mathbf{R}\mid -4\leq y\leq 3\}$的原像.

解　由 $y=x^2-4x-9 \Rightarrow y+13=(x-2)^2$,

由 $x\leq 2$ 有,$x-2=-\sqrt{y+13} \Rightarrow x=2-\sqrt{y+13}\ (y\geq -13)$.

映射 f 的逆映射为

$$y \mapsto x=2-\sqrt{y+13}.$$

$$f(A)=\{y\in\mathbf{R}\mid -12\leq y\leq -4\}.$$

$$f^{-1}(B)=\{x\in\mathbf{R}\mid -2\leq x\leq -1\}.$$

11. 证明 $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$.

证明　设 $h: A\to B$,

$g: B\to C$,

$f: C\to D$.

$R(h)\subseteq D(g),\ R(g)\subseteq D(f)$,

$\forall x\in D(h)$,

$(f\circ g)\circ h(x)=f\circ g(h(x))=f(g(h(x)))$,

$f\circ(g\circ h)(x)=f(g(h(x)))$,

故　$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$.

习题 1－2

1. 某公司生产一批产品,单位变动成本为 12 元,固定成本为 90 000 元,产品出售单价为 18 元.

(1) 将总成本 C 表示为产量 x 的函数;

(2) 将总收入 R 表示为产量 x 的函数;

(3) 将总利润 P 表示为产量 x 的函数;

(4) 求该企业保本经营的最低产量.

解　(1) $C=90\,000+12x$;

(2) $R=18x$;

(3) $P=R-C=6x-90\,000$;

(4) 令 $P=0$, $6x-90\,000=0 \Rightarrow x=15\,000$.

所以该企业保本经营的最低产量为 15 000.

2. **已知圆锥的体积为 V,试以底半径 r 表示锥高 h .**

解 $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h \quad h=\frac{3V}{\pi r^2}\ (r>0)$.

3. **如图,在边长为 12 的正方形纸板的四角各剪去一个边长为 x 的正方形,再把它折成一个无盖纸盒,试以 x 表示纸盒体积 V .**

解 $V=x(12-2x)^2 \quad (0<x<6)$.

4. **如图,水渠横断面为等腰梯形,斜角 $\phi=40°$, $ABCD$ 称为过水断面, $L=AB+BC+CD$ 称为水渠的湿周,当过水断面面积为定值 S_0 时,求湿周 L 与水深 h 之间的函数关系,并说明定义域 .**

解 $AD=BC+2h\cdot\cot 40°$

$S_0=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot h \qquad BC=\frac{S_0}{h}-h\cot 40°$.

$$L=AB+BC+CD=\frac{S_0}{h}-h\cot 40°+2h\frac{1}{\sin 40°}$$

$$=\frac{S_0}{h}+\frac{2-\cos 40°}{\sin 40°}h \qquad 0<h\leq \quad S_0\tan 40° \ .$$

5. **设** $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geq 1, \\ |x|, & x<1 . \end{cases}$

(1) **求** $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$.

(2) **判断** $f(x)$**的单调性,并指出单调区间 .**

(3) **作出** $y=f(x)$**的图形 .**

解 (1) $f(-1)=|-1|=1$,

$f(1)=1^2=1$,

$f(2)=2^2=4$.

(2) $x\geq 1$ **时**, $f(x)=x^2$ **是单调递增的**,

$0\leq x<1$ **时**, $f(x)=|x|=x$ **是单调递增的**,

$x<0$ **时**, $f(x)=|x|=-x$ **是单调递减的 .**

单调递增区间为$[0,+\infty)$,**单调递减区间为**$(-\infty,0]$.

(3) **如图** 1－1－3 .

6. **证明** $y=\frac{1}{1+x^2}$**是有界函数 .**

证明 **函数** $y=\frac{1}{1+x^2}$**的定义域为 R**, " $x\in\mathbf{R}$, $x^2\geq 0$, $1+x^2\geq 1$, $0<\frac{1}{1+x^2}\leq 1$, **故** $y=\frac{1}{1+x^2}$**是有界函数 .**

7. **证明** $f(x)$**有界的充分必要条件是** $f(x)$**既有上界又有下界 .**

证明 **充分性:设** m **和** M **分别为** $f(x)$ **的下界和上界,即**" $x\in D(f)$**有:**

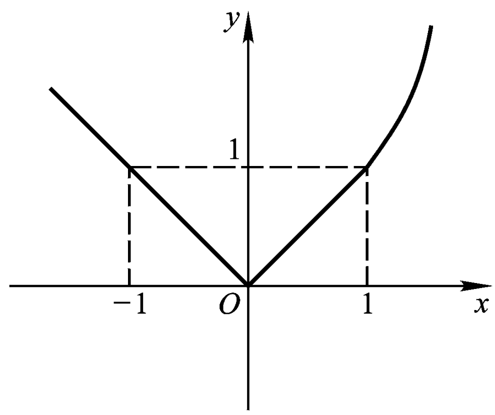

图 1-1-3

$f(x)\geq m,\ f(x)\leq M$,故 $R(f)$是有界集,$f(x)$是有界函数;

必要性:若函数 $f(x)$有界,则 $R(f)$是有界集 .v M,使得 " $x\in D(f)$,$|f(x)|\leq M$,故 $-M$是 $f(x)$的一个下界,M是 $f(x)$的一个上界 .

8 . 设 $f(x)$为定义在$(-\infty,+\infty)$上的任一函数,考察 $\varphi(x)=f(x)+f(-x)$ 和 $\psi(x)=f(x)-f(-x)$的奇偶性,并证明 $f(x)$可表示为一个奇函数和一个偶函数之和 .

解 由

$$\varphi(-x)=f(-x)+f(x)=\varphi(x),$$

根据偶函数的定义,$\varphi(x)$是偶函数;

$$\psi(-x)=f(-x)-f(x)=-[f(x)-f(x)]=-\psi(x),$$

根据奇函数的定义,$\psi(x)$是奇函数;

另一方面, $\varphi(x)+\psi(x)=2f(x)$ $\quad\therefore\ f(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2}\psi(x)$,

而$\frac{1}{2}\varphi(x)$为偶函数,$\frac{1}{2}\psi(x)$为奇函数,所以 $f(x)$可以表示为一个奇函数和一个偶函数之和 .

9. 求下列各题中的函数 $f(x)$:

(1) $f(x+1)=x^2+2x-1$; (2) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$, $x\neq 0$.

解 (1) $f(x+1)=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$,

$\therefore\ f(x)=x^2-2$.

(2)

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2,$$

$\therefore\ f(x)=x^2-2$.

10. 若 $f(x)$是 x 的二次函数,且 $f(0)=1$,$f(x+1)-f(x)=2x$,求 $f(x)$.

解 设 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a,b,c为待定常数,且 $a\neq 0$) .

则
$$f(x+1) \quad a(x+1)^2+b(x+1)+c$$
$$=ax^2+(2a+b)x+a+b+c,$$
$$f(x+1)-f(x)=2ax+a+b,$$
$$f(0)=c.$$

由已知条件,得方程组

$$\begin{array}{l} 2a=2, \\ a+b=0, \\ c=1. \end{array} \quad \text{解得} \quad \begin{array}{l} a=1, \\ b=-1, \\ c=1. \end{array}$$

故
$$f(x)=x^2-x+1.$$

11. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是某区间上的单调函数,且 $R(g) \quad D(f)$,那么 $f(g(x))$ 的单调性如何?

答　若 $f(x)$, $g(x)$ 的单调性相同,则复合函数是单调递增函数;若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的单调性不相同,则复合函数是单调递减函数,列表表示为

$g(x)$的单调性	单　增	单　减	单　增	单　减
$f(x)$的单调性	单　增	单　减	单　减	单　增
$f(g(x))$的单调性	单　增	单　增	单　减	单　减

习题 1－3

1. 指出下列初等函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$.

解　$x^2-3x+2\neq 0 \quad x\neq 1$ 且 $x\neq 2$,

所以该函数的定义域为　$\{x|x\in \mathbf{R}, x\neq 1$ 且 $x\neq 2\}$.

(2) $y=\arcsin(2x+1)$.

解　$-1\leq 2x+1\leq 1 \quad -1\leq x\leq 0$,

所以该函数的定义域为　$\{x|-1\leq x\leq 0\}$.

(3) $y=\lg\sin x$.

解　$\sin x>0$, $x\in(2k\pi,(2k+1)\pi)$, $k\in \mathbf{Z}$.

所以该函数的定义域为 $\{x|2k\pi<x<(2k+1)\pi, k\in \mathbf{Z}\}$.

(4) $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

解　$\dfrac{1-x}{1+x}\geq 0 \quad -1<x\leq 1$,

该函数的定义域为 $\{x|-1<x\leq 1\}$.

(5) $y=\frac{1}{|x|-x}$.

解 $|x|-x\neq 0 \quad x<0$,

该函数的定义域为$\{x|x<0\}$.

2. **下列初等函数中,哪些是奇函数,哪些是偶函数?**

(1) $y=x^2-3x^4+x^6$.

解 $y=f(x)=x^2-3x^4+x^6$

$$f(-x)=(-x)^2-3(-x)^4+(-x)^6=f(x).$$

该函数是偶函数.

(2) $y=x\sin\frac{1}{x}$.

解 $y=f(x)=x\sin\frac{1}{x}$,

$$f(-x)=-x\sin\left(-\frac{1}{x}\right)=x\sin\frac{1}{x}=f(x),$$

该函数是偶函数.

(3) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

解 $y=f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-f(x),$$

该函数是奇函数.

(4) $y=x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1}\quad(a>0)$.

解 $y=f(x)=x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1}$,

$$f(-x)=-x\cdot\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=-x\cdot\frac{1-a^x}{1+a^x}=x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1}=f(x).$$

该函数为偶函数.

3. **判断下列初等函数中哪些是周期函数,如果是周期函数,指出其周期.**

(1) $y=\sin^2 x$.

解 $y=\sin^2 x=\frac{1}{2}(\cos 2x-1)$,

$$\sin^2(x+\pi)=\frac{1}{2}(\cos(2x+2\pi)-1)=\frac{1}{2}(\cos 2x-1)=\sin^2 x.$$

该函数是以π为周期的周期函数.

(2) $y=x\cos x$.

解 **该函数不是周期函数.**