大学数学系列丛书

线性代数与解析几何辅导

陈治中　编著

清 华 大 学 出 版 社
北京交通大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书是高等学校线性代数与解析几何课程的辅导书.全书以章为单位,每章分内容提要、基本要求与要点提示、典型例题、复习题四个部分,并给出了复习题的参考答案.

本书内容丰富,例题题型较多,可供学生在学习线性代数与解析几何课程的过程中使用,也可作为考研辅导书和教师的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与解析几何辅导/陈治中编著.—北京:清华大学出版社;北京交通大学出版社,2004.11
(大学数学系列丛书)
ISBN 7-81082-447-3

Ⅰ.线… Ⅱ.陈… Ⅲ.①线性代数 高等学校 教学参考资料 ②解析几何 高等学校 教学参考资料 Ⅳ.①O151.2 ②O182

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第114678号

责任编辑:黎 丹
出 版 者:清华大学出版社 邮编:100084 电话:010-62776969
北京交通大学出版社 邮编:100044 电话:010-51686414
印 刷 者:北京东光印刷厂
发 行 者:新华书店总店北京发行所
开 本:185×230 印张:23.5 字数:520千字
版 次:2004年11月第1版 2004年11月第1次印刷
书 号:ISBN 7-81082-447-3/O·21
印 数:1～5 000册 定价:32.00元

总　　序

随着人类进入21世纪,科学技术的发展日益迅猛。在当今这个信息时代中,各种竞争的关键就是科学技术的竞争,科学技术的竞争突出地体现在人才的竞争上,而人才的竞争其实就是教育的竞争。当前的知识经济时代,将对人类知识和科学技术的发展、经济增长因素和方式乃至社会生活,引发新的、深刻的变化。在知识经济时代,国家的竞争能力和综合国力的强弱,不仅取决于其拥有的自然资源,更重要的是取决于科学技术和知识更新的发展水平,尤其是知识创新与技术创新的能力。知识经济的第一资源是智力资源,拥有智力资源的是人才,人才来自教育。要提高民族的创新能力,归根到底要提高全体民众的教育水平,培养大批具有创新意识、创新精神和创新能力的人才。

在我国的高等教育中,数学教育起着举足轻重的作用。许多专家指出,数学教育在人类的精神营养中,确实有"精神钙质"的作用,因为数学对一个人的思想方法、知识结构与创造能力的形成起着不可缺少的作用。很难想像,一个数学知识贫瘠的人,会在科学上有所建树。因此,全面提高我国理工科大学中非数学专业大学生的数学水平,将关系到我国各行各业高级专门人才的素质和能力,关系到我国未来科学技术的发展水平和在世界上的竞争力,是国家百年树人基业中的重要一环。

正是基于以上的考虑,我们借鉴了我国近几年高等学校教学改革,特别是数学教学改革的经验,借鉴近几年我校数学教学改革的一些实践与做法,组织一批在大学数学公共课教学中有丰富教学经验的教师,在精心筹划、多方面研讨的基础上,编写了这一套"大学数学系列丛书"。

本系列丛书在大学数学的三门重要的基础课教材——《微积分》、《线性代数与解析几何》、《概率论与数理统计》上下了很大的功夫。不仅按照教学的基本要求仔细编写了各章内容,而且在各章中也融入了当前教学改革的一些经验;同时注意编写了与主教材配套的辅导教材,这样可以帮助学生更好地理解主教材中的内容和学习方法。在辅导教材的编写上,注重对主教材内容知识的扩展,同时也帮助学生掌握好各门课程的学习方法。但是,我们反对将主教材中的习题在辅导教材中简单地给出题解的做法。我们认为,这种做法是对大学生的学习积极性和创造性的扼杀。另外,为了适应目前大学数学教学改革的需要,我们编写了《数学实验基础》和《数学建模基础》两本教材。我们认为,数学实验、数学建模与传统大学数学教学内容相结合,将会极大地丰富数学教学内容,增强大学生学习数学、应用数学的兴趣与积极性,为他们在将来的工作中运用数学解决实际问题打下一个良好的基础。同时,数学实验课与数学建模课的开设,将会给传统的数学教学方法带来更有意义的改革。另外,为了配合我校的"高等数学

方法”选修课及参加北京市大学生(非数学专业)数学竞赛培训的需要,我们还编写了《高等数学方法导引》教材,使大学生中有“数学才赋”的同学能更进一步地掌握高等数学的解题方法。

本系列丛书在编写过程中,得到了北京交通大学教务处的大力支持。在教材的出版中,得到了北京交通大学出版社郑光信社长和贾慧娟副社长的热情帮助。在此,编委会向他们表示衷心的感谢。

本系列丛书适用于高等院校的理工科专业和经济管理类专业的数学教学,也可以作为相关专业学生的自学教材和培训教材。

本系列丛书的编写是大学数学基础课教学中的一种探索,欢迎读者在教材的使用与阅读中不吝赐教,我们将在今后对其进行修订,使其更加完善。

“大学数学系列丛书”编委会

2004 年 11 月

“大学数学系列丛书”编写委员会成员名单

前　　言

线性代数和空间解析几何是高等院校理工科各专业的重要数学基础,但空间解析几何一般是作为高等数学课程中的一部分内容.随着教学改革的深入和教学实践的丰富,许多院校都尝试将代数与几何结合起来作为一门课程学习.

由于线性代数与解析几何课程的特点,学生刚开始接触时常常感到内容抽象,不易适应,也不好理解,面对问题又往往无从下手,从而带来学习上的困难.本辅导书旨在帮助学习者更好地理解和掌握课程的内容,提高运用所学知识解决实际问题的能力,为今后的学习打下良好的基础.同时,因为线性代数与空间解析几何是研究生入学考试数学科目的基本部分,所以本书也考虑了考研与进一步深造的需要,希望能够为广大学习者提供一本合适的辅导书.

本书以章为单位,每章分内容提要、基本要求与要点提示、典型例题、复习题四个部分.

“内容提要”包括该章的主要概念与理论,还补充了个别教材之外的内容,凡补充部分都以“*”标记.

“基本要求与要点提示”分两部分:基本要求包括课程基本要求和研究生考试要求;要点提示则是根据作者多年来的教学经验与体会,对各章的重点、要点和容易混淆的概念进行提示.

“典型例题”选取了大量有代表性的例题,一些例题后加有评注.凡涉及历届考研题的都加了标注.如“例1(1999.1)”指该题为1999年数学(一)的考研题,“例2(2000.3.4)”则是指2000年数学(三)和数学(四)的考研题.

“复习题”供学生自测用,分单项选择题、填空题、计算与证明题三类,并附答案与提示.涉及的历届考研题标注同“典型例题”.

做题是学习数学的重要环节,读者必须亲自动手动脑,才能真正理解基本概念,掌握基本技能,不可受辅导书的限制,而束缚了自己的创造力,况且所介绍的方法也未必是最佳的.本书的目的只是引导与启发,决不能替代个人的学习.希望本书能对读者的学习有所帮助.

本书可供学生在学习本课程的过程中使用,也可作为考研辅导书,教师在授课过程中也可作教学参考书.

感谢清华大学出版社与北京交通大学出版社的大力支持与帮助,使本书得以顺利出版.

由于作者水平所限,错误与不妥之处在所难免,恳请广大读者与各位同行批评指正,在此先致谢意.

编者
2004年11月

目　　录

第 1 章　几何空间中的向量

1.1　内 容 提 要

1 . 2 阶行列式与 3 阶行列式

(1) 2 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(2) 3 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

2 . 向量及其线性运算

1) 基本概念

(1) 向量(矢量)　既有大小又有方向的量，记作 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\boldsymbol{\alpha}$.

(2) 数量(标量)　只有大小没有方向的量 .

(3) 长度(模)　记为 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{\alpha}|$.

(4) 单位向量　长度为 1 的向量 .与 $\boldsymbol{\alpha}$ 同向的单位向量记作 $\boldsymbol{\alpha}^0$.

(5) 零向量　长度为 0 的向量 .

(6) 自由向量　起点任意的向量 .

(7) 加法　平行四边形法则或三角形法则 .

(8) 数乘　实数 k 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的乘积 .

2) 运算规律

(1) 加法交换律　$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}$.

(2) 加法结合律　$\boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma}$.

(3) 零向量作用　$\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$.

(4) 负向量作用　$\boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\alpha}) = (-\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

(5) 数 1 的数乘　$1 \times \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$.

(6) **数乘结合律** $(kl)\alpha = k(l\alpha) = l(k\alpha)$.

(7) **数乘分配律** $(k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha$.

(8) **数乘分配律** $k(\alpha+\beta) = k\alpha + k\beta$.

3. 空间坐标系

仿射坐标系记为$\{O; e_1, e_2, e_3\}$，**直角坐标系记为**$\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$**或简记作** $Oxyz$.

(1) **向量运算的坐标表示** 设$\{O; e_1, e_2, e_3\}$

$$\alpha = (a_1, a_2, a_3);\ \beta = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$k\alpha = (ka_1, ka_2, ka_3)$$

(2) **向量** α **在** l **轴上的投影，记作** $\mathrm{Prj}_l\alpha$ **或**$(\alpha)_l$.

$$\mathrm{Prj}_l\alpha = |\alpha|\cos\varphi$$

$$\mathrm{Prj}_l(\alpha+\beta) = \mathrm{Prj}_l\alpha + \mathrm{Prj}_l\beta$$

$$\mathrm{Prj}_l(k\alpha) = k\mathrm{Prj}_l\alpha$$

其中，$\varphi = \langle \alpha, l\rangle$ **是向量** α **与** l **轴夹角**.

4. 向量的数量积、向量积和混合积

1) **数量积**

向量的数量积也称为点积或内积，记作 $\alpha \cdot \beta$，**即有**

$$\alpha\cdot\beta = |\alpha|\,|\beta|\cos\langle\alpha, \beta\rangle$$

$$\alpha\cdot\beta = |\alpha|\,\mathrm{Prj}_\alpha\beta$$

$$\alpha\cdot\beta = |\beta|\,\mathrm{Prj}_\beta\alpha$$

数量积有如下运算规律.

(1) $\alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha$.

(2) $(\alpha+\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot\gamma + \beta\cdot\gamma$.

(3) $(k\alpha)\cdot\beta = \alpha\cdot(k\beta) = k(\alpha\cdot\beta)$.

(4) $\alpha\cdot\alpha \geq 0$，**等号成立当且仅当** $\alpha = \mathbf{0}$.

例如，设直角坐标系$\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$，$\alpha = (a_1, a_2, a_3)$，$\beta = (b_1, b_2, b_3)$，**则**

$$\alpha\cdot\beta = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha\cdot\alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\cos\langle\alpha\cdot\beta\rangle = \frac{\alpha\cdot\beta}{|\alpha|\,|\beta|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}} \quad (\alpha\neq\mathbf{0},\ \beta\neq\mathbf{0})$$

2) **向量积**

向量的向量积也称为叉积或外积，记作 $\alpha\times\beta$，**即有方向与** α，β **均垂直，且** α，β，$\alpha\times\beta$**三个向量成右手系，大小为**

$$|\alpha\times\beta| = |\alpha||\beta|\sin\langle\alpha,\ \beta\rangle$$

向量积有如下运算规律.

(1) $\alpha\times\beta = -(\beta\times\alpha)$.

(2) $(k\alpha)\times\beta = \alpha\times(k\beta) = k(\alpha\times\beta)$.

(3) $\alpha\times(\beta+\gamma) = \alpha\times\beta+\alpha\times\gamma$.

(4) $(\alpha+\beta)\times\gamma = \alpha\times\gamma+\beta\times\gamma$.

例如,设直角坐标系$\{O;\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}\}$;$\alpha=(a_1,\ a_2,\ a_3)$,$\beta=(b_1,\ b_2,\ b_3)$,则

$$\alpha\times\beta = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

3) 混合积

向量的混合积记作$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$,即

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (\alpha\times\beta)\cdot\gamma$$

混合积有如下运算规律.

(1) $(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (\beta,\ \gamma,\ \alpha) = (\gamma,\ \alpha,\ \beta)$.

(2) $(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = -(\beta,\ \alpha,\ \gamma)$.

(3) $(k\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (\alpha,\ k\beta,\ \gamma) = (\alpha,\ \beta,\ k\gamma) = k(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$.

(4) $(\alpha_1+\alpha_2,\ \beta,\ \gamma) = (\alpha_1,\ \beta,\ \gamma) + (\alpha_2,\ \beta,\ \gamma)$.

5. 共线向量与共面向量

(1) 若向量$\alpha\neq\mathbf{0}$,则向量α与β共线的充分必要条件是:存在惟一确定的实数k,使得$\beta=k\alpha$.

(2) 两个向量α与β共线的充分必要条件是:存在不全为零的实数k与m,使得$k\alpha+m\beta=\mathbf{0}$.

(3) 两个向量α与β不共线的充分必要条件是:如果$k\alpha+m\beta=\mathbf{0}$成立,则必有$k=m=0$.

(4) 三个向量α,β,γ共面的充分必要条件是:存在不全为零的实数k,m,l,使得$k\alpha+m\beta+l\gamma=\mathbf{0}$.

(5) 三个向量α,β,γ不共面的充分必要条件是:如果$k\alpha+m\beta+l\gamma=\mathbf{0}$,则必有$k=m=l=0$.

(6) 两个向量α与β共线的充分必要条件是$\alpha\times\beta=\mathbf{0}$.

(7) 三个向量α,β,γ共面的充分必要条件是混合积$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\mathbf{0}$.

6. 平面方程

(1) 点法式方程　设法向量$\boldsymbol{n}=(A,\ B,\ C)$,点$M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$,则平面的点法式方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)+D=0$$

(2) 一般方程　平面的一般方程为

$$Ax+By+Cz+D=0$$

(3) 三点式方程　平面的三点式方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

(4) 截距式方程　设在 3 个坐标轴的截距为 a, b, c, 则平面的截距式方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

(5*) 参数方程　已知 $P(x_0, y_0, z_0)$, 且 $\alpha=(x_1, y_1, z_1)$, $\beta=(x_2, y_2, z_2)$不共线, 则点 $M(x, y, z)$在平面上当且仅当$\overrightarrow{PM}=t_1\alpha+t_2\beta$, 于是得

$$x=x_0+t_1x_1+t_2x_2$$
$$y=y_0+t_1y_1+t_2y_2$$
$$z=z_0+t_1z_1+t_2z_2$$

称为平面的参数方程, t_1, t_2 为参数.

由三向量共面的充分必要条件, 消去参数 t_1, t_2 可得

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=0$$

注　此形式也是点法式方程.

7. 直线方程

(1) 标准方程　直线的标准方程又称为对称式方程或点向式方程, 其具体形式为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

其中, 点 M_0 的坐标为(x_0, y_0, z_0), 方向向量 $\boldsymbol{s}=(m, n, p)$.

(2) 参数方程　直线的参数方程为

$$x=x_0+mt$$
$$y=y_0+nt$$
$$z=z_0+pt$$

(3) 两点式方程　直线的两点式方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

(4) 一般方程　直线的一般方程为

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

8. 位置关系

1) **两平面的位置**

设

$$\Pi_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0$$
$$\Pi_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \qquad A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0$$

(1) $\Pi_1 /\!/ \Pi_2$ (**包括重合**) $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

(2) $\Pi_1 /\!/ \Pi_2$, **但不重合** $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$.

(3) Π_1 **与** Π_2 **重合** $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$.

(4) Π_1 **与** Π_2 **相交** $\Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$.

(5) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

2) **两平面的夹角**

设两平面的方向向量分别为 $\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ **和** $\boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, **则这两个平面的夹角的余弦为**

$$\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\,|\boldsymbol{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \quad A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}$$

3) **两直线的位置**

设两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ **和两直线**

$$L_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad L_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

其中, $\boldsymbol{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $\boldsymbol{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ **是直线** L_1, L_2 **的方向向量**.

(1) $L_1 /\!/ L_2$ **但不重合** $\Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1 /\!/ \boldsymbol{s}_2$ **但不平行于** $\overrightarrow{M_1M_2}$

$$\Leftrightarrow m_1 : n_1 : p_1 = m_2 : n_2 : p_2 \neq (x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1).$$

(2) L_1 **与** L_2 **重合** $\Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1 /\!/ \boldsymbol{s}_2 /\!/ \overrightarrow{M_1M_2}$

$$\Leftrightarrow m_1 : n_1 : p_1 = m_2 : n_2 : p_2 = (x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1).$$

(3) L_1 **与** L_2 **相交** $\Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1$ **与** $\boldsymbol{s}_2$ **共面**, **但** $\boldsymbol{s}_1$ **与** $\boldsymbol{s}_2$ **不平行**.

(4) L_1 **与** L_2 **异面** $\Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$ **不共面**.

4) **直线与平面的位置**

设

$$\Pi: \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

$$L:\ \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

其中，平面的方向向量为 $\boldsymbol{n}=(A,\ B,\ C)$，直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m, n, p)$.

(1) $L /\!/ \Pi \Leftrightarrow \boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}$，且点$(x_0,\ y_0,\ z_0)$不在 Π上，即

$$Am+Bn+Cp=0$$

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$$

(2) L 在平面 Π 上$\Leftrightarrow \boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}$，且点$(x_0,\ y_0,\ z_0)$在 Π 上，即

$$Am+Bn+Cp=0$$

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

(3) L 与 Π 相交$\Leftrightarrow \boldsymbol{s}$不垂直于 $\boldsymbol{n}$，即

$$Am+Bn+Cp\neq 0$$

(4) $L\perp\Pi \Leftrightarrow \boldsymbol{s} /\!/ \boldsymbol{n}$，即

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$$

5) **两直线的夹角**

设直线 L_1 与直线 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(m_1,\ n_1,\ p_1)$和 $\boldsymbol{s}_2=(m_2,\ n_2,\ p_2)$，则 L_1 与 L_2 夹角的余弦为

$$\cos\varphi=\frac{|\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\ \sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

6) **直线与平面的夹角**

设直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,\ n,\ p)$，平面 Π 的方向向量为 $\boldsymbol{n}=(A,\ B,\ C)$，则 L 与 Π 夹角的正弦为

$$\sin\varphi=\cos\langle\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{n}\rangle=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ \sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

9 . 距离问题

(1) **点到平面的距离**　设

$$\Pi:\ Ax+By+Cz+D=0$$

则点 $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$到 Π的距离为

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(2) **点到直线的距离**　设直线 L 过点 M_0，方向向量为 $\boldsymbol{s}$，则空间任一点 M 到直线 L 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$$

(3) **异面直线的距离**　设 L_1 和 L_2 是空间两条异面直线,方向向量分别是 $\boldsymbol{s}_1$ 和 $\boldsymbol{s}_2$,并分别过 M_1 与 M_2 点,则 L_1 与 L_2 之间的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)|}{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|}=\frac{|(\boldsymbol{s}_1,\ \boldsymbol{s}_2,\ \overrightarrow{M_1M_2})|}{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|}$$

(4) **公垂线方程**　设

$$L_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

$$L_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

则它们的公垂线方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0$$
$$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0$$

其中,$\boldsymbol{s}=(m,\ n,\ p)=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2$ 是公垂线的方向向量.

10. 平面束

设两个不同的平面

$$\Pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$
$$\Pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

对所有不全为零的 k, m,形如

$$k(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

的平面全体称为由 Π_1 和 Π_2 生成的平面束.

注　① 当 Π_1 与 Π_2 相交于直线 L 时,表示通过 L 的所有平面;

② 当 Π_1 与 Π_2 平行时,表示平行于 Π_1 和 Π_2 的所有平面;

③ 平面束方程可简化某些关于平面和直线的问题的解法.

1.2　基本要求与要点提示

1. 基本要求

本章介绍向量代数的基本内容,介绍几何空间中平面和直线的方程、相互位置及有关性质.

本章的基本要求如下．

(1) 理解 2 阶、3 阶行列式的概念与性质．

(2) 理解空间坐标系，特别是直角坐标系，理解向量的概念及其表示．

(3) 掌握向量的线性运算(加、减、数乘)、向量的数量积和向量积，了解向量的混合积及其几何意义，了解两个向量垂直、平行的条件．

(4) 理解单位向量、方向数与方向余弦、向量的坐标表达式，掌握用坐标表达式进行向量运算的方法，掌握夹角公式、方向余弦、方向角、单位向量等计算公式．

(5) 掌握空间平面的方程及其求法，掌握两平面平行、垂直、相交的充分必要条件和夹角公式．

(6) 掌握空间直线的方程及其求法，掌握两直线平行、垂直、相交的充分必要条件和夹角公式．

(7) 掌握直线和平面的位置关系及直线与平面的夹角公式，会利用平面、直线的相互关系(平行、垂直、相交等)解决有关问题．

(8) 会求点到直线的距离、点到平面的距离及两直线之间的距离．

2．要点提示

(1) 本章包括向量代数和空间解析几何中的平面和直线．

向量代数的重点是向量的运算及其几何意义．在向量之间定义了加法、数乘、数量积、向量积、混合积等运算，要了解它们的定义与意义．注意向量的和、数量乘积、向量积还是向量，但数量积及混合积则是一个数，如混合积的定义是

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=(\alpha\times\beta)\cdot\gamma$$

但

$$(\alpha\cdot\beta)\times\gamma$$

就没有定义．

平面与直线的重点是它们的方程以及平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的位置关系．一个难点是距离问题，包括点到平面的距离、点到直线的距离和异面直线的距离，特别是两直线之间的公垂线方程．

(2) 向量代数中的自由向量与起点的位置无关，这时的平行与共线是一回事．

(3) 在几何空间中取定一个点与三个不共面的向量即可构成空间的坐标系，而这三个向量是否垂直并非本质的，第 5 章中将看到，它们实际上就是几何空间中的一组基．取直角坐标系可以使问题变得简单明了，并能突出问题的实质，例如向量的数量积的坐标表示．更一般的情况可参看第 5 章中的标准正交基．

(4) 对于平面与直线的各种形式的方程，要熟悉它们之间的相互转换．

(5) 对于几何空间中的向量问题、平面与直线的问题，画出示意图往往有助于问题的解决．

1.3　典 型 例 题

1. 向量及其运算

例 1.1　设 α, β 为非零向量，问下列各式在什么条件下成立？

(1) $|\alpha+\beta| = |\alpha-\beta|$;

(2) $|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta|$;

(3) $|\alpha+\beta| = |\alpha| - |\beta|$;

(4) $|\alpha-\beta| = |\alpha| + |\beta|$;

(5) $\dfrac{\alpha}{|\alpha|} = \dfrac{\beta}{|\beta|}$.

解　(1) 应用向量加、减法的平行四边形法则与三角形法则知，$\alpha+\beta$ 与 $\alpha-\beta$ 恰好是以 α 与 β 为邻边的平行四边形的对角线组成的向量，这两个向量的模相等的充要条件是该平行四边形为矩形，即当 $\alpha\perp\beta$ 时，此式才成立.

(2) 根据向量加法的三角形法则知，只有当 α 与 β 方向相同时，此式才成立.

(3) 根据向量加法的三角形法则知，只有当 $|\alpha| \geq |\beta|$，且 α 与 β 方向相反时，此式才成立.

(4) 根据向量减法的三角形法则知，只有当 α 与 β 反向时，此式才成立.

(5) 因为 $\dfrac{\alpha}{|\alpha|}$ 和 $\dfrac{\beta}{|\beta|}$ 分别是向量 α 和 β 方向上的单位向量，所以 $\dfrac{\alpha}{|\alpha|} = \dfrac{\beta}{|\beta|}$ 当且仅当 $\alpha^\circ = \beta^\circ$，因此当 α 与 β 同方向时，等式成立.

评注　也可以从数量积出发考虑，以(1)为例

$$|\alpha+\beta| = \sqrt{(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)} = \sqrt{|\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta|\cos\langle\alpha,\ \beta\rangle + |\beta|^2}$$

$$|\alpha-\beta| = \sqrt{(\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta)} = \sqrt{|\alpha|^2 - 2|\alpha||\beta|\cos\langle\alpha,\ \beta\rangle + |\beta|^2}$$

因此当 $\cos\langle\alpha,\ \beta\rangle = 0$，即 $\alpha\perp\beta$ 时，$|\alpha+\beta| = |\alpha-\beta|$.

例 1.2　确定下列各组向量间的关系.

(1) $\alpha=(1,\ 1,\ -4)$ 与 $\beta=(1,\ -2,\ 2)$;

(2) $\alpha=(2,\ -3,\ 1)$ 与 $\beta=(4,\ 2,\ -2)$.

解　(1) $\alpha\cdot\beta=1-2-8=-9\neq0$，且对应分量不成比例，故 α 与 β 既不垂直也不平行.

(2) $\alpha\cdot\beta=2\times4+(-3)\times2+1\times(-2)=8-6-2=0$，故 α 与 β 垂直.

评注　若 $\alpha\cdot\beta=0$，则 $\alpha\perp\beta$；若 α 与 β 对应分量成比例，则 $\alpha /\!/ \beta$.

例 1.3　已知 $\alpha=(2,\ -2,\ 1)$，$\beta=(3,\ 2,\ 2)$，求

(1) 向量 α 在三个坐标轴上的投影;

(2) 向量 α 的模及其方向余弦;