21世纪高等院校教材

大学数学教程

第四册:概率论与数理统计

韩旭里　主编
王家宝　陈亚力　裘亚峥　编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是大学数学教程系列教材的第四册(概率论与数理统计),内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征与极限定理、样本及其分布、参数估计与假设检验、回归分析与方差分析、应用数学模型.本书体系新颖,结构严谨,内容丰富,叙述清晰,重点突出,难点分散,例题典型,重视对学生分析、推理、计算和应用数学能力的培养.

本书可作为高等院校理工科非数学类专业本科生的数学课教材或教学参考书,也可供科学研究与工程技术人员学习参考.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学教程:第四册·概率论与数理统计 韩旭里主编;王家宝等编.—北京:科学出版社,2004

(21 世纪高等院校教材)

ISBN 7 03 013595 4

Ⅰ.大… Ⅱ.①韩…②王… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 064612 号

责任编辑:李鹏奇 姚庆爽 责任校对:曾 茹

责任印制:安春生 封面设计:陈 敬

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004 年 8 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2004 年 8 月第一次印刷 印张:15 3 4

印数:1—7 000 字数:295 000

定价:21.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

大学数学教程

韩旭里　主编

第一册　一元函数微积分与无穷级数

韩旭里　刘碧玉　李军英　编

第二册　线性代数与空间解析几何

刘伟俊　亢保元　杨文胜　编

第三册　多元函数微积分与常微分方程

秦宣云　刘旺梅　刘碧玉　编

第四册　概率论与数理统计

王家宝　陈亚力　裘亚峥　编

前　言

大学数学课程是大学高等教育中最基础和最重要的课程之一,各高等院校都十分重视大学数学基础课程的教学. 为了适应科学技术进步的要求,培养高素质的人才,我们在各级教育主管部门的领导和支持下,进行了多年的大学数学教学改革实践. 我们进行教学改革的特点是,根据大学数学基础课程的内在联系,突破原有课程的界限,将微积分、线性代数、空间解析几何、概率论、数理统计、应用数学模型的内容有机结合,加强相互渗透,加强数学思想方法的教学,加强应用数学能力的培养,统一开设大学数学课程. 按照这种教学改革的思想,我们组织编写了一体化数学教材,并经过了多年的教学实践,效果是令人满意的. 现在,在原教材的基础上,我们广泛吸取国内外知名大学的教学经验,进一步改进,出版了这套系列教材.

本系列教材的目标定位是作为非数学类理工科大部分本科专业的数学基础课的教材,内容经选择也应适用于对数学要求较高的其他各类有关专业的数学课程教学. 本系列教材全部内容按大约 260 学时的教学计划编写. 对于学时安排较少的专业,可根据要求选择使用. 对全部教学内容,建议按 3 个学期整体安排.

本系列教材,在数学观点和思想方法上,全书贯穿集合、向量及映射的概念,体现局部线性化、离散化、逼近、最优化等思想. 在内容体系上,进一步理顺了内容之间的关系,整体优化,强调分析、代数、几何的有机结合. 对大学数学基础内容统一安排教学,既有利于学生对知识的理解与深化,又能使大学数学的基本内容在教学管理、教师选课和学生选课上,保持同等重要和重视的地位. 在知识巩固和应用数学能力的培养上,除了精心选取例题和练习外,每册单独给出了与本册内容相关的应用数学模型一章,内容原则上只用到前面所学的知识,可以供在相关章节中选讲,以培养学生的应用意识和提高学习兴趣,提高学生分析问题和解决问题的能力.

本系列教材是“湖南省普通高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”重点资助项目的研究成果的延续,得到了“湖南省高等教育 21 世纪课程教材”立项资助和“中南大学教育教改研究项目”的立项资助. 在此,向对本系列教材的编写与出版给予帮助和支持的同志表示衷心感谢.

由于编者水平有限,若有不妥与错误之处,恳请专家、同行和读者不吝指正.

编　者

2004 年 3 月

目　　录

第 1 章　随机事件及其概率

在我们生活的宇宙空间里,存在着各种各样的现象,其中有一类现象,在一定条件下必然会出现. 例如,向上抛一石子必然下落;在标准大气压下,100℃的纯水必然沸腾. 这类现象称为必然现象. 因为其结果是明确的,所以也称为确定性现象. 还有一类现象在一定条件下可能出现,也可能不出现. 例如,在相同条件下抛一枚均匀硬币,其结果可能是正面朝上,也可能是反面朝上,并且在每次抛掷之前无法肯定抛掷的结果是什么;用同一门大炮向同一目标射击,弹着点总是不尽相同. 人们经过长期实践并深入研究后,发现这类现象在大量重复试验或观察下,其结果呈现出某种规律性. 例如,均匀的硬币重复抛掷多次,正面朝上和反面朝上的次数大致相同. 这种在个别试验中其结果具有不确定性,而在大量重复试验中其结果具有统计规律性的现象称为随机现象. 概率论和数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

1.1　随机事件与样本空间

1.1.1　随机试验

对随机现象的研究是通过试验进行的. 在这里,试验这个术语既可以是各种各样的科学实验,也可以是对某一事物的某个特征的观测. 如果某一试验满足下列条件:

(1) 在相同条件下,试验可以重复进行;

(2) 试验可能的结果不止一个,但试验前可以明确知道所有可能的结果;

(3) 每次试验的结果,事先不能准确预言.

则称这样的试验为随机试验,简称为试验,记作 E. 今后我们所涉及到的试验均指随机试验. 下面举几个随机试验的例子:

E_1:抛一枚硬币,观察正面 H、反面 T 出现的情况;

E_2:抛两颗骰子,观察出现的点数之和;

E_3:记录某电话总机 5 分钟内接到的呼唤次数;

E_4:在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的寿命.

上面几个随机试验的例子,它们有共同的特点:试验结果虽然不能完全预言,但其全部可能结果是已知的. 例如,抛一枚硬币只会有"正面出现"与"反面出现"这两种可能结果,电话总机 5 分钟内接到的呼唤次数必定是某个非负整数.

要注意的是:对每一随机试验,总是在一定的试验目的之下讨论试验结果的规律性. 例如从一批灯泡中任取一只进行通电试验,如果试验目的是检验产品是否合格,则试验结果为"合格品"或"不合格品";如果试验目的是测定其寿命,则试验结果为非负实数.

1.1.2 样本空间、随机事件

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间,记为 S. 样本空间的元素,即 E 的每个结果,称为样本点.

一般,我们称试验 E 的样本空间 S 的子集即样本点的集合为 E 的随机事件,简称事件. 用字母 $A, B, C, \cdots$表示. 在每次试验中,当且仅当这一子集中的一个样本点出现时,称这一事件发生. 由一个样本点组成的单点集称为基本事件.

在 E_1 中,可能的结果只有两个:"正面出现"和"反面出现". 样本空间为 $S = \{H, T\}$. $\{H\}$(表示"正面出现")和$\{T\}$(表示"反面出现")为 E_1 的随机事件,它们都为基本事件.

在 E_2 中,可能的结果有 11 个. 分别为 2,3,…,12. 故 $S=\{2,3,\cdots,12\}$, $A=\{5\}$和 $B=\{k \mid k$ 为正整数,且 $k>6\}$为 E_2 的随机事件, E_2 的基本事件为 $A_k=\{k\}$, $k=2,3,\cdots,12$.

在 E_3 中, $S=\{0,1,2,\cdots\}$, $A=\{k \mid k$为正整数,且 $20<k<30\}$为随机事件.

在 E_4 中, $S=\{t \mid t \geq 0\}$, $A=\{t \mid 0 \leq t \leq 400\}$, $B=\{t \mid t>1000\}$为随机事件.

在每次试验中,必然发生的事件称为必然事件. 显然,样本空间包含所有的样本点,它作为一个事件为必然事件,记作 S. 如"上抛一石子必然下落"就是必然事件. 空集 不包含任何样本点,作为样本空间的子集,它在每次试验中必然不发生的,称为不可能事件. 显然必然事件与不可能事件都是确定性的现象,但为了研究的方便,我们规定它们为随机事件.

1.1.3 事件的关系与运算

每一随机试验都含有许多随机事件,由于它们共处于同一试验之中,因而是相互联系着的,我们有必要弄清它们之间的关系,并引进事件间的运算. 以便化复杂事件为简单事件,更好地解决相应的概率问题. 从前面可以看出事件是一个集合,因而事件间关系与事件的运算自然按集合论中集合之间的关系和集合运算来处理. 下面给出这些关系和运算在概率论中的提法,并根据"事件发生"的含义,给出它们在概率论中的定义.

设试验 E 的样本空间为 S,而 A、B、C、A_k、B_k $(k=1,2,\cdots)$是 S 的子集.

1. 事件的包含与相等

若 A　 B,则称事件 B 包含事件 A,即事件 A 发生必导致事件 B 发生,如图 1 1.

若 A　 B 且 B　 A,即 A = B,则称事件 A 与事件 B 相等.

2. 事件的和(或并)

“事件 A 与事件 B 至少有一个发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的和(或并),记作 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$. 显然,当且仅当 A, B 中至少有一个发生时,事件 $A\cup B$ 发生,如图 1 2.

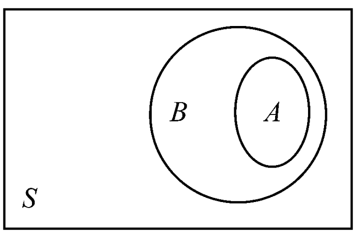

图 1 1

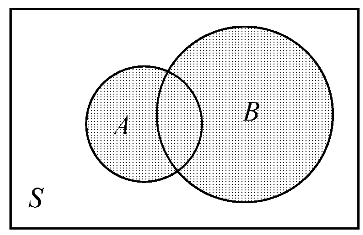

图 1 2

例如,在 E_2 中,若 A 表示“点数之和为奇数”,则 $A=\{3,5,7,9,11\}$, B 表示“点数之和大于 8”, $B=\{9,10,11,12\}$,则 $A\cup B=\{3,5,7,9,10,11,12\}$.

类似地,称 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件;称 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$的和事件.

3. 事件的积(或交)

“事件 A 与 B 同时发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的积(或交),记作 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$. 当且仅当 A、B 同时发生时,事件 $A\cap B$ 发生. $A\cap B$ 也记作 AB,如图 1 3. 即事件 AB 所包含的样本点为事件 A、B 所共有.

例如,在 E_2 中,若设 $A=\{3,5,7,9\}$, $B=\{8,9,10\}$,则 $AB=\{9\}$.

$\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 和 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 的情况由读者自己完成.

4. 事件的差

“事件 A 发生,而事件 B 不发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的差,记作 $A-B=\{x|x\in A$ 且 $x|\ \ B\}$. 当且仅当 A 发生、B 不发生时,事件 $A-B$ 发生. 如图 1 4.

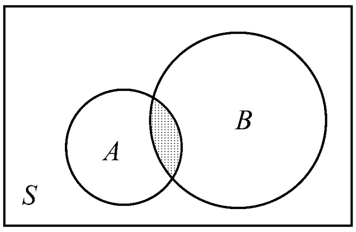

图1 3

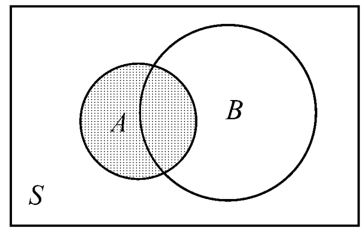

图1 4

例如,在 E_2 中,若 $A=\{3,5,7,9\}$, $B=\{8,9,10\}$,则 $A-B=\{3,5,7\}$.

5. 事件互不相容(或互斥)

若 $A\cap B=$　,即事件 A 与事件 B 不能同时发生,或事件 A 与事件 B 没有共同的样本点,则称事件 A 与事件 B 是互不相容的,或互斥的,如图 1 5.

例如,在 E_2 中,若 $A=\{3,5,7,9,11\}$, $B=\{2,4,6,8,12\}$,则 $AB=$　,因此 A 与 B 互斥.

在同一试验中,基本事件是两两互不相容的.

6. 对立(或逆)事件

若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=$　,则称事件 A 与事件 B 互为对立事件(或逆事件). 在一次试验中,若事件 A 与 B 是对立事件,则其中必有一个发生,且仅有一个发生. A 的对立事件记为 A,如图 1 6.

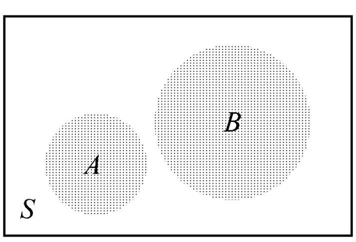

图1 5

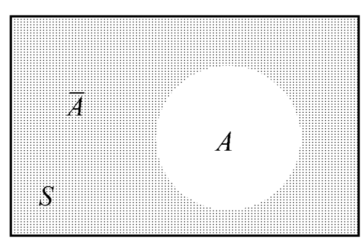

图1 6

例如,在 E_2 中,若 $A=\{2,3,4\}$, $B=\{5,6,7,8,9,10,11,12\}$,则显然 $A\cup B=S$,且 $A\cap B=$　,故 A 与 B 是对立事件, $B=A$.

事件运算符合集合运算规律. 显然:

$$A\cup A=S,\quad A\cap A=$$

$$A\cup S=S,\quad A\cap S=A$$

$$A\cup A=A,\quad A\cap A=A$$

设 A、B、C 为事件,则有:

交换律—— $A\cup B = B\cup A$; $A\cap B = B\cap A$;

结合律——$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$;

$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$;

分配律——$(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$;

$(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$;

吸收律—— $A\cup(A\cap B) = A$;

$A\cap(A\cup B) = A$.

对偶公式(也称为德·摩根律):$\overline{A\cup B} = A\cap B$; $\overline{A\cap B} = A\cup B$.

更一般地有:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i};\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i};\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$$

差的公式: $A - B = AB$.

例 1.1　在某系学生中任选一名学生,设 A 表示被选出的是男生, B 表示该生是三年级学生, C 表示该生是运动员.

(1) 叙述事件 $A\cap B\cap C$ 的意义;

(2) 在什么条件下有恒等式 $A\cap B\cap C = C$?

(3) 什么时候关系式 $C \quad B$ 正确?

(4) 什么时候关系式 $A = B$ 成立?

解　(1) $A\cap B\cap C$ 表示该生是三年级男生,但不是运动员.

(2) $A\cap B\cap C = C$ 等价于 $C \quad A\cap B$,即全系的运动员都是三年级男生.

(3) 当运动员都是三年级学生时, $C \quad B$ 成立.

(4) 当全系女生都在三年级且三年级学生都是女生时,关系式 $A = B$ 成立.

例 1.2　设 A、B、C 为 3 个事件,试用 A、B、C 表示下列各事件:

(1) A_1 表示 3 个事件都发生;

(2) A_2 表示 A 发生,但 B 与 C 不发生;

(3) A_3 表示 3 个事件中恰有一个发生;

(4) A_4 表示 3 个事件中至少有两个发生;

(5) A_5 表示 A、B、C 3 个事件中至多有一个发生.

解　(1) $A_1 = A\cap B\cap C$;

(2) $A_2 = A - B - C$ 或 $A_2 = A - (B\cup C)$,利用差的公式, $A_2 = A\cap(\overline{B\cup C}) = A\cap B\cap C$;

(3) A、B、C 中恰有一个发生,即 A 发生而 B、C 不发生,或者 B 发生而 A、C 不发生,或者 C 发生而 A、B 不发生,所以, $A_3 = (A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap C)\cup(A$

$\cap B \cap C)$;

(4) $A_4 = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$;

(5) $A_5 = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$.

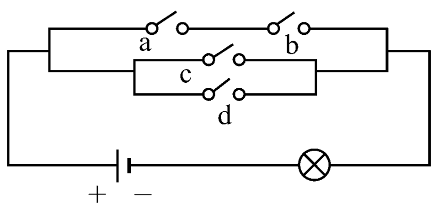

图 1 7

例 1.3　设 A、B、C、D 依次表示图 1 7 开关 a、b、c、d 闭合, E 表示灯亮,试用 A、B、C、D 表示 E.

解　因为当开关 a、b 同时闭合,或者当 c、d 两个开关至少有一个闭合时,电路被接通,灯就会亮,所以

$$E = (A \cap B) \cup C \cup D$$

1.2　随机事件的概率

一般来说,我们总会发现有些随机事件发生的可能性大些,有些随机事件发生的可能性小些. 在实际中我们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大. 例如,为了确定水坝的高度,就要知道河流在造水坝地段每年洪水达到某一高度这一事件发生的可能性的大小. 我们希望找到一个合适的数来表示事件在一次试验中发生的可能性的大小. 这就需要用一个数量指标来定量地刻画随机事件发生的可能性的大小,这个数量指标叫做事件的概率. 下面我们从几个不同的角度给出概率的定义和计算方法.

1.2.1　概率的统计定义

1. 事件的频率

定义 1.1　在相同条件下,进行 n 次试验,在这 n 次试验中,事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数. 比值 n_A　n 称为事件 A 发生的频率,并记成 $f_n(A)$.

由此定义易见频率具有下述基本性质:

(1) $0 \leq f_n(A) \leq 1$;

(2) $f_n(S) = 1$;

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件,则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k)$$

由于事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验次数之比,其大小表示 A 发生的频繁程度,频率愈大,事件 A 发生愈频繁,这意味着 A 在一次试验中发生的可能性愈大. 因而,我们自然会想:能不能用频率来表示 A 在一次试验中发生的

可能性的大小.

2. 概率的统计定义

经验表明,当 n 较小时,频率 $f_n(A)$在 0 与 1 之间随机波动,其幅度较大. 此时用频率来表示事件发生的可能性大小显然是不合适的. 而当 n 逐渐增大时,频率 $f_n(A)$逐渐稳定于某个常数. 例如,在抛硬币的试验中,观察出现正面的次数,这种试验历史上曾有不少人做过,其结果如表 1 1 所示.

表 1 1

试验者	n	n_H	$f_n(H)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲　丰	4040	2048	0.5069
K.皮尔逊	12000	6019	0.5016
K.皮尔逊	24000	12012	0.5005

从表 1 1 可以看出:不管谁去抛硬币,当 n 逐渐增大时,频率 $f_n(H)$逐渐稳定于常数 0.5. 对于每一个随机事件 A 都有这样一个客观存在的常数与之对应. 这种"频率稳定性"即我们前面所说的统计规律性. 我们用这个频率稳定值来表示事件发生的可能性大小是合适的.

定义 1.2 在相同条件下进行大量重复试验,当试验次数充分大时,事件 A 的频率总在某个数值 p 附近摆动,则称 p 为事件 A 的概率,记为 $P(A)$,即

$$P(A) = p$$

在第 3 章中将会证明,当 n 很大时,用统计概率来度量事件发生的可能性的大小是可行的.

1.2.2 概率的公理化定义

在实际中,我们不可能对每一个事件都做大量的试验,从中得到频率的稳定值. 然而,频率的这一规律是我们定义事件概率的客观基础.

定义 1.3 设 E 是随机试验,S 是它的样本空间. 对于 E 的每一事件 A,存在一实数,记作 $P(A)$,如果它满足下列条件:

(1) 非负性:对任意事件 A,$0 \leq P(A) \leq 1$;

(2) 规范性:$P(S) = 1$;

(3) 可列可加性:对两两互不相容的事件 $A_k(k = 1,2,\cdots)$,有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \tag{1.1}$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

由定义 1.3 可以推得概率的一些重要性质.

性质 1.1　设 A 是 A 的对立事件,则

$$P(A) = 1 - P(A)$$

证　因 $A \cup A = S$, $AA =$,由概率的可加性,得

$$P(S) = P(A) + P(A)$$

又由 $P(S) = 1$,得 $P(A) = 1 - P(A)$.

性质 1.2　$P(\ ) = 0$.

证　由 $\bar{\ } = S$,得 $P(\ ) = 1 - P(\bar{\ }) = 1 - P(S) = 0$.

性质 1.3　设 A、B 是两个事件,若 $B \quad A$,则有

$$P(B) \geq P(A) \tag{1.2}$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A) \tag{1.3}$$

证　由 $B \quad A$, $B = A \cup (B - A)$(图 1 1),且 $A(B - A) =$,再由概率的可加性,得

$$P(B) = P(A) + P(B - A)$$

又由概率的非负性

$$P(B - A) \geq 0 \text{ 知 } P(B) \geq P(A)$$

性质 1.4　(加法公式)　对任意两个事件 A、B,有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{1.4}$$

证　因 $A \cup B = A \cup (B - AB)$(图 1 2),且 $A(B - AB) =$, $AB \quad B$,故

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

由式(1.4)容易推广到 3 个事件

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \tag{1.5}$$

对于 n 个事件的情形,可以用数学归纳法证得

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n) \tag{1.6}$$

例 1.4　已知 $A \quad B$, $A \quad C$, $P(A) = 0.9$, $P(B \cup C) = 0.8$,求 $P(A - BC)$

解　由 $A \quad B$, $A \quad C$,知 $A \quad BC$,再由性质 1.3 得

$$P(A - BC) = P(A) - P(BC)$$

又

$$P(BC) = 1 - P(\overline{BC}) = 1 - P(B \cup C) = 1 - 0.8 = 0.2$$

故

$$P(A - BC) = P(A) - P(BC) = 0.9 - 0.2 = 0.7$$

例 1.5　设 A、B、C 是 3 个事件,且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = P(BC) = 0$, $P(AC) = \frac{1}{8}$,求 A、B、C 至少有一个发生的概率.

解　“A、B、C 至少有一个发生”可表示为 $A \cup B \cup C$. 因为 $P(AB) = P(BC) = 0$,而 $ABC\quad AB$,所以 $0 \leq P(ABC) \leq P(AB)$, $P(ABC) = 0$,再由式(1.5)得

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 0 - 0 - \frac{1}{8} + 0 = \frac{5}{8}$$

例 1.6　甲、乙两高射炮手,各自单独击中敌机的概率分别为 0.8 和 0.6,两人同时击中敌机的概率为 0.48,求敌机被击中的概率.

解　设 A 表示事件“甲击中敌机”; B 表示事件“乙击中敌机”; C 表示事件“敌机被击中”. 由题意有 $C = A \cup B$,所以

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= 0.8 + 0.6 - 0.48 = 0.92 \end{aligned}$$

1.2.3　概率的古典定义

最先涉及到的求概率问题都满足“各可能结果具有等可能性”这一假设. 例如,在游戏中使用的骰子是一个匀质的正方体,使得掷出 1～6 各个点数的可能性相同,以保证游戏的公平. 又如一副纸牌的每一张形状与大小均相同,而且在发牌前还需充分地洗牌,于是发到其中每张牌也是等可能的.

定义 1.4　一般,若随机试验 E 有如下特点:

(1) 一个试验只有有限个可能出现的结果,即样本空间只含有限多个样本点.

$$S = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$$

(2) 在一次试验中,各个基本事件发生的可能性相等. 则对试验 E 中的任意事件 A,其概率的计算公式为

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中基本事件的总数}} \tag{1.7}$$

这样定义的概率称作古典概率. 具有这两个特点的试验称为等可能概型,它在概率论发展初期曾是主要研究对象,所以也称为古典概型. 在应用式(1.7)计算 $P(A)$时,首先必须判断相应的试验一定是古典概型. 在此基础上需知道事件 A 所包含的基本事件个数 m 及基本事件总数 n.

从式(1.7)很容易得到古典概率的性质:

(1) 设 A 为任一事件,则 $0 \leq P(A) \leq 1$;

(2) 必然事件的概率等于 1,即 $P(S)=1$;

(3) 设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_m (m \leq n)$两两互不相容,则 $P(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i)$.

例 1.7　1 个 5 位数字的号码锁,每位上有 0,1,…,9 共计 10 个数码,若不知道该锁号码,问开一次锁就把该锁打开的概率多大?

解　这里,开一次锁就是一次试验,其结果是 1 个 5 位号码. 由于在 5 位号码中数码是可以重复的,因此所有可能的结果为 10^5 个,即样本点的总数为 $n=10^5$. 1 个 5 位号码为 1 个基本事件,由于不知道锁的号码,则这 10^5 个基本事件发生的可能性是相等的.

设 A 表示"开一次锁就把锁打开",则 $m=1$,于是由式(1.7),得

$$P(A) = \frac{1}{10^5} = 0.00001$$

由此可见,若不知道锁的号码,要想一次就把锁打开的可能性是很小的. 我们把这种概率很小的事件称为小概率事件. 人们在实践中总结出一条原理:概率很小的事件在一次试验中几乎不可能发生,这称为小概率实际推断原理.

例 1.8　一批产品共 200 件,其中恰有 6 件废品,求:

(1) 这批产品的废品率;

(2) 任取 3 件,至多有 1 件废品的概率.

解　(1) 设 A_1 为事件"任取 1 件为废品",这批产品的废品率也就是从中任取 1 件时取到废品的概率,故 $P(A_1) = \frac{6}{200} = 0.03$.

(2) 设 A_2 为事件"任取 3 件,至多有 1 件废品", B_0 ="任取 3 件,恰好都不是废品", B_1 为事件"任取 3 件,恰有 1 件废品",由于 $A_2 = B_0 \cup B_1$,而且 B_0 与 B_1 是互斥的. 所以

$$P(A_2) = P(B_0) + P(B_1) = \frac{C_{194}^3}{C_{200}^3} + \frac{C_6^1 C_{194}^2}{C_{200}^3} = 0.9977$$

例 1.9　1 口袋装有 6 只球,其中 4 只白球,2 只红球,从袋中取球两次,每次随机地取 1 只,考虑两种取球方式:(a)第 1 次取 1 只球,观察其颜色后放回袋中,搅匀后再取 1 球,这种取球方式叫做放回抽样;(b)第 1 次取 1 球不放回袋中,第 2 次从剩余的球中再取 1 球,这种取球方式叫做不放回抽样. 试分别就上面两种情况求:

(1) 取到的两只球均为白球的概率;

(2) 取到的两只球颜色相同的概率;

(3) 取到的两只球中至少有 1 只白球的概率.

解　设 A 为事件“取到的两只球均为白球”, B 为事件“取到的两只球均为红球”, C 为事件“取到的两只球中至少有 1 只白球”,则 $AB=$ 　, $C=B$.

分析:在袋中依次取两只球,每一种取法为一个基本事件,显然样本空间中仅包含有限个元素,由已知,每个基本事件发生的可能性均等,所以可选用古典概型,利用式(1.7)来计算事件的概率.

(a) 放回抽样的情况

第 1 次从袋中取球有 6 只球可供抽取,第 2 次也有 6 只球可供抽取. 由组合法的乘法原理共有 6×6 种取法,即样本空间中基本事件总数为 6×6. 对于事件 A 而言,由于第 1 次有 4 只白球可供抽取,第 2 次也有 4 只白球可供抽取,由乘法原理共有 4×4 种取法,即 A 中包含 4×4 个元素. 同理, B 中包含 2×2 个元素. 于是

$$P(A)=\frac{C_4^1\cdot C_4^1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\frac{4\times4}{6\times6}=\frac{4}{9}$$

$$P(B)=\frac{C_2^1\cdot C_2^1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\frac{2\times2}{6\times6}=\frac{1}{9}$$

由于 $AB=$ 　,得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{5}{9}$$

$$P(C)=P(B)=1-P(B)=\frac{8}{9}$$

(b) 不放回抽样的情况

此时,样本空间中基本事件总数为 6×5,事件 A 所包含的基本事件数为 4×3,事件 B 所包含的基本事件数为 2×1,以下可由读者自己完成.

例 1.10(公平的抽签)　盒中有彩券 $m+n$ 张,其中 m 张有奖, n 张无奖. 现随机地一张一张取出,试求第 k 张为有奖彩券的概率($1\leq k\leq m+n$).

解　从 $m+n$ 张彩券中不放回地一张一张地任取 k 张,有 P_{m+n}^{k} 种取法. 设事件 A 为事件“取出的 k 张彩券中,第 k 张是有奖彩券”,完成事件 A 分两个步骤,①从 m 张有奖彩券中任取一张排在第 k 个位置上,有 m 种取法. ②从剩下的 $m+n-1$ 张中任取 $k-1$ 张,放在前第 $k-1$ 张位置上,有 P_{m+n-1}^{k-1} 种取法. 因而所求的概率为

$$P(A)=\frac{P_m^1P_{m+n-1}^{k-1}}{P_{m+n}^{k}}=\frac{n}{m+n}$$

此例说明“抽签是公平的”,即是否中签与取彩券次序 k 无关. 如果有 $m+n$