普通高等教育"十五"国家级规划教材

大学数学基础教程(四)

概率论与数理统计

李小明　谢祥俊　刘建兴

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育‘十五’国家级规划教材《大学数学基础教程》的第四分册，介绍了概率论与数理统计的基本知识，内容包括：随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、参数估计与假设检验、回归分析与方差分析等，每章配有适量的习题，书末附有参考答案。作为教学改革的一种尝试，在每章后面还配备了数学实验操作与练习。

本书在新世纪高等教育从‘专业教育’向‘素质教育’转变的背景下，定位于‘将实际问题与理论阐述紧密结合，适当简化内容和降低难度’的指导思想，具有概率与统计并重、理论与应用并重、加强应用环节等特点。本书可供高等院校另工类、财经类非数学类专业用作教材，也可供广大自学者参考。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学基础教程(四)，概率论与数理统计/李小明，谢祥俊，刘建兴，—北京：高等教育出版社，2004.11

ISBN 7-04-015551-6

Ⅰ.大... Ⅱ.①李...②谢...③刘... Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材

Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第103559号

策划编辑 王 强　　责任编辑 崔梅萍　　封面设计 刘晓翔
责任绘图 尹 莉　　版式设计 史新薇　　责任校对 尤 静
责任印制

出版发行 高等教育出版社　　购书热线 010-64054588
社 址 北京市西城区德外大街4号　　免费咨询 800-810-0598
邮政编码 100011　　网 址 http://www.hep.edu.cn
总 机 010-58581000　　http://www.hep.com.cn

经 销 新华书店北京发行所
印 刷

开 本 787×960 1/16　　版 次 年 月第1版
印 张 13　　印 次 年 月第 次印刷
字 数 230 000　　定 价 14.10元

物料号：15551-00

《大学数学基础教程》编辑委员会

前　言

随着科学和技术的高速发展、数学自身的发展和应用领域的不断扩大，当今数学的科学地位发生了巨大的变化，这迫使工科数学教育必须面对形势的发展和变化，进行教学内容及课程体系的改革。

在工科数学教育中，随机量知识是工科学生必备的数学基础知识，特别是，当今计算机的广泛使用和计算技术、软件包的高速发展、市场经济的运行，为随机量知识提供了更加广阔的应用前景。但是在随机量知识的教学中，长期存在着重概率轻统计的现象，这不仅使学生理解和掌握随机量的基本知识受到限制，而且使得本来应用性和实用性很强的知识失去了它应有的地位，这直接影响到学生数学素质的培养。在教学内容方面，存在经典较多、现代不足；推导较多，数值计算不足；理论较多，方法相对较少；强调计算技巧，概率统计思想不足等现象。在教学手段方面，教学手段的落后，使教学内容相对狭窄，课堂信息量相对减少。在实践环节方面，没有很好地突出概率统计的实用价值以及学生的数学建模能力和数据处理能力的培养。所有这些问题都有待于进行研讨和改革，本书作者们试图在这几个方面做点探索。

普通高等教育“十五”国家级规划教材《大学数学基础教程》是在新世纪高等教育从原来的“专业教育”向“素质教育”转变的背景下，定位于“将实际问题与理论阐述紧密结合，适当简化内容和降低难度”的指导思想编写的。这本《概率论与数理统计》是《大学数学基础教程》的分册之一。该教材的主要特色有：

1．在基本学时(约 50 学时)的基础上，概率重概念，统计重思想、方法，增强实用性，加大课堂信息量。

2．研究和探索现代化教学手段在教学过程中的运用，促进教学内容和教学方法的改革，努力提高教学的质量和效益。

3．增加教学实践环节，结合通用软件包，培养学生的动手能力和数据处理的能力。

4．注重概率与统计的有机结合，以及数学建模教育在教学中的体现。

5．精选应用实例，开展数学实验教学环节(约 10 学时)。目的一是突出该课程的实践应用地位，弥补理论教学中的薄弱环节，培养学生运用随机量知识进行定量思维的意识和兴趣。二是加深学生对教学内容的理解，培养学生应用数学的意识和能力。

本书第一、三、五章由李小明(西南石油学院)执笔，第二章由谢祥俊(西南石

油学院）执笔，第四章由刘建兴（西南石油学院）执笔，本书中的应用实例由谢祥俊、刘建兴执笔。《大学数学基础教程》编委会的全体成员对本书进行初审，提出不少修改意见。本书由电子科技大学应用数学系徐全智教授及西华大学应用数学系蔺大正教授主审，他们认真地审阅了全书，并提出了重要的修改意见，谨向他们表示衷心的感谢。在编写本书的过程中，我们得到高等教育出版社的关心和支持，也得到西南石油学院计算科学学院的同事们的不少帮助，在此一并致谢。

虽然我们努力使本书成为一本既有新意又便于教学的教材，但由于缺乏经验而且水平有限，本书中肯定还会有不少不尽如人意的地方，恳请各位专家及读者提出宝贵意见。

编者

2004．7

目　录

绪　论 …… 1

第一章　随机事件与概率 …… 3

第一节　随机事件 …… 3
一、随机事件与样本空间 …… 3
二、随机事件的关系与运算 …… 4
第二节　概率 …… 6
一、概率的定义 …… 6
二、概率的基本性质 …… 9
三、古典概型 …… 10
四、几何概型 …… 13
第三节　条件概率与全概率公式 …… 14
一、条件概率与乘法定理 …… 14
二、全概率公式与 Bayes 公式 …… 16
第四节　事件的独立性 …… 18
一、事件的独立性 …… 18
二、伯努利概型 …… 20
第五节　应用实例 …… 22
一、生日问题 …… 22
二、赠送问题 …… 24
习题一 …… 24

第二章　随机变量及其分布 …… 27

第一节　随机变量的概念 …… 27
第二节　一维离散型随机变量及其分布 …… 28
一、离散型随机变量的概率分布 …… 28
二、常见离散型随机变量的分布 …… 30
第三节　随机变量的分布函数 …… 33
一、分布函数的定义 …… 33
二、分布函数的性质 …… 34
第四节　一维连续型随机变量及其分布 …… 36

一、连续型随机变量的密度函数 …… 36
二、常见连续型随机变量的分布 …… 37
第五节　二维随机变量及其分布 …… 43
一、二维随机变量的分布函数 …… 43
二、二维离散型随机变量的联合分布 …… 44
三、二维连续型随机变量的联合分布 …… 45
第六节　随机变量的相互独立性 …… 47
一、边缘分布 …… 47
二、条件分布 …… 50
三、随机变量的独立性 …… 52
第七节　随机变量的函数及其分布 …… 54
一、一维随机变量的函数及其分布 …… 54
二、二维随机变量的函数的分布 …… 57
三、数理统计中的重要分布 …… 62
四、中心极限定理 …… 65
第八节　应用实例 …… 66
一、高尔顿钉板的理论解释及计算机仿真 …… 66
二、人力资源管理 …… 68
习题二 …… 69

第三章　随机变量的数字特征 …… 74

第一节　数学期望 …… 74
一、数学期望的定义 …… 74
二、随机变量函数的数学期望 …… 76
三、数学期望的基本性质 …… 78
第二节　方差和协方差 …… 79
一、方差 …… 79
二、协方差 …… 82
三、一些重要随机变量的数学期望与方差 …… 84
第三节　大数定律 …… 87
第四节　应用实例——豆腐生产决策问题 …… 90
习题三 …… 92

第四章　参数估计与假设检验 …… 95

第一节　数理统计基础与抽样分布 …… 95
一、总体、个体与样本 …… 95
二、统计量与样本矩 …… 96

三、正态总体下的常用统计量的分布 …… 97
第二节　点估计 …… 98
一、矩估计法 …… 99
二、极大似然估计法 …… 100
三、估计量的评选标准 …… 104
第三节　区间估计 …… 107
一、置信区间的概念 …… 107
二、单个正态总体的均值的区间估计 …… 108
三、单个正态总体的方差的区间估计 …… 111
四、两个正态总体的均值差的置信区间 …… 112
五、两个正态总体的方差比的置信区间 …… 114
第四节　假设检验 …… 116
一、假设检验的概念 …… 116
二、单个正态总体的参数假设检验 …… 119
三、两个正态总体的参数假设检验 …… 122
四、单侧假设检验 …… 125
五、总体分布的假设检验 …… 127
第五节　应用实例——质量控制问题 …… 133
一、基本思想 …… 133
二、基本作法 …… 134
习题四 …… 135

第五章　回归分析与方差分析 …… 138
第一节　总体回归直线与相关系数 …… 138
第二节　一元线性回归模型及统计推断 …… 141
一、样本回归直线 …… 141
二、样本相关系数与直线回归方程的检验 …… 145
三、预测与控制 …… 147
第三节　一元非线性回归与多元回归 …… 149
一、一元非线性回归 …… 149
二、多元线性回归分析 …… 152
第四节　方差分析 …… 155
一、单因素方差分析 …… 155
二、两因素方差分析 …… 159
第五节　应用实例——铸件模型的工艺及配方优选 …… 165
习题五 …… 169

习题答案 …… 173

附表 1　泊松分布表 …… 180

附表 2　标准正态分布表 …… 181

附表 3　χ^2 分布表 …… 182

附表 4　t 分布表 …… 186

附表 5　F 分布表 …… 188

附表 6　相关系数显著性检验表 …… 196

参考文献 …… 197

绪　论

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律的一门数学分支，是近代数学的重要组成部分．那么什么是随机现象呢？让我们先观察两个简单试验：

试验一：一个盒子中有 10 个形状完全相同的白球，搅匀后从中任意摸取 1 球，观察球的颜色．

试验二：一个盒子中有 10 个形状完全相同的球，其中白球 5 个，黑球 5 个，搅匀后从中任意摸取 1 球，观察球的颜色．

试验一的特点是：在摸球前，我们就知道摸球的结果一定是白球．这种试验，根据试验的条件就可确定试验的结果．我们把这类试验所反映的现象称为确定性现象．确定性现象非常广泛，例如：

“早晨，太阳必然从东方升起”；

“带电的物体之间，总是同性相斥异性相吸”；

“半径为 r 的圆，其面积为 πr^2”；

“$f(x)$在$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在$[a,b]$上一定有最大值和最小值”；

“n 阶方阵 A 有 n 个不同的特征根，则 A 一定可以对角化”；

……

试验二的特点是 摸球的可能结果不止一个，可能摸到白球，也可能摸到黑球，且摸球前不能确定会摸到哪种颜色的球．因此，这种试验，根据试验的条件无法完全确定一次试验的结果，这与反映确定性现象的试验有本质的区别．对于试验二，虽然无法确定在一次试验中摸到白球还是黑球，但实践经验告诉我们，如果我们大量重复这个试验，统计出试验结果为白球、黑球的次数，并求出与试验总次数的比值，那么我们会发现两个比值都渐近稳定于$\frac{1}{2}$，即应认为在试验二中取得白球和黑球的‘机会’是相等的，这一点直观上也易理解．这种在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性，就是我们以后所说的统计规律性．

在一定条件下具有多种可能发生的结果，某一结果是否发生事先不能确定，这种现象我们称其为随机现象．随机现象在生产实践、科学研究、社会生活等方面普遍存在着，例如：

“抛掷一枚硬币”(试验结果用正面、反面表示)；

“某地区年降雨量”；

“未来一小时内电话交换台接到的电话呼叫次数”；

“同一条生产线上用同样工艺生产出来的灯泡的寿命”;

“某公共汽车站在同一固定时间内来到的乘客数”.

概率统计作为研究随机现象统计规律的数学分支,由于随机现象的普遍性而具有极其广泛的应用,几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门.例如气象、水文、地震预报,产品质量检查,最佳生产方案设计,可靠性分析,最优控制,邮电通讯,自然灾害等研究领域都与概率统计的理论和方法紧密相关.

第一章

随机事件与概率

第一节　随 机 事 件

一、随机事件与样本空间

在随机现象的研究中，我们需要做大量的观测或试验．如果一个试验同时满足下列条件：

（1）试验可以在相同的条件下重复进行；

（2）试验的结果不止一个，且可能的结果是能预先知道的；

（3）每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但试验前不能肯定出现哪一个结果．称这样的试验是一个随机试验，常用 E 表示．为方便起见，随机试验简称为试验．我们把随机试验 E 的每个直接结果称为一个样本点，常用 ω 表示；E 的全体样本点构成的集合称为样本空间，常用字母 Ω 表示．

【例 1】　在掷硬币试验中，令

$$\omega_1=\text{“正面向上”},\omega_2=\text{“反面向上”},$$

则样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$．

【例 2】　一个盒子中有10个完全相同的球，分别标以号码 $1,2,\cdots,10$，从中任取一个球，令

$$i=\text{“取得球的标号为 }i\text{”}\ (i=1,2,\cdots,10),$$

则样本空间为 $\Omega=\{1,2,\cdots,10\}$．

【例 3】　观察放射性物质在一段时间内放射的粒子数．令

$$i=\text{“放射 }i\text{ 个粒子”}\ (i=0,1,2,\cdots,n),$$

则样本空间为 $\Omega=\{0,1,2,\cdots,n\}$．

【例 4】　测量车床加工的零件的直径(单位：mm)．令

$x=$“测得零件的直径为 $x$mm”$(a\leqslant x\leqslant b)$，

则样本空间为 $\Omega=[a,b]$.

在随机试验中,我们常常关心的是带有某些特征的情况是否发生.如在例 2 中,可以研究 $A=$“球的标号为 4”,$B=$“球的标号是偶数”.$C=$“球的标号$\leqslant 4$”这些结果是否发生?

其中 A 是由单个样本点构成的事件,我们称为基本事件,B 和 C 是由多个样本点构成的事件,称为复合事件.不论是基本事件还是复合事件,由于在试验中发生与否带有随机性,所以都叫随机事件,简称事件,通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$来表示.在试验中,当试验结果 ω 出现在随机事件 A 中时,就称事件 A 发生,并记为 $\omega\in A$ 否则,称 A 不发生,记为 $\omega\notin A$.

样本空间 Ω 包含所有的样本点,它是样本空间 Ω 自身的子集,在每次试验中它必然会发生的,我们称 Ω 为必然事件.空集 $\varnothing$ 表示样本空间 Ω 的空子集,它不含任何样本点,在每次试验中都不发生,我们称 $\varnothing$ 为不可能事件.虽然必然事件与不可能事件并不具有随机性,但为研究方便,仍把它们作为随机事件的极端情形来处理.

二、随机事件的关系与运算

一个随机试验,可能有很多随机事件.概率论的任务之一就是要研究随机事件间的相互关系,通过简单事件去表示复杂事件,进而通过简单事件的概率去计算复杂事件的概率.为此,有必要研究事件之间的关系和运算规律.

我们已经知道样本空间包含了所有样本点,而随机事件不过是具有某些特征的样本点的子集合,所以从集合论的观点来看,一个随机事件不过是样本空间 Ω 的一个子集而已.因此研究事件的关系与运算,实际上就是研究集合的关系与运算.这样,由集合论的研究结果就可以直接导出随机事件的关系与运算,只不过要用描述随机事件的语言来加以描述.表 1-1 列出了事件间的基本关系.

表 1-1　事件间的基本关系

符号	集合论	概率论
Ω	全集	样本空间(必然事件)
$\varnothing$	空集	不可能事件
ω	元素	样本点
$A\subset\Omega$	子集	事件
$A\subset B$	集合 B 包含 A	事件 B 包含事件 A(A 发生导致 B 发生)
$A=B$	集合 A 等于 B	事件 A 与事件 B 相等(A 发生导致 B 发生,B 发生导致 A 发生)

续表

符号	集合论	概率论
$A\cup B$	A 与 B 的并集	事件 A 与事件 B 的和(A,B 至少发生其一)
$A\cap B$	A 与 B 的交集	事件 A 与事件 B 的积(A,B 同时发生)
$A\cap B=\varnothing$	A 与 B 无公共元素	事件 A 与事件 B 互不相容(A,B 不可能同时发生)
$A-B$	A 与 B 的差集	事件 A 与事件 B 的差事件(A 发生,B 不发生)
$\overline{A}$	A 的余集	事件 A 的对立事件($\overline{A}$ 发生当且仅当 A 不发生)

事件之间的基本运算关系见图 1-1.

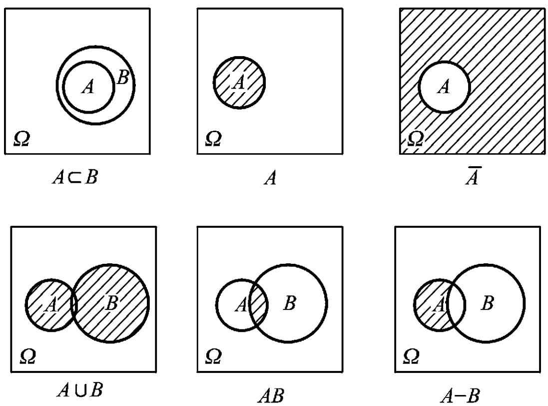

图 1-1

n 个事件的和 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 及 n 个事件的积 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 分别记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$,$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 当 n 个事件两两互不相容时,其和通常记为 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$. 特别,当 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$ 时,称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 Ω 的一个划分或称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 Ω 的一个完备事件组.

【例 5】 在上述例 2 中,求 $B\cup C$,$B\cap C$,$B-C$,$\overline{B}$.

解 $B\cup C=\{1,2,3,4,6,8,10\}$; $B\cap C=\{2,4\}$;

$B-C=\{6,8,10\}$; $\overline{B}=\{1,3,5,7,9\}$.

【例 6】 从一批产品中每次取出一个产品进行检验(每次取出的产品不放回),共取三次. 事件 A_i 表示第 i 次取到合格品($i=1,2,3$). 试用事件的运算符号表示下列事件:三次都取到了合格品;三次中至少有一次取到合格品;三次中恰有两次取到合格品;三次中最多有一次取到合格品.

解 “三次取到合格品”$=A_1A_2A_3$；

“三次中至少有一次取到合格品”$=A_1\cup A_2\cup A_3$；

“三次中恰有二次取到合格品”$=\bar{A}_1A_2A_3+A_1\bar{A}_2A_3+A_1A_2\bar{A}_3$；

“三次中至多一次取到合格品”$=\bar{A}_1\bar{A}_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_3\cup\bar{A}_2\bar{A}_3$；

【例 7】 一名射手连续向某个目标射击三次，事件 A_i 表示该射手第 i 次击中目标($i=1,2,3$).试用文字叙述下列事件.

$A_1\cup A_2$；$\bar{A}_2$；$A_1\cup A_2\cup A_3$；$A_1A_2A_3$；A_3-A_2；$A_3\bar{A}_2$；$\overline{A_1\cup A_2}$；$\bar{A}_1\bar{A}_2$；$\bar{A}_2\cup\bar{A}_3$；$\overline{A_2A_3}$；$A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$.

解 $A_1\cup A_2=$“前两次中至少有一次击中目标”；

$\bar{A}_2=$“第二次未击中目标”；

$A_1\cup A_2\cup A_3=$“三次射击中至少有一次击中目标”；

$A_1A_2A_3=$“三次射击都击中了目标”；

$A_3\bar{A}_2=A_3-A_2=$“第三次击中但第二次未击中目标”

$\overline{A_1\cup A_2}=\bar{A}_1\bar{A}_2=$“前二次均未击中目标”；

$\bar{A}_2\cup\bar{A}_3=\overline{A_2A_3}=$“第二次与第三次至少有一次未击中目标”；

$A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3=$“三次射击中至少有两次击中目标”.

与集合运算一样，事件之间的运算具有下列基本运算性质.

1. 交换律： $A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.

2. 结合律： $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

3. 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

4. 德摩根(De Morgan)定律：

$$\overline{A_1\cup A_2}=\bar{A}_1\cap\bar{A}_2；\overline{A_1\cap A_2}=\bar{A}_1\cup\bar{A}_2.$$

对于 n 个事件，甚至可列个事件，德摩根定律也成立，即：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i；\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\bar{A}_i；$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{A}_i；\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bar{A}_i.$$

第二节 概　　率

一、概率的定义

怎样用数值来确切表示随机事件发生的可能性大小呢？

由于随机事件的发生与否在一次观察中呈现出一种偶然性，因此研究随机事件，就必须对其进行大量重复的试验或观察，以研究它所呈现的规律.

若随机事件 A 在 N 次试验中发生了 n 次，则称

$$F_N(A)=\frac{n}{N}$$

为随机事件 A 发生的频率.

研究随机事件 A 发生的规律性，就是要研究其频率 $F_N(A)$ 具有什么特性，下面先研究几个例子.

【引例 1】 在投掷硬币的试验中，历史上曾有许多著名科学家，对投掷结果为正面的随机事件 A 发生的频率作了试验观测，其结果如下表：

表 1－2 随机事件 A 发生频率试验观测

实验者	投掷次数 N	出现正面次数 n	频率 $F_N(A)$
De Morgan(德·摩根)	2 048	1 061	0.518 1
Buffon(蒲丰)	4 040	2 048	0.506 9
Feller(费勒)	10 000	4 979	0.497 9
Pearson(皮尔逊)	12 000	6 019	0.501 6
Pearson(皮尔逊)	24 000	12 012	0.500 5

由上表容易看出，当投掷次数较少时频率的波动较大，当投掷次数增大时频率呈现稳定性，即出现正面的频率在 0.5 附近摆动，而逐渐稳定于 0.5.

【引例 2】 研究英语文章中字母及空格(含各种标点符号)出现的频率. 通过大量重复试验，可以发现 26 个字母及空格被使用的频率相当稳定，下表 1－3 是经过大量试验后得出的结果：

表 1－3 英文字符被使用的频率试验观测

字母	空格	E	T	O	A	N	I	R	S
频率	0.2	0.105	0.072	0.065 4	0.063	0.059	0.055	0.054	0.052
字母	H	D	L	C	F	U	M	P	Y
频率	0.047	0.035	0.029	0.023	0.022 5	0.022 5	0.021	0.017 5	0.012
字母	W	G	B	V	K	X	J	Q	Z
频率	0.012	0.011	0.010 5	0.008	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001

上述结果在打字机键盘的设计、印刷铅字的铸造、信息的编码及密码的破译等方面都有着十分广泛的应用.

【引例 3】(高尔顿板) 英国著名统计学家高尔顿(Galton)，设计了一个钉板

试验模型如图 1－2 所示.

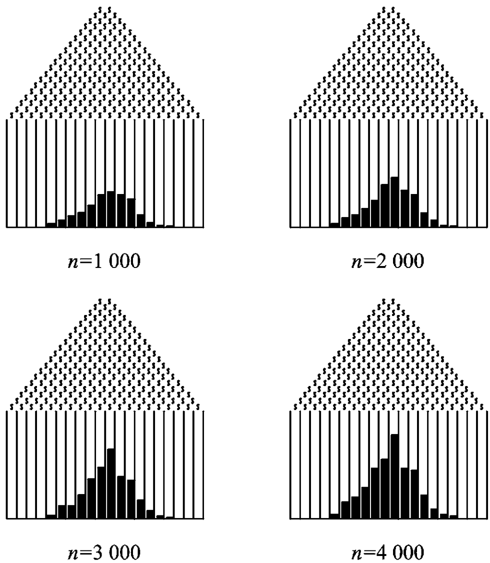

图 1－2　高尔顿板（n 表示抛球个数）

自上端放入一小球，让其自由下落，在下落过程中当小球碰到钉子时，从左边落下与从右边落下的机会相等，碰到下一排钉子时也是如此，最后落入底板中的某一格子. 因此一个小球从上端放入，最后落入哪一个格子，预先是难以确定的. 但实验证明，如放入大量小球，最后从底板上堆积起来的小球所形成的曲线形状几乎总是一样的，也就是说小球落入底板中某一格子内的频率是十分稳定的.

上述例子表明，虽然随机事件 A 在一次试验或观察中出现什么结果具有偶然性，但在大量重复的观察和试验中可发现结果出现的频率在某数附近摆动，而逐渐稳定于该数（称为稳定值）. 随机事件发生的可能性大小是客观存在的，是不以人们的意志为转移的客观规律，把随机事件的这种属性称为统计规律性. 我们把随机事件 A 发生频率的稳定值叫做事件 A 发生的概率，记为 $P(A)$.

从 $F_N(A)$ 的定义中不难知道频率具有如下三条性质：

1. $0 \leqslant F_N(A) \leqslant 1$；
2. $F_N(\Omega)=1$；
3. 若 A、B 互不相容，则

$$F_N(A \cup B)=F_N(A)+F_N(B).$$

根据频率的稳定性，自然会想到概率也应符合上述三条性质，于是有：