

大学数学辅导系列丛书

高等数学辅导

(第3版)上册

盛祥耀 葛严麟 编
胡金德 张元德

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书基本上是根据全国工科院校高等数学教学大纲的要求编写的,也是编者多年来在清华大学从事高等数学的教学和辅导工作的结晶。

全书分上、下两册,上册包含函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、空间解析几何及矢量代数共7章内容。每章的各节以“内容提要”开始,概括本节的主要知识内容;然后是“例题分析”,通过分析、讲解、提问、小结等方式对各种题型的例题进行解剖、辅导。每章的末尾,安排“习题与答案”,供读者练习、检查。

本书可作为工科大学生、自学高等数学者学习时的辅导教材,也可供从事工科高等数学教学的教师、非数学专业的研究生及中学数学教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导.上册/盛祥耀等编.—3版.—北京:清华大学出版社,2003
(大学数学辅导系列丛书)

ISBN 7-302-06882-8

高... 盛... 高等数学 - 高等学校 - 教学参考资料 .O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第055769号

出版者:清华大学出版社 地 址:北京清华大学学研大厦

<http://www.tup.com.cn> 邮 编:100084

社总机:010-62770175 客户服务:010-62776969

责任编辑:刘颖

印刷者:清华大学印刷厂

装订者:三河市金元装订厂

发行者:新华书店总店北京发行所

开 本:140×203 印张:19.875 字数:495千字

版 次:2003年12月第3版 2003年12月第1次印刷

书 号:ISBN 7-302-06882-8/O·308

印 数:1~8000

定 价:27.00元

第 3 版 序

第 3 版保留了第 2 版的主要内容和章节安排。在第 3 版中的主要变化体现在如下 3 个方面：

(1) 内容的安排更加条理化、系统化,并以条目的形式列出,以利于读者归纳总结。

(2) 根据当前高等院校教育中课堂教学时间减少的实际,加强了解题过程中的分析成分,以利于启发读者的数学思维能力,提高读者分析问题和解决问题的能力。

(3) 增加了一些综合题,以提高读者综合运用所学知识的能力。这些题目与当前考研试题的要求相当。这为有志于攻读硕士研究生的读者在学习本门课程时创造了了解考研试题水平的条件。

希望《高等数学辅导》第 3 版继续得到广大读者的关心、支持,并恳请读者批评指正。

编 者

2003 年 2 月于清华园

第 2 版 序

大约在十年前,我们编写了这本《高等数学辅导》,它的主要对象原想是社会上自学或通过电视学习工科类高等数学的青年.但事实上,不少学校的本科生(包括重点大学的),从事工科院校数学教学的教师,甚至报考硕士研究生的读者也都在使用这本书,受到不同层次读者的欢迎,使我们非常高兴.

自第 1 版发行后,我们不断收到读者的来信,表示关心和支持,对此我们表示深切的感谢.根据读者的使用情况,我们对第 2 版作了以下的修改:适当调整了一些例题和习题,但保持全书原有的特色;增加了自我检查题,帮助读者自测自己的程度和水平;为了不使篇幅增加,删去了原来例题栏目,仍保留了例题分析等.

我们相信《高等数学辅导》第 2 版将会更加受到不同层次读者的欢迎,也希望读者继续给我们支持和关心.

编 者

1992 年 10 月于清华园

第 1 版 序

目前社会上有不少青年在自学或通过电视学习工科类的高等数学,他们希望得到老师的辅导,编写本书的目的就是想在这方面提供一些我们力所能及的帮助.同时也考虑到了在校学习的工科类大学生的情况,希望对他们也能提供一些辅导.

本书是通过例题的分析、讲解、提问、小结等方式提供辅导的.例题的选择基本上符合全国工科院校高等数学课程教学的基本要求,因此,不管读者使用什么样的工科类教材,都能使用此书.

本书共分十二章:函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、空间解析几何及矢量代数、多元函数及其微分法、重积分、曲线积分与曲面积分、级数、微分方程等.全书共收集了 500 道左右的例题,850 道左右的习题.例题中有基本概念讨论题;有似是而非的提问题;有初学者易在计算中出现的错误或不易理解的澄清题;有介绍基本方法、思路的计算或证明题;有一题多解的开扩思路题;也有较灵活的综合题,不少例题在讲解前作了如何思考或如何下手的分析,在讲解完后有些还提出新问题,帮助读者进一步掌握和理解.这些例题的绝大部分都在编者所在的单位清华大学教学上使用过,其中不少例题还是我们多年来经常使用的.

读者在使用本书时,我们建议先看一下每一节的内容提要及例题分析的题目,自己想一想,动手算一算,然后再去看例题分析,这样帮助会大些.为了使读者有指导地做习题,在每章的最后附有习题(有 * 号题可暂时略去不看或不做),这些题会做了,教学基本要求所规定的内容就达到了.

编写本书时,我们参考了下列教材:清华大学高等数学教研组

——第 1 版序——

编写的《高等数学(基础部分)》和习题集(未出版),同济大学数学教研组编的《高等数学习题集》,别尔曼著,景毅等译的《数学解析习题汇编》,吉米多维奇著,李英冻译的《数学分析习题集》,在此特向有关人员表示感谢.

编者力图使本书能反映清华大学高等数学教研组近 40 年来辅导工作中的经验.但由于我们水平较低,反映肯定是不充分的.如果有机会我们还要不断完善.

本书的缺点和错误,恳请读者指正.

编 者

目 录

第 1 章 函数	1
1.1 预备知识	1
1.1.1 内容提要	1
1 区间及其各种表示法	1
2 绝对值及其性质	1
1.1.2 例题分析	2
1 不等式与绝对值不等式之间的互换	2
2 解不等式	3
1.2 函数概念、定义域、反函数、函数符号	6
1.2.1 内容提要	6
1 函数定义	6
2 定义域	6
3 反函数定义	6
1.2.2 例题分析	7
1 有关函数概念的一些问题	7
2 求定义域	9
3 函数的符号运算	11
4 求反函数	15
1.3 偶函数、奇函数、周期函数、函数的增减性	18
1.3.1 内容提要	18
1 奇、偶函数的定义	18
2 周期函数定义	18
3 函数增减性定义	18
1.3.2 例题分析	19

1	判断函数的奇偶性.....	19
2	函数周期性及其求法.....	21
3	判断函数的增减性.....	23
1.4	建立函数关系.....	24
1.4.1	内容提要	24
1.4.2	例题分析	25
1	由物理知识寻找函数关系.....	25
2	由几何条件寻找函数关系.....	25
3	由其他条件寻找函数关系.....	28
1.5	作函数的图形.....	29
1.5.1	内容提要	29
1.5.2	例题分析	31
1	图形的叠加.....	31
2	图形的平移.....	32
3	综合法作图.....	33
4	带有绝对值的函数作图法.....	34
5	其他作图法.....	35
1.6	综合题、杂题	37
1.7	习题与答案.....	42
1.7.1	习题	42
1.7.2	答案	46
第2章	极限与连续	50
2.1	极限概念.....	50
2.1.1	内容提要	50
1	数列 u_n 的极限定义	50
2	当 $x \rightarrow +\infty$ 时,函数 $f(x)$ 以 A 为极 限的定义.....	50
3	当 $x \rightarrow -\infty$ 时,函数 $f(x)$ 以 A 为极	

限的定义.....	50
4 当 $x \rightarrow x_0$ 时,函数 $f(x)$ 以 A 为极 限的定义.....	51
5 当 $x \rightarrow x_0$ 时,函数 $f(x)$ 以 A 为极 限的定义.....	51
6 无穷小量的定义.....	51
7 无穷大量的定义.....	51
8 有界函数与无界函数的定义.....	52
2.1.2 例题分析	52
1 有关极限概念中的一些问题.....	52
2 用极限定义证明极限.....	54
3 无穷小、无穷大、有界函数及 无界函数.....	62
2.2 极限四则运算.....	64
2.2.1 内容提要	64
2.2.2 例题分析	65
1 有关极限四则运算的讨论.....	65
2 用极限四则运算计算极限.....	67
3 有界函数与无穷小量的乘积定理.....	73
2.3 极限存在准则、两个重要极限	74
2.3.1 内容提要	74
2.3.2 例题分析	74
1 两个重要极限及其应注意的问题.....	74
2 利用极限存在准则求极限.....	79
2.4 无穷小量的比较.....	82
2.4.1 内容提要	82
2.4.2 例题分析	83
1 利用等价无穷小代换求极限.....	83

2	加减运算中用各自的等价无穷小 代换求极限的条件.....	85
3	无穷小量阶的判定.....	88
2.5	连续函数.....	92
2.5.1	内容提要	92
1	函数的连续定义.....	92
2	间断点的定义.....	92
3	连续函数的性质.....	92
4	最大值和最小值定理.....	93
5	介值定理.....	93
2.5.2	例题分析	93
1	连续函数概念中的一些问题.....	93
2	函数关系已显示的函数(包括分段 函数)的连续性	95
3	函数关系未显示的函数的连续性.....	99
2.6	综合题、杂题.....	102
2.7	习题与答案	111
2.7.1	习题.....	111
2.7.2	答案.....	115
第3章	导数与微分	117
3.1	导数概念及其几何意义	117
3.1.1	内容提要.....	117
1	函数在一点可导	117
2	函数在区间上可导	118
3	导数的几何意义	119
3.1.2	例题分析.....	120
1	利用定义求函数的导数以及与导数 概念有关的问题	120

2	利用导数的几何意义求曲线的切线 方程	128
3.2	导数计算	131
3.2.1	内容提要.....	131
1	导数的基本公式	131
2	导数运算的基本法则	132
3	复合函数求导法	132
4	反函数求导法	133
5	隐函数求导法	133
6	对数微分法	133
7	由参数方程所确定的函数的求导法 ...	134
3.2.2	例题分析.....	134
1	利用四则、复合、隐函数求导法则 求函数的导数	134
2	与导数的几何意义、物理意义有关的问题	146
3.3	微分概念、性质及其在近似计算中的应用.....	156
3.3.1	内容提要.....	156
1	函数在一点可微	156
2	函数在区间上可微	157
3	微分的几何意义	157
4	微分近似公式	157
5	微分的基本公式和运算法则	157
3.3.2	例题分析.....	159
1	与微分概念有关的问题	159
2	利用微分运算法则求函数的微分	162
3	利用微分近似公式计算函数的 近似值	164

4	有关绝对误差、相对误差的计算.....	168
3.4	高阶导数	169
3.4.1	内容提要.....	169
1	高阶导数的定义	169
2	莱布尼茨公式	170
3.4.2	例题分析.....	170
1	利用定义或充要条件考察函数在 一点的二阶可导性	170
2	利用求导的运算法则求函数的二阶 导数	172
3	求函数的 n 阶导数的几种方法	175
4	高阶导数的物理应用	179
3.5	习题与答案	182
3.5.1	习题.....	182
3.5.2	答案.....	194
第4章	导数的应用.....	204
4.1	微分中值定理	204
4.1.1	内容提要.....	204
1	罗尔定理	204
2	拉格朗日定理	204
3	柯西定理	205
4.1.2	例题分析.....	205
1	对微分中值定理的条件、结论正确 理解与运用	205
2	有关证明不等式的几个命题	207
3	证明不等式	209
4	有关函数零值点或方程根的问题	216
5	利用微分中值定理证明有	

关 的问题	218
6 综合题、杂题	223
4.2 求未定型的极限	226
4.2.1 内容提要	226
1 洛必达法则	226
2 函数在一点可导的充分条件	227
4.2.2 例题分析	229
1 用洛必达法则求未定型极限	229
2 如何求幂指函数的极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$	238
3 利用可导的充分条件考察函数在 一点的可导性	242
4.3 泰勒公式	248
4.3.1 内容提要	248
1 带有拉格朗日余项的泰勒公式	248
2 带有佩亚诺余项的泰勒公式	249
3 5 个初等函数的麦克劳林公式	249
4.3.2 例题分析	250
1 如何把函数在一点展成泰勒公式	250
2 利用泰勒公式确定无穷小量的阶数 ...	256
3 利用泰勒公式(佩氏余项)求未定型 极限	257
4 利用泰勒公式(拉氏余项)求函数 近似值,并估计误差	264
4.4 函数的研究及函数作图	267
4.4.1 内容提要	267
1 函数的增减性与函数的极值点	267
2 函数在一区间上的最大值和最小值 ...	268
3 曲线的凹凸性与曲线上的拐点	269

4	曲线的渐近线	270
4.4.2	例题分析.....	270
1	如何求函数的增减区间及极值点	270
2	如何求曲线的凹凸区间及拐点和渐 近线	273
3	如何作函数的图形	276
4	如何求函数在定义域上的最大值和最 小值	282
5	最大、最小值的应用问题.....	285
6	利用导数证明可导函数的单调性	289
7	利用导数确定函数零值点(或方程 的根).....	292
8	综合题、杂题.....	295
4.5	习题与答案	303
4.5.1	习题.....	303
4.5.2	答案.....	313
第5章	不定积分	320
5.1	简单的不定积分计算	320
5.1.1	内容提要.....	320
1	原函数与不定积分概念	320
2	基本积分表	320
3	不定积分基本性质	321
4	简单的变量代换法	321
5.1.2	例题分析.....	322
1	基本题分析	322
2	典型方法题分析	327
5.2	变量代换法与分部积分法	340
5.2.1	内容提要.....	340

1	变量代换法	340
2	分部积分法	340
5.2.2	例题分析.....	340
1	变量代换法	340
2	分部积分法	347
5.3	有理函数积分法	358
5.3.1	内容提要.....	358
1	有理函数概念	358
2	简单分式和它们的积分	359
3	有理既约真分式的积分	360
5.3.2	例题分析.....	360
5.4	三角函数有理式的积分	364
5.4.1	内容提要.....	364
1	定义	364
2	求三角函数有理式的积分的方法	365
2	例题分析.....	365
5.5	简单无理函数的积分	370
5.5.1	内容提要.....	370
5.5.2	例题分析.....	371
1	被积函数含有 $x, \frac{ax+b}{cx+d}$ 有理式 的积分	371
2	被积函数含有 x, ax^2+bx+c 有理式的积分	372
5.6	综合题、杂题.....	377
5.7	习题与答案	383
5.7.1	习题.....	383

5.7.2	答案.....	388
第6章	定积分.....	395
6.1	定积分的概念与性质	395
6.1.1	内容提要.....	395
1	积分和	395
2	定积分定义	395
3	定积分的几何意义	396
4	性质	396
5	定理	397
6.1.2	例题分析.....	397
1	有关定积分概念中的一些问题	397
2	不等式的证明	406
6.2	定积分计算	411
6.2.1	内容提要.....	411
1	变上限定积分	411
2	牛顿-莱布尼茨公式	412
3	变量代换法计算定积分	412
4	分部积分法计算定积分	412
5	计算技巧及公式	412
6.2.2	例题分析.....	413
1	概念题及简单的计算题	413
2	用定积分计算和式的极限	423
3	有关变上限定积分的例题	427
4	综合题、杂题.....	434
6.3	定积分应用	452
6.3.1	内容提要.....	452
1	用定积分解决实际问题的方法	452
2	常用的几个公式	453

6.3.2	例题分析.....	455
1	定积分的几何应用——平面图形的 面积与弧长	455
2	定积分的几何应用——体积	461
3	定积分的物理应用——动能、转动 惯量、引力、功及质心	467
6.4	广义积分	483
6.4.1	内容提要.....	483
1	积分区间为无穷的广义积分	483
2	被积函数有无穷型不连续点的 广义积分	484
3	收敛性判别法	485
6.4.2	例题分析.....	486
6.5	习题与答案	497
6.5.1	习题.....	497
6.5.2	答案.....	503
第 7 章	空间解析几何及矢量代数.....	507
7.1	空间直角坐标系 矢量代数	507
7.1.1	内容提要.....	507
1	空间直角坐标系的基本问题	507
2	矢量	507
3	矢量在轴上的投影,射形定理.....	508
4	矢量的坐标表达式	508
5	矢量的加、减法和数乘矢量.....	509
6	线性关系	510
7	矢量的数量积(点积)	510
8	矢量的矢量积(叉积)	510
9	三个矢量的积	511