大学数学辅导丛书

高等数学学习指导

(下 册)

主　编　孙法国

副主编　韦奉岐　王拉省

编　者　孙法国　韦奉岐　王拉省　马盈仓

　　　　成　涛　胡新利　王晓东　杨阿莉

主　审　文　容

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导/孙法国主编．—西安：西北工业大学出版社，2004．9

ISBN 7-5612-1830-3

Ⅰ．高…　Ⅱ．孙…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第082440号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路127号　　邮编：710072
电　　话：029-88493844　88491757
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：陕西友盛印务有限公司
开　　本：850 mm×1 168 mm　1/32
印　　张：9.75
字　　数：244千字
版　　次：2005年2月第1版　　2005年2月第1次印刷
定　　价：14.00元

前　言

高等数学是理工科院校的一门重要基础课。为帮助读者学好高等数学，我们根据多年的教学经验，在对教学大纲和课程内容进行深入研究和理解的基础上编写了本书。本书是理工科院校本科生学习高等数学的同步辅导资料，也可以作为研究生入学考试的参考资料。

本书按照同济大学数学教研室编的《高等数学》(第四版)的章节顺序，分为十二章，每章分为七个部分。

一、本章小结

二、释疑解难

三、典型例题分析

四、综合练习题

五、模拟检测题

六、综合练习题答案与提示

七、模拟检测题答案与提示

本书有以下几个特点：①对每章的内容及方法做了小结，理顺了各知识点之间的关系，并指出了重点及难点。②从释疑解难入手，分析概念，克服难点，抓住了学习高等数学的关键。③通过典型例题介绍方法，注重分析和一题多解，使读者掌握学习高等数学的方法。④精心设计综合练习题和模拟检测题，力求通过练与考使读者掌握考点并适应高等数学考试。⑤在附录部分提供了二套模拟检测题，以供读者检测学习效果。

本书第一、九章由韦奉岐编写，第二、十二章由胡新利编写，第

三、十一章由孙法国编写,第四章由王晓东编写,第五章由成涛编写,第六、八章由王拉省编写,第七、十章由杨阿莉、马盈仓编写,全书由孙法国统稿,文容审稿。

限于编者水平及撰稿时间仓促,若有疏漏之处,敬请读者批评指正,以便修改。

编　者

2004 年 7 月于西安

目　　录

第八章　多元函数微分法及其应用

一、本章小结

(一) 本章小结

1. 多元函数的极限与连续

(1) 二元函数的概念. 设 D 是平面点集, 如果对每个点 $P(x, y) \in D$, 变量 z 按照一定的法则总有确定的值和它对应, 则称 z 是变量 x, y(或点 P) 的二元数值函数, 记作

$$z = f(x, y) \quad 或 \quad z = f(P)$$

称 D 为该函数的定义域.

(2) 多元函数的概念. 设 D 是 n 维空间的点集, 如果对每个点 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D$, 变量 z 按照一定的法则总有确定的值和它对应, 则称 z 是变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$(或点 P) 的 n 元数值函数, 记作

$$z = f(x_1, \cdots, x_n) \quad 或 \quad z = f(P)$$

称 D 为该函数的定义域.

(3) 二元函数的极限:

① 二元函数的极限的定义. 设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 内有定义, $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点, 若 " $\varepsilon > 0$, v $\delta > 0$, 当 $0 < |PP_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ 时, 总有

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

成立, 则称二元函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 以 A 为极限, 记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A \quad \text{或} \quad \lim_{P\to P_0} f(x,y) = A$$

二元函数的极限也称二重极限.

注　二元函数极限的存在,等价于点 $P(x,y)$ 在 $f(x,y)$ 的定义域中以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,$f(x,y)$ 的极限都是 A,由此可知,如果 $P(x,y)$ 沿某两种特殊方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,$f(x,y)$ 的极限不相同,则 $\lim\limits_{P\to P_0} f(x,y)$ 不存在.

② 二元函数极限的运算. 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y) = B$,则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} [f(x,y) \pm g(x,y)] = A \pm B$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} kf(x,y) = kA$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} [f(x,y) \cdot g(x,y)] = AB$$

若 $B \neq 0$ 时, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{A}{B}$

(4) 二元函数的连续性:

① 二元函数的连续的定义. 设函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域 $U(P_0,\delta)$ 内有定义,若

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

则称二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续.

② 初等函数的连续性.二元初等函数在其定义区域内是连续的.

③ 闭区域上连续函数的性质:

有界性——若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,则 $f(x,y)$ 在 D 上有界,即存在 $M > 0$,使得 $|f(x,y)| \leq M \quad " (x,y) \in D$.

最值定理 —— 若 $f(x,y)$ **在有界闭区域** D **上连续,则** $f(x,y)$ **在** D **上达到最大值和最小值,即存在** $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2) \in D$,**使得**

$$f(x_1, y_1) = \max_{x \in D} f(x, y)$$

$$f(x_2, y_2) = \min_{x \in D} f(x, y)$$

介值定理 —— 若函数 $z = f(x,y)$ **在有界闭区域** D **上连续**, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2) \in D$,**并且** $f(x_1, y_1) < \mu < f(x_2, y_2)$,**则存在** $P_0(x_0, y_0) \in D$,**使得** $f(x_0, y_0) = \mu$.

一致连续性 —— 若 $f(x,y)$ **在有界闭区域** D **上连续,则** $f(x,y)$ **在** D **上一致连续**.

2. **偏导数与全微分**

(1) **偏导数定义. 设函数** $z = f(x,y)$ **在点**(x_0, y_0) **的某一邻域内有定义,如果**

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限为函数 $z = f(x,y)$ **在点**(x_0, y_0) **处对** x **的偏导数,记作**

$$\left.\frac{z}{x}\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}, \quad \left.\frac{f}{x}\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} \quad \text{或} \quad f_x'(x_0, y_0)$$

如果函数 $z = f(x,y)$ **在区域** D **内每一点**(x,y) **处对** x **的偏导数都存在,那么这个偏导数仍然是**(x,y) **的函数,它就称为函数** $z = f(x,y)$ **对自变量** x **的偏导函数,记作**$\frac{z}{x}$,**或** $f_x'(x,y)$. **类似地,可以定义函数** $z = f(x,y)$ **对自变量** y **的偏导函数,记作**$\frac{z}{y}$ **或** $f_y'(x,y)$.

(2) **偏导数几何意义. 二元函数** $z = f(x,y)$ **在点**(x_0, y_0) **的偏导数** $f_x'(x_0, y_0)$ **表示空间曲线**

$$\Gamma:\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$$

在点 $M(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处的切线对 x 轴的斜率 .

(3) 高阶偏导数. 设函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内具有偏导数

$$\frac{z}{x} = f_x'(x, y), \quad \frac{z}{y} = f_y'(x, y)$$

那么在 D 内 $f_x'(x, y)$, $f_y'(x, y)$ 都是(x, y) 的函数. 如果这两个函数的偏导数也存在,则称它们是函数 $z = f(x, y)$ 的二阶偏导数 .按照对变量求导次序的不同有下列四个二阶偏导数

$$\frac{}{x}\left(\frac{z}{x}\right) = \frac{{}^2 z}{x^2} = f_{xx}''(x, y)$$

$$\frac{}{y}\left(\frac{z}{y}\right) = \frac{{}^2 z}{y^2} = f_{yy}''(x, y)$$

$$\frac{}{y}\left(\frac{z}{x}\right) = \frac{{}^2 z}{x \quad y} = f_{xy}''(x, y)$$

$$\frac{}{x}\left(\frac{z}{y}\right) = \frac{{}^2 z}{y \quad x} = f_{yx}''(x, y)$$

其中后边两个偏导数称为混合偏导数 .

(4) 二阶混合偏导数相等的充分条件 . 如果函数的两个二阶混合偏导数$\frac{{}^2 z}{x \quad y}$ 及$\frac{{}^2 z}{y \quad x}$ 在区域 D 内连续,那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等,即

$$\frac{{}^2 z}{x \quad y} = \frac{{}^2 z}{y \quad x}$$

(5) 全微分的定义 .如果函数 $z = f(x, y)$ 在点(x, y) 的全增量

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

其中 A, B 不依赖于 $\Delta x, \Delta y$ 而仅与 x, y 有关, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分, 而 $A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 的全微分, 记做 $\mathrm{d}z$, 即 $\mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y$.

(6) 方向导数. 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某一邻域 $U(P_0, \delta)$ 内有定义, 自点 $P_0(x_0, y_0)$ 引射线 l, 设 x 轴正向到射线 l 的转角为 φ, 并设 $P'(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ 为 l 上的另一点, 且 $P'(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U(P_0, \delta)$, 我们考虑函数的增量 $f(x_0 + \Delta x, y + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ 与两点 P_0, P' 的距离 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ 的比值, 当 P' 沿着 l 趋于 P_0 时, 如果这个比值的极限存在, 则称此极限为函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处沿方向 l 的方向导数, 记作 $\frac{z}{l}$, 即

$$\frac{z}{l} = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\rho}$$

(7) 梯度. 设函数 $z = f(x, y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数, 则对于每一点 $P(x, y) \in D$, 都可定出一个向量

$$\frac{z}{x} i + \frac{z}{y} j$$

这向量称为函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的梯度, 记作 $\mathrm{grad}\, f$, 即

$$\mathrm{grad}\, f = \nabla f = \left\{ \frac{z}{x}, \frac{z}{y} \right\} = \frac{z}{x} i + \frac{z}{y} j$$

3. 二元函数可微、偏导数、方向导数、连续、极限之间的关系

(1) 可微　　连续　　极限存在.

(2) 可微　　偏导数存在, 且 $\mathrm{d}z = \frac{z}{x}\mathrm{d}x + \frac{z}{y}\mathrm{d}y$.

(3) 可微　　方向导数存在, 且 $\frac{z}{l} = \frac{z}{x}\cos\alpha + \frac{z}{y}\cos\beta = \mathrm{grad}\, f \cdot l$ (其中 $\cos\alpha, \cos\beta$ 为 l 的方向余弦).

(4) 偏导数连续　　全微分存在.

4. **多元复合函数的求导法则**

(1) **如果函数** $u = \varphi(t)$ **及** $v = \psi(t)$ **都在点** t **可导,函数** $z = f(u, v)$ **在对应点**(u, v) **具有连续偏导数,则复合函数** $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ **在点** t **可导,且其导函数可用下列公式计算**

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{8.1.1}$$

式(8.1.1) **称为全导数公式**.

(2) **如果** $u = \varphi(x, y)$ **及** $v = \psi(x, y)$ **都在点**(x, y) **具有对** x **及对** y **的偏导数,函数** $z = f(u, v)$ **在对应点**(u, v) **具有连续偏导数,则复合函数** $z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ **在点**(x, y) **的两个偏导数存在,且可用下列公式计算**

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned} \tag{8.1.2}$$

(3) **全微分形式不变性**. **设函数** $z = f(u, v)$ **具有连续偏导数,则全微分**

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v \tag{8.1.3}$$

如果 u, v **又是** x, y **的函数,即** $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$, **且这两个函数也具有连续偏导数,则复合函数** $z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ **的全微分为**

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y \tag{8.1.4}$$

将式(8.1.2) **代入式**(8.1.4) **整理得出式**(8.1.3), **由此可以看出,不管** u, v **是自变量还是中间变量,它的全微分形式是一样的 这个性质叫做全微分形式不变性**.

5. **隐函数的求导法**

(1) **设函数** $F(x, y)$ **在点** $P_0(x_0, y_0)$ **的某一邻域内具有连续**

的偏导数,且

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_y'(x_0, y_0) \neq 0 \tag{8.1.5}$$

则方程 $F(x, y) = 0$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某一邻域内恒能惟一确定一个单值连续且具有连续导数的函数 $y = f(x)$,它满足条件 $y_0 = f(x_0)$,并有$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x'}{F_y'}$.

(2) 设函数 $F(x, y, z)$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的某一邻域内具有连续的偏导数,且

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad F_z'(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

则方程 $F(x, y, z) = 0$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的某一邻域内恒能惟一确定一个单值连续且具有连续偏导数的函数 $z = f(x, y)$,它满足条件 $z_0 = f(x_0, y_0)$,并有

$$\frac{z}{x} = -\frac{F_x'}{F_z'}, \quad \frac{z}{y} = -\frac{F_y'}{F_z'}$$

(3) 设 $F(x, y, u, v)$, $G(x, y, u, v)$ 在点 $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数,又 $F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$, $G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$,且偏导数所组成的函数行列式(或称雅可比(Jacobi)行列式)

$$J = \frac{(F, G)}{(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{F}{u} & \frac{F}{v} \\ \frac{G}{u} & \frac{G}{v} \end{vmatrix}$$

在点 $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 不等于零,则方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

在点 $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 的某一邻域内恒能惟一确定一组单值连续且具有连续偏导数的函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$,它们满足条件 $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$,并有

$$\frac{u}{x} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} \frac{F}{x} & \frac{F}{v} \\ \frac{G}{x} & \frac{G}{v} \end{vmatrix} \qquad \frac{u}{y} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} \frac{F}{y} & \frac{F}{v} \\ \frac{G}{y} & \frac{G}{v} \end{vmatrix}$$

$$\frac{v}{x} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} \frac{F}{u} & \frac{F}{x} \\ \frac{G}{u} & \frac{G}{x} \end{vmatrix} \qquad \frac{v}{y} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} \frac{F}{u} & \frac{F}{y} \\ \frac{G}{u} & \frac{G}{y} \end{vmatrix}$$

6. **多元函数微分学的应用,微分法在几何上的应用**

(1) **空间曲线的切线与法平面**:

① **设空间曲线的参数方程为** $\Gamma:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ $t \in T$, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ **都是** t**的可微函数且** $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$,**则** Γ**在** M_0 **处的切向量为**

$$T = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$$

切线方程为

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$$

法平面方程为

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$$

② **曲线由一般方程给出 .设**

$$\Gamma:\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

若 $\left.\frac{(F, G)}{(y, z)}\right|_{M_0} \neq 0$,**并且满足隐含数存在定理的条件,且** $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$,**则** Γ **在** M_0 **处的切向量为**

$$T = \left.\left\{ \begin{vmatrix} F_y' & F_z' \\ G_y' & G_z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z' & F_x' \\ G_z' & G_x' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x' & F_y' \\ G_x' & G_y' \end{vmatrix} \right\}\right|_{M_0}$$

切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y' & F_z' \\ G_y' & G_z' \end{vmatrix}_{M_0}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F_z' & F_x' \\ G_z' & G_x' \end{vmatrix}_{M_0}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x' & F_y' \\ G_x' & G_y' \end{vmatrix}_{M_0}} \quad (8.1.6)$$

法平面方程为

$$(x-x_0)\begin{vmatrix} F_y' & F_z' \\ G_y' & G_z' \end{vmatrix}_{M_0} + (y-y_0)\begin{vmatrix} F_z' & F_x' \\ G_z' & G_x' \end{vmatrix}_{M_0} + (z-z_0)\begin{vmatrix} F_x' & F_y' \\ G_x' & G_y' \end{vmatrix}_{M_0} = 0 \quad (8.1.7)$$

(2) 空间曲面的切平面与法线:

① 曲面以一般方程给出.设 Σ: $F(x, y, z) = 0$, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$,则在 M_0 处的法向量为

$$n = \{F_x', F_y', F_z'\}\big|_{M_0}$$

切平面的方程为

$$F_x'(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + F_y'(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) + F_z'(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y'(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z'(x_0, y_0, z_0)}$$

② 曲面以显函数给出.设 Σ: $z = f(x, y)$, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$,则 Σ 在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的法向量为

$$n = \{f_x'(x_0, y_0), f_y'(x_0, y_0), -1\}$$

切平面方程为

$$z - z_0 = f_x'(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y-y_0)$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0, y_0)} = \frac{y-y_0}{f_y'(x_0, y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$$

7. 多元函数的极值

(1) 二元函数极值的定义.设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内有定义,对于该邻域内异于 $P_0(x_0, y_0)$ 的点 $P(x, y)$,总有 $f(x, y) < f(x_0, y_0)$(或 $f(x, y) > f(x_0, y_0)$)成立,则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处有极大(或极小)值,称点 $P_0(x_0, y_0)$ 为 $z = f(x, y)$ 的极大或极小值点.

(2) 二元函数极值的必要条件.设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处有极值,且在点 $P_0(x_0, y_0)$ 具有偏导数,则它在该点的偏导数必然为零,即

$$f_x'(x_0, y_0) = 0, \quad f_y'(x_0, y_0) = 0$$

(3) 二元函数极值的充分条件.设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内连续,且有一阶及二阶连续的偏导数,又

$$f_x'(x_0, y_0) = 0, \quad f_y'(x_0, y_0) = 0$$

令 $A = f_{xx}''(x_0, y_0)$, $B = f_{xy}''(x_0, y_0)$, $C = f_{yy}''(x_0, y_0)$,则

① 当 $AC - B^2 > 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 为极值,且当 $A > 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 为极小值,当 $A < 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 为极大值.

② 当 $AC - B^2 < 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 不是极值.

③ 当 $AC - B^2 = 0$ 时,是否为极值需进一步讨论.

(4) 二元函数在有界闭区域上的最值.二元函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 内连续可微,且有有限个驻点.

① 将 $z = f(x, y)$ 在 D 内所有驻点的函数值及在 D 的边界上的最大值和最小值进行比较,从而判断出 $z = f(x, y)$ 在 D 上的最值.

② 在实际问题中,如果根据问题的性质知函数 $f(x, y)$ 的最值一定在 D 的内部取得,而 $f(x, y)$ 在 D 内有惟一驻点 (x_0, y_0),则在该点处的函数值 $f(x, y)$ 必为 D 上的最值.

(5) 多元函数的条件极值.自变量受到某些条件限制的函数极值,称为条件极值.