

序 言

长期以来,我国高等学校各类非数学专业的数学基础课都限于以微积分为主要内容的“高等数学”。面临 21 世纪各门知识的相互渗透和自身加速更新的形势以及全面提高人才素质的需要,数学的作用将显得日益重要。而作为高等学校数学基础课的作用,除了作为各门学科的重要工具以外,它在提高人才全面素质中起着重要作用的培育理性思维和审美功能方面也应得到充分的重视。这就需要一部与之相适应的教材。

这套“大学数学”教材是在前国家教委“面向 21 世纪教学内容和课程体系改革”研究课题的支持下完成的,共有五本《一元微积分》、《多元微积分及其应用》、《代数与几何》、《随机数学》与《数学实验》。我们认为它们是 21 世纪高级人才应该普遍具备的数学基础,希望学生通过对它们的学习,能使他们在掌握数学工具、提高理性思维和审美素质以及获取新知识的能力诸方面打下一个良好的基础。这种要求应该对任何专业都一样,只是在深度上及侧重的方面可能会有些区别。

在现行的《高等数学》中,微积分和数学分析之间的关系一直是一个难以处理的问题。19 世纪以前的微积分,以它的直观性和不断扩展的应用显示了数学的威力,但同时暴露出其缺乏严格逻辑基础的缺点。诞生于 19 世纪的数学分析则以其逻辑的完美显示了数学的理性精神。这两个方面在教材中如果结合得好,可以激发初学者对数学的兴趣;但如果结合得不好,则很可能失去两者的活力而形成一堆枯燥的形式推理和繁琐的计算。在本书中我们力图按其本来的面目来编写,把一元微积分分为两部分:前一部分注重直观,着重训练应用和运算,后一部分则着重培育理性思维。

《多元微积分及其应用》的应用内容包括复变函数、微分几何及常微分方程。

《代数与几何》的代数部分基本上是线性代数,其内容也可分为两部分:一部分是以算法为主的求解一般线性方程组的内容;另一部分则主要研究线性空间及其上的线性映射。由于后者是前者的理论框架,而且它已成为近代数学普遍使用的基本语言,因此本书在集合、关系、运算、代数结构之后,较快地进入后者的讨论;并且通过数值表示把两者结合起来。

至于几何,尽管它在古希腊及 19 世纪有其辉煌的历史,在本世纪后半叶也进入了数学研究的主流行列,但近 50 年来,在我国高校的数学基础课中,却一直被压

缩到只剩下一点空间解析几何.这对培养学生的形象思维及理性思维的习惯极为不利.本书除了在多元微积分应用中加上古典微分几何基础(曲线和曲面)以外,在几何部分则增加了“仿射及射影几何”及非欧几何的两个初等模型.

本世纪后半叶以来,人们对事物认识演化的表现之一是从单纯的确定性思维模式进入确定—随机性模式.这一趋势还在发展,在高校数学教学中已受到广泛的关注.我们提出把《随机数学》正式列入基础课.本书内容的重点是通过几个典型范例的讨论,使学者学会描述与表达随机性及随机变化的过程,即集中于对随机模式认识的训练.

在这套系列教材中《数学实验》有其独特性.它的知识内容包含数值方法、统计计算和优化计算的基本概念和初等方法,其目的是为学生自己动手解决问题提供必要的数学知识和软件平台.这是一门以学生独立动手,教师起辅导作用的课程,这类课程的教材如何编写,本书只是一种尝试.

以上是这套教材的一个简要介绍.这套教材既是一个统一的整体,各部分之间又有相对的独立性,可以独立讲授.在内容方面,它包含了现行的高等数学、线性代数、复变函数、微分方程、微分几何、数值分析、概率统计、优化计算等课程最基本的内容,而总学时则大为减少.我们在清华大学几个班的试验表明:全部讲完上述内容所需的学时大约为340左右.除数学实验外,如果再减掉一些内容,280学时左右也是可以的,可由教师灵活掌握.

这套教材在有些大段落后面,附有一段“评注”,主要讲述这一段的重要思想和可能的发展,为有兴趣的学生进一步学习数学开一点小小的窗口.

大凡一本可用的教材,往往有两种写法:尽量多写一点,以便于教师选择;或尽量写少一点,以便于教师发挥.这套教材似乎偏于前者.原因是这是一个尝试,对习惯讲授传统“高等数学”的教师来说,对这套教材可能不太适应,也许需要多一些说明.

这套教材原有的基础是清华大学出版社1995年出版,萧树铁、居余马、葛严林等主编的三卷本《高等数学》.参与现在这套教材编写的有朱学贤、郑建华、章纪民、居余马、李海中、钱敏平、叶俊、姜启源、高立、何青等人.谭泽光、白峰杉、韩云瑞等同志为本书的编写作了大量的工作.高教出版社对本书的编写和出版始终给予热情的支持.

前面已说过,这套教材的编写是一个尝试.目的在于根据“百家争鸣”的精神,参与探索大学数学基础课在培养下一世纪高素质人才中所应起的作用,以及与之相适应的教材建设.我们衷心欢迎各方人士对这套教材评头论足,指出缺点和错误.如果这套教材能起到抛砖引玉的作用,我们就很满足了.

萧树铁

1999年6月

再版序言

提高大学数学教学质量的关键在于教师,但一套较好的教材也是重要的.随着我国大学数学教学内容改革的逐步深入,当前不少高等学校在基础数学教学内容的改革方面有了一些进展,例如单纯“面向专业”的观念有所淡化,代数课程的内容和学时有所增加,开设了一些新的课程,如“数学实验”和“随机数学”等,相应地有一批新教材出版.本套教材也在试用了两年多以后,进行了部分修订.这就是《大学数学》的第二版.

在保持原有的指导思想和风格的前提下,这一套教材由原来的五本《一元微积分》、《多元微积分及其应用》、《代数与几何》、《随机数学》及《数学实验》改编、扩充为七本,即《微积分(一)》、《微积分(二)》、《多元微积分及其应用》、《流形上的微积分》、《代数与几何》、《随机数学》及《数学实验》,其中《流形上的微积分》是新编入的,《随机数学》正在在修订中,《数学实验》这次还来不及修订.除了这三本以外,另外四本改编的大致情况如下:

《微积分(一)》以原来的《一元微积分》中的第一篇,即“直观基础上的微积分”为其主要内容,力求做到“返璞归真”.除了进一步强调了计算和应用之外,还增加了一些对“极限”的朴素描述.

《微积分(二)》是把原来《一元微积分》中的第二篇,即“理性微积分”的内容作一些修改而成.其中为了使读者能更好体会数学分析中的一些基本手法,对用阶梯函数逼近的办法来处理定积分(即函数集扩张的思想)又作了一些改进.

《多元微积分及其应用》是把原书加以适当精简而成.原书中“复变函数”部分重新改写以求突出重点和更加精练,原书的“微分几何”部分移到《代数与几何》.

以上三本教材的习题也都作了调整.

《代数与几何》内容的变动是适当精简了代数的内容,增加了“行列式的几何意义”;几何部分则增加了“微分几何”的基本内容.

《流形上的微积分》与前面三本微积分教材合在一起,就显示了微积分从古典一直到现代的基本面貌,而且也是一个理解当代数学和物理一个不可缺少的台阶.虽然目前它并不属于数学基础课的范围,但可供对此有兴趣的学生选修.此外,对从事微积分教学而在这方面有所欠缺的教师来讲,不妨顺便补

上这一课.

《代数与几何》中的几何部分包括了仿射、射影和微分几何,还有两个非欧几何的模型.它所需的学时不多(不超过 30 学时).这些内容的选取和写法是否合适,能在多大程度上体现数学理性思维和“数学美”,还有待进一步讨论.人们对大学数学课程中几何被严重削弱的缺陷已有共识,但又往往以“课内学时不够”或“没有用”等理由保留了这个缺陷.精简课内学时是必要的,内容的选取更可以讨论.希望有志于此的教师能先试开一些这方面的选修课,供大家来讨论.

这次内容的调整主要是为了增加这套教材的灵活性,不同的学校或专业在内容上可以有不同的选择:可以选择其中的某几本,或删去某些用小字写的部分.例如在清华,这套教材就初步适应了一个较为稳定的教学计划.即除了部分文科和艺术类专业以外,数学基础课的内容确定为:“微积分(一)”(3 学分);“微积分(二)”(3 学分);“多元微积分及其应用”(4 学分);“代数”(4 学分);“几何”(2 学分);“随机数学”(3 学分);“数学实验”(3 学分),其中 1 学分表示一个学期(实上课 15 周)上 15 节课(每节 45 分钟),另外适当安排少数课外习题课.这样数学基础课的总学时就是 330 学时,而其中被列为必修基础课的只有“微积分(一)”和“代数”两门.但实际上多数专业的学生几乎都选了大部分甚至全部数学基础课.

参加这一版改写工作的有朱学贤、郑建华、章纪民、华苏、居余马、萧树铁、李津、陈维恒等同志,谭泽光、白峰杉同志参加了讨论并提出很多好的意见.

编者于清华园

2002 年 10 月

第二版前言

本书第二版主要是考虑到目前国内非数学专业的大学数学课程中,各校有关“代数与几何”的课时相差较大,为了便于使用本教材的教师合理地取舍教材内容进行教学,我们把教材内容线性代数与空间解析几何部分分为三个档次:第一档次是不打*的节,这是教学的基本要求,其中有些用小字排印的内容可以不作为基本要求,例如,分块矩阵的初等变换,正交矩阵中的 $Q-R$ 分解, Hadamard 不等式等;第二档次是用大字排印的打*的节,例如, 2.6 子空间的交与和,直和, 2.9 正交子空间,正交补;第三档次是用小字排印的打*的节,例如, 7.2 二次曲线一般方程化为标准方程及其分类, 8.4 二次曲面的分类, 7.7 中的双线性函数, 1.4 中的序关系,偏序集,全序集,但其中的第二数学归纳法原理应作为教学基本要求,让学生有所了解并会用.这三个档次中的第二、三档次对课时少的学校都可以不作为教学的基本要求,仅供学有余力且有兴趣的学生课外自己阅读.

与第一版相比,我们对 1.10 基本代数结构——群、环、域的基本概念作了较大的修改,去掉了较多内容,只保留了最基本的概念,其中有些例子也用了小字.另外,增加了 n 阶行列式的几何意义(用小字排印,可不作基本要求).

与第一版相比,还有一个较大的变化是把多元微积分中的微分几何的基础知识——“空间曲线与空间曲面”安排为本书的第 9 章,主要的考虑是把大学数学中有关几何几门课(空间解析几何,微分几何,射影几何,非欧几何)的内容都集中在一起,以便于更好地安排教学.

本书第 1~8 章由居余马修订,第 9 章由萧树铁编写并修订,第 10~11 章由萧树铁、李海中修订.书稿最后由主编萧树铁教授审定.

编者于清华园
二〇〇二年十二月

前 言

多年来,我国高校非数学专业的数学基础课只有微积分以及为之服务的一点解析几何.80年代开始,由于计算机解题的需要,一些学校陆续增加了“线性代数”课.它的内容主要是行列式、线性方程组和矩阵运算.而对于线性代数的核心内容——线性空间及其上的线性映射则涉及很少.面对21世纪培养高素质人才的需要,这种数学基础课的结构是难以适应的.建立一个以微积分、代数、几何和随机数学为基本内容的数学基础课新体系的任务随着新世纪的来临就显得急迫了.教育部为此从1995年起就开始立项研究.本书就是在此背景下进行的一个尝试.

这本教材包含了代数和几何两部分.关于其内容,有以下几点考虑:

一、关于代数与几何内容的整体安排

把代数与几何合写成一本教材.这种做法可能会削弱几何的训练,但也可使代数与几何更好地结合,互相渗透,互相促进.代数为研究几何问题提供有效的方法;几何为抽象的代数结构和方法提供形象的几何模型和背景.基于这样的考虑,本书大致分为四个部分.

第一部分是第一章中阐述的基础知识——集合、关系、运算与映射及代数结构的基本概念.其重点是关系和运算,特别要让学生了解运算的对象是多种多样的,而不是局限于数的运算.这里讨论了:映射(是一种一元运算)的一般概念,集合运算,命题运算;几何向量的运算; n 元向量的线性运算及高斯消元法中的矩阵初等行运算.它们不仅拓宽了学生对“运算”概念的认识,而且也启发学生以后在探索新问题时善于把实际问题变为数学问题;同时也是学习本书必备的基础.关于群、环、域,重点是群的概念,这里主要是让学生初步了解从数学结构上区分各种数学问题的异同,知道近世代数主要是讨论各种代数结构的性质.

第二部分是由第二章至第五章所阐述的线性代数的基本内容——线性空间与内积空间、线性映射、矩阵和行列式.

第三部分是由第六章至第八章所组成,它们是线性代数与几何相结合的内容.线性方程组的解的理论与线性图形(平面与空间直线)的位置关系和度量关系,特征值与特征向量、正交变换、二次型与二次曲线、二次曲面的不变量及其分类.

第四部分是由第九章与第十章所介绍的“仿射与射影几何”及“非欧几何”的两个初等模型。

二、关于线性代数的内容和体系

线性代数的内容大致可分为两部分：一部分是以算法为主的求解线性方程组和矩阵运算（包括特征值与特征向量、矩阵的三种标准形及二次型），另一部分则主要是研究线性空间和内积空间的结构，以及有限维线性空间上的线性映射。由于后者是前者的理论框架，是线性代数的核心内容，而且它也是近代数学普遍使用的基本语言。为使学生较全面深入地掌握和理解线性代数，提高学习现代数学新知识的能力，我们认为必须加强线性空间和线性映射的教学，除了增加必要的课时，还要突出它们的核心地位。为此，我们没有采用国内现行线性代数教材的传统模式，而是直接从讨论线性空间的结构和研究线性映射入手，展开线性代数的内容。通过有限维线性空间的线性映射的数值表示，建立了线性映射与矩阵的对应关系，从而矩阵的基本运算的定义也由相应的线性映射的运算所确定；至于线性方程组的求解问题也对应于已知线性映射的像求完全原像（或核）的问题，矩阵的相似标准形问题也就是从线性映射在不同基下对应的矩阵构成的等价类中找一个最简单的代表元的问题。如此，线性空间和线性映射的概念就贯穿始终，起到了统领全局的核心作用。当然这样的课程体系，初学者在开始学习时会有些困难，感到抽象和不容易理解，但是只要教学得法，按照“从特殊到一般，从具体到抽象”的原则，从具体的模型、背景和实例抽象为一般的概念，学生还是不难接受的。学完整个课程，学生最终会较好和较深入地掌握线性代数的内容，能熟练使用线性空间和线性映射的语言，特别是一开始就接触公理化的定义和方法，对学生以后自学现代数学新知识是大有裨益的。

此外，我们在第六至第八章中还尽量把代数与几何有机地结合起来，例如，特征值的概念是由二次曲线在正交变换下的不变量引出来的，然后再利用特征值与特征向量的概念研究一般的二次型，把二次曲面的一般方程化为标准方程，并对二次曲面作正交分类。

关于行列式，我们也采用了公理化的定义，也就是把 n 阶行列式定义为 n 重反对称线性函数，这样定义不仅方便快捷，而且与全书的风格协调，同时证明行列式的一些重要性质（如 $|\det A| = |\det A^T|$ 、行列式按一列（行）的展开定理、 $|AB| = |A||B|$ 等）时，充分利用了矩阵的工具，使证明更为简明。

三、关于几何，除上述内容外我们还选择了“仿射与射影几何”、“非欧几何简介”。目的是加深读者对“形”的理解和认识。

在仿射几何中，研究了仿射变换下的不变性质（如共线性、平行性）和不变量（如简单比），对二次曲线作了更简单的仿射分类。

在射影几何中,我们把欧氏(仿射)平面扩大为射影平面,引进齐次坐标来研究射影平面上的几何问题,研究了对偶原理和射影变换下的不变量(交比),并对二次曲线作了射影分类.

在非欧几何简介中,我们介绍了非欧几何中两个典型的模型.椭圆几何的球面模型和双曲几何的庞加莱模型.它们除了有重要的应用价值外,还希望能通过对这种人类重要文化遗产的认识,培养学生的理性和审美意识.

使用本教材所需课时大约在 80 左右,如果课时少,可根据实际情况适当取舍内容.

本教材的编写工作是在萧树铁教授领导下进行的,第 1~8 章由居余马、第 10~11 章由李海中编写,书稿最后经萧教授审定,高教出版社胡乃敞同志对本书的出版作了认真仔细的编辑工作,对此我们深表感谢.

更新非数学专业的数学基础课的课程体系和教学内容的工作是十分艰巨的,在代数部分我们虽然已经历了九年的教学实践,但探索仍是初步的,缺陷和不妥之处在所难免,恳请同行专家和读者赐教和指正.

编者于清华园
一九九九年九月

目 录

第 1 章 集合 关系 运算 结构.....	(1)
1.1 集合 子集 幂集 直积	(1)
1.2 二元关系及其性质	(3)
1.3 等价关系 等价类 商集	(4)
1.4* 序关系 偏序集 全序集 数学归纳法原理	(6)
1.5 运算与映射	(7)
1.6 命题运算 量词	(13)
1.7 几何向量的运算 空间直角坐标系	(17)
1.8 n 元向量的线性运算 高斯消元法	(28)
1.9 平面方程与空间直线方程.....	(36)
1.10 基本代数结构——群、环、域的基本概念	(41)
习题	(46)
第 2 章 线性空间 内积空间	(58)
2.1 线性空间的定义及其简单性质.....	(58)
2.2 线性子空间.....	(62)
2.3 线性相关性.....	(65)
2.4 有限维线性空间的基和维数 向量组的秩	(69)
2.5 向量的坐标.....	(72)
2.6* 子空间的交与和 直和	(74)
2.7 内积空间.....	(77)
2.8 欧氏空间的单位正交基.....	(80)
2.9* 正交子空间 正交补	(82)
附录 双重连加号 $\sum\sum$ 连乘号 \prod	(84)
习题	(85)
第 3 章 线性映射	(95)
3.1 线性映射的定义及例.....	(95)
3.2 线性映射的像和核	(101)
3.3 线性映射的运算 空间 $L(V_1, V_2)$	(103)
3.4 有限维线性空间的线性映射 线性映射的秩.....	(104)
3.5 线性空间的同构	(109)
习题.....	(113)
第 4 章 矩阵.....	(119)
4.1 矩阵的定义	(119)

4.2	线性映射的矩阵表示	(120)
4.3	矩阵的加法与数量乘法	(122)
4.4	矩阵的乘法	(124)
4.5	可逆矩阵	(129)
4.6	矩阵的转置	(133)
4.7	矩阵的初等变换和初等矩阵	(135)
4.8	矩阵的秩 相抵标准形	(139)
4.9	分块矩阵	(144)
4.10	基的变换矩阵与坐标变换	(150)
	习题	(153)
第 5 章	行列式	(167)
5.1	n 阶行列式的定义	(168)
5.2	行列式按一列(行)的展开式	(174)
5.3	方阵乘积的行列式	(181)
5.4	Cramer 法则	(184)
	习题	(188)
第 6 章	线性方程组与线性几何	(193)
6.1	齐次线性方程组	(193)
6.2	非齐次线性方程组	(196)
6.3	线性图形的几何问题	(201)
	习题	(209)
第 7 章	特征值与特征向量 矩阵的标准形	(216)
7.1	正交变换与正交矩阵	(216)
7.2*	二次曲线一般方程化为标准方程及其分类	(222)
7.3	线性变换在不同基下的矩阵表示 相似矩阵	(231)
7.4	特征值与特征向量	(234)
7.5	可对角化的条件 相似标准形	(241)
7.6	实对称矩阵的对角化	(247)
7.7	双线性函数* 二次型	(252)
7.8	实二次型的标准形 实对称矩阵的相合标准形	(255)
7.9	正定二次型与正定矩阵 其它有定二次型	(263)
	习题	(269)
第 8 章	常见曲面及二次曲面的分类	(283)
8.1	球面 柱面 锥面 旋转面	(283)
8.2	空间曲线的方程	(291)

8.3	二次曲面	(292)
8.4*	二次曲面的分类	(298)
	习题.....	(305)
第9章	空间曲线与空间曲面.....	(309)
9.1	向量函数及其微积分	(309)
9.2	曲线的弧长和弗雷耐标架	(315)
9.3	曲线的曲率 挠率 弗雷耐公式	(323)
9.4	特殊的空间曲线	(331)
9.5	曲面的表示 切平面 参数变换	(332)
9.6	曲面的第一基本形式	(338)
9.7	曲面上曲线的法曲率 曲面的第二基本形式.....	(341)
	习题.....	(352)
第10章	平面正交变换 仿射变换 射影变换	(360)
10.1	平面正交变换.....	(360)
10.2	平面的仿射变换.....	(362)
10.3	射影平面与齐次坐标.....	(365)
10.4	射影映射和射影变换.....	(379)
	习题.....	(383)
第11章	非欧几何学简介	(387)
11.1	球面几何.....	(387)
11.2	双曲几何的庞加莱模型.....	(393)
	索引.....	(398)

第 1 章 集合 关系 运算 结构

中学数学主要是讨论数的运算、几何图形的性质以及相应的各种数量关系和图形关系,而现代数学的领域非常广阔,客观世界众多的实际问题可以抽象为各种数学问题,并采用不同的数学方法加以解决.所以就整个数学而言,它研究的是各种各样可以表述为数学概念的事物所组成的各类集合,以及同一集合或不同集合中元素间的各种数学关系(运算或变换)和相应的数学结构.因此,我们将在本章介绍大学数学的一些基础知识,首先简要地叙述“集合”的一些基本概念,然后给出“二元关系”、“运算”和“映射”的概念,其中重点是“关系”(主要是等价关系)、“运算”和“映射”,特别是要列举很多例子让读者了解运算的对象非常广泛,而不只局限于“数”.这里读者不仅要掌握“命题运算”、“几何向量的运算”及“高斯消元法中的 n 元向量或矩阵运算”的一些具体内容,而且要从中得到启发,十分重视如何根据实际问题的需要抽象出数学问题,把某些“操作”定义为运算,并在以后的学习中自觉培养这方面的能力.本章最后介绍基本的代数结构——群、环、域的基本概念,让读者初步了解从数学结构上区分各种数学问题的异同.

1.1 集合 子集 幂集 直积

集合是数学的最基本的一个概念,它不能用更简单的概念来定义,而只能对它作些解释.所谓集合(简称集)是指由一些确定的对象(或事物)汇集成的整体,其中每个对象叫集合的元素(简称元).通常用大写字母 A, B, X, Y 等表示集合,用小写字母 a, b, x, y 等表示集的元素.如果元 a 在集 A 中,就说“ a 属于 A ”,记作“ $a \in A$ ”;否则就说“ a 不属于 A ”,记作“ $a \notin A$ ”.

全体自然数、整数、有理数、实数、复数分别组成的集合,依次记作 $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$;全体正整数 $1, 2, \dots, m, \dots$ 组成的集合记作 \mathbf{N}^* .

表述集合的方式:一种是穷举法,即列出集中全部元素;另一种是描述法,即用集中全部元素所具有的特性来表述集合.例如:

$$A = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\} = \{x \mid x^2 - 2 = 0, x \in \mathbf{R}\},$$

其中前者是穷举法,后者是描述法.

$$M = \{(x, y) \mid x - 2y = 1; x, y \in \mathbf{R}\}$$

是用描述法表述直线 $x - 2y = 1$ 上的所有点组成的集合.

含有有限个元素的集合叫有限集, 含无穷多个元素的集合叫无限集, 不含任何元素的集合叫空集, 记作 \emptyset , 例如,

$$\{x \mid x^2 + 1 = 0; x \in \mathbf{R}\}$$

是一个空集. 把空集也看作集合是必要的, 正如把 0 也看作数一样.

定义 1.1 设 A, B 是两个集合, 如果 A, B 含的元素全相同, 就说 A, B 相等, 记作 $A = B$; 如果对任意的 $a \in A$ 均有 $a \in B$, 则称 A 是 B 的子集, 或者说 A 含于 B , B 包含 A , 记作 $A \subset B$.

对任意的集合 A 均有 $\emptyset \subset A, A \subset A$.

显然, 集合 A, B 相等, 当且仅当 $A \subset B$ 与 $B \subset A$ 同时成立.

定义 1.2 非空集合 A 的所有子集组成的集合称为 A 的幂集, 记作: $P(A)$ 或 2^A .

若集 A 含有 n 个不同元素, 则其幂集 $P(A)$ 含有 2^n 个不同元素. 例如集合 $A = \{a, b, c\}$ 的幂集

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}.$$

我们把非空集 A, B 的任一对有次序的元素 $x \in A, y \in B$ 叫有序二元组(或称序偶), 记作 (x, y) , 并称 x 为第一元素, y 为第二元素. 序偶中的两个元素也可属于同一集合(即 $A = B$). 两个序偶 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 相等, 当且仅当 $x_1 = x_2, y_1 = y_2$. 由集合 A, B 中所有元素构成的序偶组成的集合, 叫做集合 A 和 B 的笛卡儿乘积(或称直积), 即

定义 1.3 设 A, B 是两个非空集, 我们把集合

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

称为 A 和 B 的笛卡儿乘积(或称直积).

特别, 当 $B = A$ 时, $A \times A$ (也常记作 A^2) 是 A 中一切元素所作成的序偶集合. 例如, $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 可表示平面直角坐标系中全部点的坐标的集合.

定义 1.4 设 A, B 是两个集合, 我们把集合

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$$

分别叫做 A 和 B 的交集, A 和 B 的并集, B 在 A 中的余集. 余集也可记作 $C_A B$ 或 $A - B$, 称 $A - B$ 为 A 与 B 的差集.

如果 $B \in P(X)$, 即 $B \subset X$, 则 B 在 X 中的余集 $X \setminus B$ 常记作 \bar{B} .

1.2 二元关系及其性质

对于集中的元素,我们要研究它们相互间具有的各种关系.例如:在数集中比较数的大小,有 \leq 、 $=$ 、 $<$ 等关系;在直线集中,直线间有平行、垂直、相交等关系;在三角形集中,相似、全等是两种基本关系;在人口集中,人们之间有性别、国籍、肤色相同或不不同的关系;在电路的节点集和支路集中,节点与支路间有关联或不关联的关系.由这些例子可见,一个集合或不同集合中,两个元素间的“关系”是由某种特性或规则来描述的.

定义 1.5 设 X 是一个集合, R 是涉及两个元素的一个规则,如果对于 X 中的任两个元素 a, b 均可确定它们是适合 R (记作 aRb) 或不适合 R (记作 $a\bar{R}b$) 就称 R 是集 X 中的一个二元关系.

如果把 aRb 用序偶 (a, b) 表示,那末集 X 中所有适合关系 R 的元素组组成的集合是 $X \times X$ 的一个子集.因此,我们也可把 $X \times X$ 的一个子集 R 定义为集 X 中的一个二元关系.更一般,我们把 $X \times Y$ 的一个子集 R 定义为集 X 与 Y 间的一个二元关系.

下面讨论二元关系的一些基本性质.

定义 1.6 设 R 是集 X 中的一个二元关系,如果

- (1) 对任意的 $a \in X$ 均有 aRa , 则称 R 是自反的(或称反身的);
- (2) 对任意的 $a, b \in X$ 若有 aRb 就有 bRa , 则称 R 是对称的;
- (3) 对任意的 $a, b \in X$, 由 aRb 和 bRa , 可推出 $a = b$, 则称 R 是反对称的;

- (4) 对任意的 $a, b, c \in X$ 若有 aRb 和 bRc , 就有 aRc , 则称 R 是传递的.

关系 R 是自反的、对称的、反对称的和传递的,也常说成 R 具有自反性、对称性、反对称性和传递性.

例 在实数集中,小于($<$)关系具有传递性;小于或等于(\leq)关系具有自反性、反对称性和传递性.

在正整数集中,如果 aRb 表示 $a \mid b$ (即 a 整除 $b, b/a \in \mathbf{N}^*$) 则 R 具有自反性、反对称性和传递性.

在三角形集中,三角形的相似关系 R 具有自反性、对称性和传递性.在平面直线集中,直线的平行关系 R 也具有自反性、对称性和传递性;而直线的垂直关系 R 只有对称性.在平面的点集中,点在某固定直线上投影相同的关系 R 具有自反性、对称性和传递性.

在集 X 的幂集 $P(X)$ 中, 集合的包含关系“ \subset ”是自反的、反对称的和传递的.

在由世界各国组成的集合中, 国家间有共同陆地边界的关系是自反和对称的.

在人口集合中, 父子关系 R (即 aRb 表示 a 是 b 的父亲) 显然没有自反性、对称性和传递性.

1.3 等价关系 等价类 商集

集合中的等价关系是把集合中元素分类的一种二元关系. 要把集合中元素分类, 自然会提出一个问题——什么叫做两个元素“相同”(或“相等”; “一样”)呢? 事实上天下没有完全不能区别的两个事物, 因此, 所谓两个元素“相同”通常只是指它们具有某种共性, 或者说在某种意义下是“相同”的. 例如: 在动物世界里从动物的性质来看, “人类”中的每个人都是“相同”的; 如果在人类中只考虑人的肤色, 则所有黄种人都“相同”; 如果只考虑人的性别, 则男人都“相同”. 如果对正整数只考虑能否被 2 整除, 则偶数都“相同”; 如果对平面上由直线围成的封闭图形只考虑图形的顶点数, 则所有三角形都“相同”, 如此等等. 这样, 我们就可把两个元素“相同”也看成一种“关系”, 这种“关系”当然有别于其它二元关系. 下面的定义刻画了表示两个元素“相同”这个关系的特点.

定义 1.7 (等价关系) 集合 X 中的一个二元关系 R 称为等价关系, 如果 R 是自反的、对称的和传递的.

例如: 数的相等关系、直线的平行关系、三角形的相似关系、多边形的顶点数相等的关系、人口集合中肤色相同或性别相同的关系、平面点集的点在固定直线上投影相同的关系都是等价关系. 再看一个例子:

设 $a, b \in \mathbf{Z}$, 规定 aRb 为“ a, b 模 n 同余”(记作: $a \equiv b \pmod{n}$), 即 a, b 分别被固定的正整数 n 相除后, 其余数为相同的非负整数 r ($0 \leq r < n$). 整数集 \mathbf{Z} 的这个二元关系 R 是 \mathbf{Z} 的一个等价关系. 因为: (1) 对任意的 $a \in \mathbf{Z}$, 均有 $a \equiv a \pmod{n}$; (2) 若 $a \equiv b \pmod{n}$, 则 $b \equiv a \pmod{n}$; (3) 若 $a \equiv b \pmod{n}, b \equiv c \pmod{n}$, 则必有 $a \equiv c \pmod{n}$.

此例如取 $n = 3$, 容易看出 \mathbf{Z} 的模 3 同余关系 R 把 \mathbf{Z} 划分为三个互不相交的子集:

$$\bar{0} = \{3k \mid k \in \mathbf{Z}\},$$

$$\bar{1} = \{3k + 1 \mid k \in \mathbf{Z}\},$$

$$\bar{2} = \{3k + 2 \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

它们分别是 \mathbf{Z} 中模 3 余 0, 模 3 余 1, 模 3 余 2 的所有整数组成的子集. 显然任一整数都属于且仅属于上述某一子集. 这表明模 3 同余关系把全体整数分成上述三类.

要把集合中的元素按某种意义分类, 自然要求不漏分任何一个元素, 也不会把任何一个元素分在两个不同类之中. 下面两个定理表明, 集合的等价关系可把集合的元素分类.

定义 1.8 (元素的等价和等价类) 设 R 是集 X 中的一个等价关系, $a, b \in X$, 如果 aRb , 则称 a, b 关于 R 是等价的, 并把所有与 a 等价的元素集合

$$\bar{a} = \{x \mid xRa, x \in X\}$$

称为 a 关于 R 的等价类(简称 a 的等价类).

定理 1.1 设 R 是集 X 中的一个等价关系, $a, b \in X$, 则 $\bar{a} = \bar{b}$ 当且仅当 aRb .

证 若 $\bar{a} = \bar{b}$, 则由 $a \in \bar{a} = \bar{b}$ 得 aRb ; 反之, 若 aRb , 则对任意的 $x \in \bar{a}$, 即 xRa , 由传递性得 xRb , 即 $x \in \bar{b}$, 故 $\bar{a} \subset \bar{b}$; 同理可证 $\bar{b} \subset \bar{a}$, 因此 $\bar{a} = \bar{b}$.

通常我们把 a 称为 \bar{a} 的代表元. 由定理 1.1 可见, \bar{a} 中任一元素 b 均可作为 \bar{a} 的代表元.

推论 若 R 是集 X 中的等价关系, 则对任意的 $a, b \in X$, 只能是 $\bar{a} = \bar{b}$ 或 $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$.

证 设 $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$, 则存在 $x \in \bar{a} \cap \bar{b}$, 于是有 xRa 和 xRb , 再由 R 的对称性得 aRx , 由 R 的传递性得 aRb , 从而 $\bar{a} = \bar{b}$.

定理 1.2 若 R 是集 X 中的一个等价关系, 则 X 中存在关于 R 的一族互不相交的等价类

$$\{\bar{a}_i \mid a_i \in X, i \in I\}$$

(其中 I 是所有等价类的代表元 a_i 的下标 i 组成的指标集), 使得 $X = \bigcup_{i \in I} \bar{a}_i$.

证 由于对任意的 a 均有 $a \in \bar{a}$, 所以显然有 $X = \bigcup_{a \in X} \bar{a}$. 根据定理 1.1 的推论, 这个式子右边的任意两个等价类不是相等就是互不相交, 因此, 取 $\bar{a}_i (a_i \in X)$ 中所有互不相交的 $\bar{a}_i (i \in I)$, 其并集就等于 X .

定理 1.2 表明, 集 X 可按等价关系 R 划分为一族等价类, 使 X 中任一元素必属于唯一的一个等价类.

例如,正整数集按模 2 同余关系分为奇数和偶数两个等价类,整数集按模 n 同余关系分为 n 个等价类 $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}$; 人口集合按性别关系分为男女两个等价类.

定义 1.9* 以集 X 的等价关系 R 来划分的所有等价类作为元素所组成的集合,称为 X 关于 R 的商集,记作 X/R .

例 整数集 Z 关于模 n 同余关系 R 的商集

$$Z/R = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}.$$

平面直线集 L 关于直线平行关系 R 的商集

$$L/R = \{\bar{l} \mid l \text{ 为过某个定点的直线}\}.$$

设 M 为清华大学学生集,规定 aRb 为 a 与 b 是同班学生,则

$$M/R = \{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

其中 x_i 是第 i 班全体学生的集合, m 为清华大学学生班的总数.

1.4* 序关系 偏序集 全序集 数学归纳法原理

序关系是对集合元素排序的一种二元关系.集合的元素可按大小、先后、重要性等原则排序,它们的共同特性反映在下面两个定义中.

定义 1.10 集 X 中的一个二元关系 R 称为偏序关系,如果 R 具有自反性、反对称性和传递性.

偏序关系 R 常记作 $<$, $a < b$ 读作“ a 小于或等于 b ”,具有偏序关系 $<$ 的集 X 称为偏序集,记作 $(X, <)$.

例 实数集中的 \leq 关系,幂集 $P(X)$ 中的 \subset 关系,正整数集 N^* 中的整除关系“ $|$ ”,都是偏序关系.

在一个集合中,可以定义不同的偏序关系.对于数集

$$A = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 30\},$$

虽然 (A, \leq) 和 $(A, \text{整除})$ 都是偏序集,但二者有所不同.对于 \leq 而言, A 中任两个元素 a, b 都有 $a \leq b$ 或 $b \leq a$. 因此 A 中全部元素可按 \leq 排序,即

$$1 \leq 2 \leq 3 \leq 5 \leq 6 \leq 8 \leq 10 \leq 30.$$

而对整除关系来说, A 中任两个元素未必有 $a|b$ 或者 $b|a$ 的关系,因此, A 只有某些子集的元素可按整除关系排序.例如 A 的子集

$$A_1 = \{1, 2, 6, 30\}.$$

对整除关系有

$$1|2, 2|6, 6|30.$$

此外,由自反性和传递性还可得其它一些整除的情况. www.ertongbook.com