普通高等教育“十五”国家级规划教材
大学数学系列教材

大 学 数 学

（三）

湖南大学数学与计量经济学院组编
主 编 刘楚中 曹定华

高等教育出版社

责任编辑　胡乃
封面设计　刘晓翔
责任绘图　尹文军
版式设计　马静如
责任校对　俞声佳
责任印制

内容简介

本书是

量积分、向量函数及其应用、傅立叶级数、积分变换、偏微分方程等。各节后配有适量的习题，书末附有习题答案。

本书结构严谨、内容丰富、条理清楚、重点突出、难点分散、例题较多，且在内容取舍上既充分注重了传统的知识内容，又加强了现代数学内容介绍，并较好地处理了有关的知识块之间的关系，避免了不必要的重复，使之有机地融合在一起。

本书可作为大学非数学类理工科本科生数学教材，也适合各类需要提高数学素质和能力的人员使用。

图书在版编目(CIP)

大学数学 .

教育出版社，2003.1

ISBN 7 - 04 - 011688 - X

Ⅰ.

等学校 - 教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010 - 64014048		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷			
开　　本	787×960　1/16	版　　次	年　月第　版
印　　张	25.75	印　　次	年　月第　次印刷
字　　数	480 000	定　　价	26.90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换 .

大 学 数 学 系 列 教 材

湖南大学数学与计量经济学院组编
总主编　刘楚中　副总主编　黄立宏

主编　刘陶文　彭亚新

前　　言

本系列教材是国家教育部“新世纪高等教育教学改革工程”本科教育教学改革项目的研究成果之一，是湖南大学自 1989 年以来非数学类理工科各专业数学课程教学与教材改革有关成果的延续。

本系列教材对非数学类理工科数学课程所授知识进行了重新分块，进一步理顺了非数学类理工科数学各门课程之间的关系和内涵。在内容叙述与介绍中以物理、力学和工程中的数学模型为背景，辅以代数结构，注意内容间的有机结合，避免不必要的重复；注意连续和离散的关系，加强函数的离散化处理；内容展开注重由浅入深、由特殊到一般，给学生一个完整的知识体系，并注重培养学生研究问题和解决实际问题的能力；采用近代数学观点和数学思想方法，以集合、向量及映射贯穿全书，加强了近代数学思想方法和数学实践的内容，为学生今后学习近代数学知识奠定了良好的基础，使之更符合新世纪培养高素质人才的要求。在教材编写中特别注重教育观念、教学内容和教学模式的更新，注重对学生数学素质、计算及应用能力、创新意识和工程意识的培养。教材编写以培养学生的良好数学素质为主要目标，同时为适应近年来随经济发展出现的专业调整和专业知识更新，为在教育教学改革中已调整、拓宽的各专业服务，本系列教材还适当地开设了一些有关的现代数学的知识窗口，以拓宽学生知识面，使教材具有较宽的口径和较大的适应性。本系列教材中，概念、定理及理论叙述准确、精炼，符号使用标准、规范，知识点突出，难点分散，证明和计算过程均着重体现近代数学思想方法，例题、习题等均经过精选，具有代表性和启发性。本系列教材适合大学非数学类理工科本科生，以及各类需要提高数学素质和能力的人员使用。本系列教材中难免会有不妥之处，希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见。

本系列教材包括

分方程等)

微积分、向量分析、场论、积分变换、偏微分方程等)

率论、数理统计等)

等)

宏任副总主编。本册

人员有：杨冬莲、李建平、刘开宇、彭亚新、历亚、朱郁森。

本系列教材编写得到湖南大学教务处的大力支持，在此表示衷心感谢。

湖南大学

2002 年 2 月

目　　录

第一章　多元函数微分学

在自然科学和社会科学中所遇到的问题往往是复杂的，是由多方面因素确定的．这类问题反映到数学上就是一个变量与多个变量间的关系问题．例如，在研究自然现象时，总离不开空间和时间，描述空间 $\mathbf{R}^3$ 就要用到 x、y、z 三个变量，再加上时间 t 就有四个变量了．有些物理问题和工程问题还需要考虑更多个变量．我们在

所学习的一元函数及其微积分理论已不能解决这些问题了，必须以一元微积分理论为基础，进一步研究有关多个变量的函数及其微积分理论．

第一节　多元函数的概念

一、区域

1．n 维空间

在《大学数学

运算性质．我们称有序实数组 $x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$\{ x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R},\ i = 1, 2, \cdots, n\}$$

为 n 维空间，记为 $\mathbf{R}^n$，其中的任意一个元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $\mathbf{R}^n$ 中的一个点，记为 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ X $x_1, x_2, \cdots, x_n)$ x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$

X 的第 i 个坐标．与二维空间 $\mathbf{R}^2$ 和三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中一样，在空间 $\mathbf{R}^n$ 中点 X $x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $\overline{OX} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$

引起混淆时，将 $\mathbf{R}^n$ 中的向量和点均记为 X 或 $x_1, x_2, \cdots, x_n)$ X，X $x_1, x_2, \cdots, x_n)$或 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $\mathbf{R}^n$ 中的一个向量，称 x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ X 的第 i 个分量．

从向量的角度，我们给出如下定义：

设 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$

(1) $X = Y$ $x_i = y_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$

(2) **加法**　$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$

(3) **数乘**　$\forall \lambda \in \mathbf{R}$，$\lambda X = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n)$

(4) **内积**　$X \cdot Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$;

(5) **模**　$\| X \| = \quad X \cdot X = \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

容易验证向量 X **的模** $\| X \|$ **满足**:

1) $\| X \| \geq 0$，且 $\| X \| = 0 \quad X = 0$，即 $x_i = 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$

2) $\| \lambda X \| = |\lambda| \, \| X \|$，$\lambda \in \mathbf{R}$;

3) $\| X + Y \| \leq \| X \| + \| Y \|$，$\forall X, Y \in \mathbf{R}^n$.

空间 $\mathbf{R}^n$ **中任意两点** $X \quad x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad X_0\ (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ **为**

$$d \quad X, X_0) = \| X - X_0 \| = \quad \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2 .$$

于是向量 X **的模** $\| X \|$ **就是点** X **与坐标原点** $O \quad 0, 0, \cdots, 0) \qquad d \quad X, O)$

向量 $I_1 = \quad 1, 0, 0, \cdots, 0) \quad I_2 = \quad 0, 1, 0, \cdots, 0) \quad \cdots, I_n = \quad 0, 0, 0, \cdots, 1)$

为 $\mathbf{R}^n$ **的基本单位向量**，$\| I_i \| = 1\ (i = 1, 2, \cdots, n)$

可知: $\forall X = \quad x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$，**有** $X = \sum_{i=1}^{n} x_i I_i$.

2. 开集、连通集

设点 $X_0\ (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \quad \mathbf{R}^n$，$\delta > 0$，**称集合**

$$U \quad X_0, \delta) = \{ X \mid X \in \mathbf{R}^n, d \quad X, X_0) < \delta \}$$

为点 X_0 **的一个以** δ **为半径的邻域**，**简称为点** X_0 **的** δ **邻域**，**点** X_0 **为该邻域的中心**；**集合**

$$\mathring{U} \quad X_0, \delta) = \{ X \mid X \in \mathbf{R}^n, 0 < d \quad X, X_0) < \delta \}$$

称为点 X_0 **的一个以** δ **为半径的去心邻域**，**简称为点** X_0 **的去心** δ **邻域**，**点** X_0 **为邻域的中心**．**若不关注邻域的半径**，**则通常分别用** $U \quad X_0) \quad \mathring{U} \quad X_0)$

X_0 **的某邻域和某去心邻域**．

在 $\mathbf{R}^2$ **上**，**点** $X_0 = (x_0, y_0) \quad \delta$ **邻域是一个以** X_0 **为圆心**，δ **为半径的圆的内部**　　$\mathbf{R}^3$ **中**，**点** $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \quad \delta$ **邻域是一个以** X_0 **为球心**，δ **为半径的球的内部**　　$\mathbf{R}^n$ **中**，**点** $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ **的** δ

邻域是一个以 X_0 为中心，δ 为半径的“球”的内部[1]（不包含“球面”）

有了邻域的概念，我们可借助它来描述点 X_0 与点集 E 之间的关系 .

定义 1　设 $X_0 \in \mathbf{R}^n$，E　$\mathbf{R}^n$.

(1) 若v　$\delta > 0$，使 U　$X_0, \delta)$　E，则称点 X_0 为集 E 的内点 .

若v　$\delta > 0$，使 U　$X_0, \delta) \cap E =$　，则称点 X_0 为集 E 的外点 .

集 E 的所有内点构成的集合称为 E 的内部 . 集 E 的所有外点构成 E 的外部 .

(2) 若" $\delta > 0$，在 U　$X_0, \delta)$　　　　　E 的点，又有不属于 E 的点，则称点 X_0 为集 E 的边界点 .

集 E 的边界点可能属于集 E，也可能不属于集 E . 集 E 的所有边界点的集合称为它的边界，记为　E .

$\mathbf{R}^2$ 上集 E 的内点、外点、边界点如图 1 - 1 所示 .

例 1　xy 平面上的单位圆内除去圆心 $0, 0)$　　　　　　　　　　1 - 2)

$$E_1 = \{\ \ x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$$

除坐标原点外，单位圆内部的点均为集 E_1 的内点；单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的点及坐标原点 O　$0, 0)$　　E_1 的边界点，它们构成集 E_1 的边界　E_1，且集 E_1 不包含　E_1 .

图　1 - 1　　　　　　图　1 - 2

[1]　通常借用二、三维空间中相应的几何图形名称来命名 n 维空间中的几何图形 . 例如，“平面”，“球”等 . 详情见本节之“三、多元函数的几何表示”.

定义 2　设集 $E \quad \mathbf{R}^n$，若 " $\delta > 0$，在 $U \quad X_0, \delta)$ 　　　　E 中一个异于 X_0 的点，则称点 X_0 为集 E 的聚点 .

由定义可知，如果点 X_0 为集 E 的聚点，则在 X_0 的任何一个邻域内都含有无穷多个集 E 的点，但聚点 X_0 本身可能属于 E，也可能不属于 E . 在例 1 中，集 E_1 的所有内点、边界点都是 E_1 的聚点，但 $x^2 + y^2 = 1$ 上的点及坐标原点 $O \quad 0,0)$ 　　　　E_1 .

如果点 $X_0 \in E$，但 X_0 不是集 E 的聚点，则称点 X_0 为集 E 的孤立点 . 就是说，点 $X_0 \in E$，但 v $\delta > 0$，使得 $\mathring{U} \quad X_0, \delta) \cap E =$ 　，则 X_0 为集 E 的孤立点 . 例如，正整数集 $\mathbf{N}_+ = \{1, 2, \cdots, n\}$
孤立点 .

定义 3　若集 $E \quad \mathbf{R}^n$ 的每一点都是它的内点，则称 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集 . 若集 $E \quad \mathbf{R}^n$ 包含了它的所有聚点在内，则称 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个闭集 .

例 2　下列集合中:

$$E_1 = \{ \quad x, y) \mid x > 0,\ \ y > 0\}$$

$$E_2 = \{ \quad x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$$

$$E_3 = \{ \quad x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$$

$$E_4 = \{ \quad x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$$

$$E_5 = \{ \quad x, y) \mid x + y = 0\}$$

$$E_6 = \{ \quad x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$E_7 = \{ \quad x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$E_8 = \{ \quad x, y, z) \mid |x| \leq 1,\ \ |y| \leq 1,\ \ |z| \leq 1\}$$

集 E_1，E_2 是 $\mathbf{R}^2$ 中的开集；E_3 是 $\mathbf{R}^3$ 中的开集；集 E_4，E_5，E_7 是 $\mathbf{R}^2$ 中的闭集; E_8 是 $\mathbf{R}^3$ 中的闭集；E_6 既非开集又非闭集，因为它包含了边界 $x^2 + y^2 = 1$ 上的点，但又没有包含它的聚点 $O \quad 0,0)$

在 $\mathbf{R}^n$ 中，规定空集　和全集[1] $\mathbf{R}^n$ 既是开集又是闭集 . 此外，容易证明若 $E \quad \mathbf{R}^n$ 为开集，则 E^C 为闭集，反之亦真 .

定义 4　设 $E \quad \mathbf{R}^n$ 为非空点集 . 若对于 E 内的任意两点 X 和 Y 都可用

[1]　全集与记号 E^C 参看本系列教材之