

普通高等教育“十五”国家级规划教材  
大学数学系列教材

# 大学数学

(三)

湖南大学数学与计量经济学院组编  
主 编 刘楚中 曹定华

高等教育出版社

责任编辑 胡乃  
封面设计 刘晓翔  
责任绘图 尹文军  
版式设计 马静如  
责任校对 俞声佳  
责任印制

## 郑 重 声 明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反  
行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。社会各界人士如发现上述  
侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

现公布举报电话及通讯地址：

电 话：

传 真：

**E - mail:** dd@hep . com . cn

地 址：北京市东城区沙滩后街 55 号

邮 编：100009

## 内容简介

本书是量积分、向量函数及其应用、傅立叶级数、积分变换、偏微分方程等。各节后配有适量的习题，书末附有习题答案。

本书结构严谨、内容丰富、条理清楚、重点突出、难点分散、例题较多，且在内容取舍上既充分注重了传统的知识内容，又加强了现代数学内容介绍，并较好地处理了有关的知识块之间的关系，避免了不必要的重复，使之有机地融合在一起。

本书可作为大学非数学类理工科本科生数学教材，也适合各类需要提高数学素质和能力的人员使用。

### 图书在版编目(CIP)

大学数学 .  
教育出版社, 2003.1  
ISBN 7 - 04 - 011688 - X

等学校 - 教材 .013

中国版本图书馆 CIP 数据核字

---

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 64054588
社 址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100009	网 址	http: www.hep.edu.cn
传 真	010 - 64014048		

经 销 新华书店北京发行所  
印 刷

开 本	787 × 960 1/16	版 次	年 月第 版
印 张	25.75	印 次	年 月第 次印刷
字 数	480 000	定 价	26.90 元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

# 大学数学系列教材

湖南大学数学与计量经济学院组编  
总主编 刘楚中 副总主编 黄立宏

主编 刘陶文 彭亚新

# 前 言

本系列教材是国家教育部“新世纪高等教育教学改革工程”本科教育教学改革项目的研究成果之一，是湖南大学自1989年以来非数学类理工科各专业数学课程教学与教材改革有关成果的延续。

本系列教材对非数学类理工科数学课程所授知识进行了重新分块，进一步理顺了非数学类理工科数学各门课程之间的关系和内涵。在内容叙述与介绍中以物理、力学和工程中的数学模型为背景，辅以代数结构，注意内容间的有机结合，避免不必要的重复；注意连续和离散的关系，加强函数的离散化处理；内容展开注重由浅入深、由特殊到一般，给学生一个完整的知识体系，并注重培养学生研究问题和解决实际问题的能力；采用近代数学观点和数学思想方法，以集合、向量及映射贯穿全书，加强了近代数学思想方法和数学实践的内容，为学生今后学习近代数学知识奠定了良好的基础，使之更符合新世纪培养高素质人才的要求。在教材编写中特别注重教育观念、教学内容和教学模式的更新，注重对学生数学素质、计算及应用能力、创新意识和工程意识的培养。教材编写以培养学生的好数学素质为主要目标，同时为适应近年来随经济发展出现的专业调整和专业更新，为在教育教学中已调整、拓宽的各专业服务，本系列教材还适当地开设了一些有关的现代数学的知识窗口，以拓宽学生知识面，使教材具有较宽的口径和较大的适应性。本系列教材中，概念、定理及理论叙述准确、精炼，符号使用标准、规范，知识点突出，难点分散，证明和计算过程均着重体现近代数学思想方法，例题、习题等均经过精选，具有代表性和启发性。本系列教材适合大学非数学类理工科本科生，以及各类需要提高数学素质和能力的人员使用。本系列教材中难免会有不妥之处，希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见。

本系列教材包括  
分方程等)  
微积分、向量分析、场论、积分变换、偏微分方程等)  
率论、数理统计等)  
等)

宏任副总主编。本册

人员有：杨冬莲、李建平、刘开宇、彭亚新、历亚、朱郁森。

本系列教材编写得到湖南大学教务处的的大力支持，在此表示衷心感谢。

湖南大学

2002 年 2 月

# 目 录

第一章 多元函数微分学 .....	1
第一节 多元函数的概念 .....	1
一、区域 .....	1
二、多元函数 .....	6
三、多元函数的几何表示 .....	8
习题 1 - 1 .....	8
第二节 多元函数的极限与连续性 .....	9
一、多元函数的极限 .....	9
二、多元函数的连续性 .....	12
三、有界闭区域上连续函数的性质 .....	14
四、二元函数的累次极限 .....	15
习题 1 - 2 .....	18
第三节 偏导数 .....	18
一、多元函数的偏导数 .....	18
二、二元函数偏导数的几何意义 .....	23
三、偏导数与连续的关系 .....	23
习题 1 - 3 .....	25
第四节 全微分 .....	26
一、全微分 .....	26
二、全微分的运算法则 .....	32
三、微分中值定理 .....	33
习题 1 - 4 .....	34
第五节 多元复合函数的求导法则 .....	35
一、链式法则 .....	35
二、全微分的形式不变性 .....	39
习题 1 - 5 .....	41
第六节 隐函数的导数 .....	41
一、一个方程的情形 .....	41
二、方程组的情形 .....	45
习题 1 - 6 .....	49

第七节 高阶偏导数与高阶微分 .....	50
一、高阶偏导数 .....	50
二、高阶微分 .....	57
习题 1 - 7 .....	59
第八节 方向导数与梯度 .....	60
一、方向导数 .....	60
二、梯度 .....	63
习题 1 - 8 .....	65
第二章 多元函数积分学 .....	66
第一节 二重积分 .....	66
一、一类数学模型 .....	66
二、二重积分的概念与性质 .....	68
三、二重积分的计算 .....	71
习题 2 - 1 .....	83
第二节 三重积分 .....	85
一、三重积分的概念与性质 .....	85
二、三重积分的计算 .....	86
习题 2 - 2 .....	97
第三节 广义二重积分 .....	98
一、无界区域上的二重积分 .....	98
二、含瑕点的二重积分 .....	101
习题 2 - 3 .....	103
第四节 对弧长的曲线积分 .....	103
一、对弧长的曲线积分的概念 .....	103
二、对弧长的曲线积分的计算 .....	104
三、对弧长的曲线积分的几何意义 .....	108
习题 2 - 4 .....	109
第五节 对面积的曲面积分 .....	109
一、对面积的曲面积分的概念 .....	109
二、对面积的曲面积分的计算 .....	110
习题 2 - 5 .....	117
第六节 黎曼积分小结 .....	118
一、黎曼积分的概念 .....	118
二、黎曼积分的性质 .....	120
习题 2 - 6 .....	123

第三章 多元函数微积分学的应用	124
第一节 多元函数的泰勒公式	124
习题 3 - 1	128
第二节 曲线的切线与法平面方程	128
习题 3 - 2	132
第三节 曲线的弧长与平面曲线族的包络	132
一、曲线的弧长	132
二、平面曲线族的包络	133
习题 3 - 3	137
第四节 曲面的切平面与法线方程	138
一、曲面的切平面与法线方程	138
二、二元函数全微分的几何意义	141
习题 3 - 4	142
第五节 无约束极值与有约束极值	143
一、无约束极值	143
二、函数的最大值和最小值	146
三、有约束极值	149
习题 3 - 5	155
第六节 平面图形及曲面的面积	156
一、平面图形的面积	156
二、曲面的面积	159
习题 3 - 6	161
第七节 几何体的体积	162
习题 3 - 7	164
第八节 多元函数积分学在物理中的应用	165
一、物体的质量	165
二、质心和形心	168
三、转动惯量	172
四、引力	176
习题 3 - 8	179
第四章 对坐标的曲线积分和曲面积分	180
第一节 对坐标的曲线积分	180
一、对坐标的曲线积分的概念	180
二、对坐标的曲线积分的计算	186
三、两类曲线积分的联系	191

习题 4 - 1 .....	192
第二节 格林公式 .....	193
一、格林公式 .....	193
二、平面上曲线积分与路径无关的条件 .....	198
三、原函数与全微分方程举例 .....	203
习题 4 - 2 .....	207
第三节 对坐标的曲面积分 .....	208
一、双侧曲面 .....	208
二、对坐标的曲面积分的概念 .....	210
三、对坐标的曲面积分的计算 .....	213
四、两类曲面积分之间的联系 .....	217
习题 4 - 3 .....	218
第四节 高斯公式与斯托克斯公式 .....	218
一、高斯公式 .....	218
二、斯托克斯公式 .....	221
习题 4 - 4 .....	226
第五章 向量函数与场论 .....	228
第一节 向量函数的极限与连续性 .....	228
一、向量函数的概念 .....	228
二、向量函数的极限与连续性 .....	229
习题 5 - 1 .....	231
第二节 向量函数的解析运算 .....	232
一、向量函数的导数和偏导数 .....	232
二、向量函数的微分 .....	237
三、向量函数的积分 .....	239
习题 5 - 2 .....	241
第三节 数量场与其物理量 .....	242
一、数量场 .....	242
二、数量场的方向导数和梯度 .....	243
习题 5 - 3 .....	248
第四节 向量场及其物理量 .....	249
一、向量场 .....	249
二、通量与散度 .....	251
三、环量与旋度 .....	254
习题 5 - 4 .....	256

第五节 几个常见的重要场 .....	257
一、有势场 .....	257
二、无源场 .....	259
三、调和场 .....	260
习题 5 - 5 .....	261
第六章 含参变量的积分 .....	262
第一节 含参变量积分的概念与运算 .....	262
习题 6 - 1 .....	268
第二节 含参变量的无穷积分 .....	268
一、含参变量的无穷积分的敛散性 .....	268
二、含参变量的无穷积分的性质 .....	272
习题 6 - 2 .....	276
第三节 函数与 函数 .....	277
一、 函数 .....	277
二、 函数 .....	280
习题 6 - 3 .....	283
第四节 含参变量积分应用举例 .....	283
习题 6 - 4 .....	288
第七章 傅立叶分析 .....	289
第一节 周期函数的傅立叶级数 .....	289
一、傅立叶系数和傅立叶级数 .....	289
二、傅立叶级数收敛的充分条件 .....	292
三、正弦级数与余弦级数 .....	293
四、一般周期函数的傅立叶级数 .....	295
习题 7 - 1 .....	298
第二节 非周期函数的傅立叶级数 .....	298
一、函数的周期性延拓 .....	298
二、奇延拓与偶延拓 .....	300
三、任意区间上非周期函数的傅立叶级数 .....	302
习题 7 - 2 .....	303
第三节 傅立叶变换 .....	303
一、傅立叶级数的复形式 .....	304
二、傅立叶积分与傅立叶变换 .....	306
三、 函数的傅立叶变换 .....	316
习题 7 - 3 .....	318

第四节	拉普拉斯变换 .....	318
一、	拉普拉斯变换的定义与存在条件 .....	318
二、	拉普拉斯变换的性质 .....	321
三、	拉普拉斯逆变换的求法 .....	325
四、	拉普拉斯变换的简单应用 .....	326
习题 7 - 4	.....	328
第八章	偏微分方程 .....	329
第一节	三类典型的偏微分方程 .....	329
一、	典型方程的建立 .....	329
二、	偏微分方程的一些基本概念 .....	334
三、	定解条件与定解问题 .....	334
习题 8 - 1	.....	337
第二节	分离变量法 .....	338
一、	有界弦的自由振动 .....	338
二、	圆域内稳态温度的第一边值问题 .....	341
三、	施笃姆—刘维尔固有值理论 .....	343
习题 8 - 2	.....	344
第三节	分离变量法的进一步应用——非齐次情形 .....	345
一、	非齐次方程的混合问题 .....	345
二、	非齐次边界条件的处理 .....	347
习题 8 - 3	.....	350
第四节	波动方程的达朗贝尔公式 .....	351
一、	两个自变量的二阶线性方程的分类与化简 .....	351
二、	无界弦的自由横振动——达朗贝尔公式 .....	355
三、	无界弦的强迫振动 .....	356
四、	半无界弦的混合问题——对称延拓法 .....	358
习题 8 - 4	.....	359
第五节	积分变换法 .....	360
一、	傅立叶变换法举例 .....	360
二、	拉普拉斯变换法举例 .....	362
习题 8 - 5	.....	363
第六节	格林函数法 .....	364
一、	格林公式及其应用 .....	364
二、	格林函数 .....	366
习题 8 - 6	.....	369

---

第七节 差分法.....	369
一、差商与差分方程 .....	369
二、拉普拉斯方程的差分法 .....	371
三、波动方程的差分法 .....	374
四、热传导方程的差分法 .....	375
习题 8 - 7 .....	376
习题答案 .....	377
附录 .....	388
附表 1 傅立叶变换表 .....	388
附表 2 拉普拉斯变换表 .....	392

# 第一章 多元函数微分学

在自然科学和社会科学中所遇到的问题往往是复杂的，是由多方面因素确定的。这类问题反映到数学上就是一个变量与多个变量间的关系问题。例如，在研究自然现象时，总离不开空间和时间，描述空间  $\mathbf{R}^3$  就要用到  $x$ 、 $y$ 、 $z$  三个变量，再加上时间  $t$  就有四个变量了。有些物理问题和工程问题还需要考虑更多个变量。我们在所学习的一元函数及其微积分理论已不能解决这些问题了，必须以一元微积分理论为基础，进一步研究有关多个变量的函数及其微积分理论。

## 第一节 多元函数的概念

### 一、区域

#### 1. $n$ 维空间

在《大学数学

运算性质。我们称有序实数组  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n \}$$

为  $n$  维空间，记为  $\mathbf{R}^n$ ，其中的任意一个元素  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$  中

的一个点，记为  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  中  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$

$X$  的第  $i$  个坐标。与二维空间  $\mathbf{R}^2$  和三维空间  $\mathbf{R}^3$  中一样，在空间  $\mathbf{R}^n$  中点  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  的向量  $\overrightarrow{OX} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

引起混淆时，将  $\mathbf{R}^n$  中的向量和点均记为  $X$  或  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

或  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  为  $\mathbf{R}^n$  中的一个向量，称  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$

为  $X$  的第  $i$  个分量。

从向量的角度，我们给出如下定义：

设  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ， $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$(1) X = Y \iff x_i = y_i (i = 1, 2, \dots, n)$$

(2) 加法  $X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

(3) 数乘 "  $\mathbf{R}$ ,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

(4) 内积  $X \cdot Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i;$

(5) 模  $|X| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$

容易验证向量  $X$  的模  $|X|$  满足:

1)  $|X| \geq 0$ , 且  $|X| = 0 \iff X = 0$ , 即  $x_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$

2)  $|cX| = |c| |X|, c \in \mathbf{R};$

3)  $|X + Y| \leq |X| + |Y|, X, Y \in \mathbf{R}^n.$

空间  $\mathbf{R}^n$  中任意两点  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  与  $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$

为

$$d(X, X_0) = |X - X_0| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2}.$$

于是向量  $X$  的模  $|X|$  就是点  $X$  与坐标原点  $O(0, 0, \dots, 0)$  的距离  $d(X, O)$

向量  $I_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$   $I_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$   $\dots$   $I_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$

为  $\mathbf{R}^n$  的基本单位向量,  $I_i \cdot I_j = \delta_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$

可知: "  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ , 有  $X = \sum_{i=1}^n x_i I_i.$

### 2. 开集、连通集

设点  $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbf{R}^n, \epsilon > 0$ , 称集合

$$U(X_0, \epsilon) = \{X \in \mathbf{R}^n, d(X, X_0) < \epsilon\}$$

为点  $X_0$  的一个以  $\epsilon$  为半径的邻域, 简称为点  $X_0$  的  $\epsilon$ -邻域, 点  $X_0$  为该邻域的中心; 集合

$$U^\circ(X_0, \epsilon) = \{X \in \mathbf{R}^n, 0 < d(X, X_0) < \epsilon\}$$

称为点  $X_0$  的一个以  $\epsilon$  为半径的去心邻域, 简称为点  $X_0$  的去心  $\epsilon$ -邻域, 点  $X_0$  为邻域的中心. 若不关注邻域的半径, 则通常分别用  $U(X_0)$  与  $U^\circ(X_0)$

表示  $X_0$  的某邻域和某去心邻域.

在  $\mathbf{R}^2$  上, 点  $X_0 = (x_0, y_0)$  的邻域是一个以  $X_0$  为圆心,  $r$  为半径的圆的内部; 在  $\mathbf{R}^3$  中, 点  $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$  的邻域是一个以  $X_0$  为球心,  $r$  为半径的球的内部

在  $\mathbf{R}^n$  中, 点  $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  的邻域是一个以  $X_0$  为球心,  $r$  为半径的球的内部

邻域是一个以  $X_0$  为中心,  $\rho$  为半径的“球”的内部<sup>[1]</sup> (不包含“球面”)

有了邻域的概念, 我们可借助它来描述点  $X_0$  与点集  $E$  之间的关系.

**定义 1** 设  $X_0 \in \mathbf{R}^n, E \subset \mathbf{R}^n$ .

(1) 若  $\forall \rho > 0, U(X_0, \rho) \subset E$ , 则称点  $X_0$  为集  $E$  的内点.

若  $\forall \rho > 0, U(X_0, \rho) \cap E = \emptyset$ , 则称点  $X_0$  为集  $E$  的外点.

集  $E$  的所有内点构成的集合称为  $E$  的内部. 集  $E$  的所有外点构成  $E$  的外部.

(2) 若  $\exists \rho > 0$ , 在  $U(X_0, \rho) \cap E$  的点, 又有不属于  $E$  的点, 则称点  $X_0$  为集  $E$  的边界点.

集  $E$  的边界点可能属于集  $E$ , 也可能不属于集  $E$ . 集  $E$  的所有边界点的集合称为它的边界, 记为  $\partial E$ .

$\mathbf{R}^2$  上集  $E$  的内点、外点、边界点如图 1-1 所示.

**例 1**  $xy$  平面上的单位圆内除去圆心  $O(0,0)$  (图 1-2)

$$E_1 = \{ (x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1 \}$$

除坐标原点外, 单位圆内部的点均为集  $E_1$  的内点; 单位圆  $x^2 + y^2 = 1$  上的点及坐标原点  $O(0,0)$  为  $E_1$  的边界点, 它们构成集  $E_1$  的边界  $\partial E_1$ , 且集  $E_1$  不包含  $\partial E_1$ .

图 1-1

图 1-2

**[1]** 通常借用二、三维空间中相应的几何图形名称来命名  $n$  维空间中的几何图形. 例如, “平面”, “球”等. 详情见本节之“三、多元函数的几何表示”.

**定义2** 设集  $E \subset \mathbf{R}^n$ , 若  $\forall \delta > 0$ , 在  $U(X_0, \delta) \cap E$  中一个异于  $X_0$  的点, 则称点  $X_0$  为集  $E$  的聚点.

由定义可知, 如果点  $X_0$  为集  $E$  的聚点, 则在  $X_0$  的任何一个邻域内都含有无穷多个集  $E$  的点, 但聚点  $X_0$  本身可能属于  $E$ , 也可能不属于  $E$ . 在例1中, 集  $E_1$  的所有内点、边界点都是  $E_1$  的聚点, 但  $x^2 + y^2 = 1$  上的点及坐标原点  $O(0,0)$  不是  $E_1$  的聚点.

如果点  $X_0 \in E$ , 但  $X_0$  不是集  $E$  的聚点, 则称点  $X_0$  为集  $E$  的孤立点. 就是说, 点  $X_0 \in E$ , 但  $\exists \delta > 0$ , 使得  $U(X_0, \delta) \cap E = \{X_0\}$ , 则  $X_0$  为集  $E$  的孤立点. 例如, 正整数集  $\mathbf{N}_+ = \{1, 2, \dots, n\}$  中的点都是孤立点.

**定义3** 若集  $E \subset \mathbf{R}^n$  的每一点都是它的内点, 则称  $E$  为  $\mathbf{R}^n$  中的一个开集. 若集  $E \subset \mathbf{R}^n$  包含了它的所有聚点在内, 则称  $E$  为  $\mathbf{R}^n$  中的一个闭集.

**例2** 下列集合中:

$$E_1 = \{ (x, y) \mid x > 0, y > 0 \}$$

$$E_2 = \{ (x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1 \}$$

$$E_3 = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 4 \}$$

$$E_4 = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 \}$$

$$E_5 = \{ (x, y) \mid x + y = 0 \}$$

$$E_6 = \{ (x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

$$E_7 = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 \}$$

$$E_8 = \{ (x, y, z) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1 \}$$

集  $E_1, E_2$  是  $\mathbf{R}^2$  中的开集;  $E_3$  是  $\mathbf{R}^3$  中的开集; 集  $E_4, E_5, E_7$  是  $\mathbf{R}^2$  中的闭集;  $E_8$  是  $\mathbf{R}^3$  中的闭集;  $E_6$  既非开集又非闭集, 因为它包含了边界  $x^2 + y^2 = 1$  上的点, 但又没有包含它的聚点  $O(0,0)$ .

在  $\mathbf{R}^n$  中, 规定空集  $\emptyset$  和全集  $\mathbf{R}^n$  既是开集又是闭集. 此外, 容易证明若  $E \subset \mathbf{R}^n$  为开集, 则  $E^c$  为闭集, 反之亦真.

**定义4** 设  $E \subset \mathbf{R}^n$  为非空点集. 若对于  $E$  内的任意两点  $X$  和  $Y$  都可用

[1] 全集与记号  $E^c$  参看本系列教材之