普通高等教育“十五”国家级规划教材
大学数学系列教材

# 大 学 数 学

## (四)

湖南大学数学与计量经济学院组编
主　编　杨湘豫　邓爱珍

高等教育出版社

## 内容简介

本书是

数字特征、大数定理、随机过程、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析等。各节后配有适量的习题，书末附有习题答案。

本书结构严谨、内容丰富、条理清楚、重点突出、难点分散，另外本书例题较多，且在内容取舍上既充分注重了连续量方面的知识内容，又加强了离散量的内容介绍，并较好地处理了连续量与离散量内容之间的关系，使之有机地融合在一起。

本书可作为大学非数学类理工科本科生数学教材，也适合各类需要提高数学素质和能力的人员使用。


图书在版编目

大学数学 . 4/ 杨湘豫，邓爱珍主编 . —北京：高等教育出版社，2003.8

ISBN 7 - 04 - 011937 - 4

①杨 . . .②邓 . . . Ⅲ .高等数学 - 高等学校 - 教材 Ⅳ .013

中国版本图书馆 CIP 数据核字

策划编辑 王 强 责任编辑 李 陶 封面设计 刘晓翔
责任绘图 杜晓丹 版式设计 马静如 责任校对 杨雪莲
责任印制

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010 - 82028899
购书热线 010 - 64054588
免费咨询 800 - 810 - 0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
p://www.hep.com.cn

经 销 新华书店北京发行所
印 刷

开 本 787×960 1/16
印 张 20.25
字 数 380 000
版 次 年 月第 1 版
印 次 年 月第 次印刷
定 价 21.40 元

# 大 学 数 学 系 列 教 材

湖南大学数学与计量经济学院组编
总主编　刘楚中　副总主编　黄立宏

《大学数学》
《大学数学》
《大学数学》
《大学数学》
《大学数学》
《大学数学习题集》

主编　刘陶文　彭亚新

# 前　　言

本系列教材是国家教育部“新世纪高等教育教学改革工程”本科教育教学改革项目的研究成果之一，是湖南大学自 1989 年以来非数学类理工科各专业数学课程教学与教材改革有关成果的延续。

本系列教材对非数学类理工科数学课程所授知识进行了重新分块，进一步理顺了非数学类理工科数学各门课程之间的关系和内涵。在内容叙述与介绍中以物理、力学和工程中的数学模型为背景，辅以代数结构，注意内容间的有机结合，避免不必要的重复；注意连续和离散的关系，加强函数的离散化处理；内容展开注重由浅入深、由特殊到一般，给学生一个完整的知识体系，并注重培养学生研究问题和解决实际问题的能力；采用近代数学观点和数学思想方法，以集合、向量及映射贯穿全书，加强了近代数学思想方法和数学实践的内容，为学生今后学习近代数学知识奠定了良好的基础，使之更符合新世纪培养高素质人才的要求。在教材编写中特别注重教育观念、教学内容和教学模式的更新，注重对学生数学素质、计算及应用能力、创新意识和工程意识的培养。教材编写以培养学生的良好数学素质为主要目标，同时为适应近年来随经济发展出现的专业调整和专业知识更新，为在教育教学改革中已调整、拓宽的各专业服务，本系列教材还适当地开设了一些有关的现代数学的知识窗口，以拓宽学生知识面，使教材具有较宽的口径和较大的适应性。本系列教材中，概念、定理及理论叙述准确、精炼，符号使用标准、规范，知识点突出，难点分散，证明和计算过程均着重体现近代数学思想方法，例题、习题等均经过精选，具有代表性和启发性。本系列教材适合大学非数学类理工科本科生以及各类需要提高数学素质和能力的人员使用。本系列教材中难免会有不妥之处，希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见。

本系列教材包括《大学数学

方程等)

分、向量分析、场论、积分变换、偏微分方程等)

理统计等)

学数学习题集》

编。本册《大学数学

有：谭德俊、彭国强、晏木荣、刘仙霞、胡春华。

本系列教材的编写得到湖南大学教务处的大力支持，在此表示衷心感谢。

湖南大学《大学数学》教材编写组

2002 年 9 月

# 目　　录

# 第一章　随机事件及其概率

## 第一节　随机事件及其运算

### 一、随机试验

自然界和社会的各种现象按是否具有确定性分为两大类：必然现象

性现象)

必然现象．例如，在大气压力 101.325 kPa 下，水温达到 100 ℃时水必然沸腾，而在 0℃时水必然结冰等等．在一定条件下，具有多种可能的结果，但事先又不能预知确切的结果的现象称为随机现象．例如，掷一颗骰子，出现 1 点或是 2 点；又如，新生婴儿，或是男孩，或是女孩，等等．概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的基础学科．对随机现象的研究离不开试验．我们把实现一次条件，有意识地观察结果，称为一次试验．如果试验具有下列特点：

随机试验，记为 $E$．

随机试验的每一个不能分解的可能结果称为基本事件，也称为样本点，常用 ω或 $e$ 表示．全体基本事件组成的集合称为样本空间，常用 Ω 表示．

**例 1**　抛一枚均匀硬币，观察出现正、反面的情况，这是一个随机试验，记为 $E_1$．试验的可能结果有两个：出现正面和反面．用“正”表示出现正面，“反”表示出现反面，则 $E_1$ 的样本空间 $\Omega_1=\{正,反\}$

**例 2**　掷一颗骰子，观察出现的点数也是随机试验，记为 $E_2$．用“$i$”表示“出现 $i$ 点”　$i=1,2,3,4,5,6)$　　6 个，$E_2$ 的样本空间 $\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$

**例 3**　记录电话交换台在单位时间内接到的呼叫次数，这个试验记为 $E_3$．如果用“$k$”表示“在单位时间内收到 $k$ 次呼叫”，由于难以规定呼叫数的上界，所以认为每一个非负整数 $k$ 都是一个可能的试验结果，因此 $E_3$ 的样本空

间 $\Omega_3 = \{0,1,2,3,\cdots\}$

**例 4** 从装有红、白两种颜色小球的袋中 2)

摸出两球，记录小球的颜色，这是一个随机试验，记为 $E_4$．若用“

表示“第一次摸出红球，第二次摸出白球”，则 $E_4$ 的样本空间为 $\Omega_4 = \{($红，白$)$，$($白，红$)$，$($白，白$)$，$($红，红$)\}$

## 二、随机事件

随机试验中，基本事件及其所有可能组合称为随机事件．它在一次试验中，可能发生，也可能不发生，而在大量的重复试验中却有规律性．随机事件也简称为事件，常用英文大写字母 $A$，$B$，$\cdots$表示．

对于一个随机试验，它的每一个基本事件都是一个随机事件，它是这个试验中最简单的随机事件．如例 2 中的随机试验 $E_2$，其样本空间 $\Omega_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$ 2 点”这个基本事件是随机事件，而 $A$ =“出现偶数点”也是随机事件，它是由基本事件“出现 2 点”，“出现 4 点”，“出现 6 点”所组成，可写成 $A = \{2,4,6\}$ $A$ 发生时，组成 $A$ 的三个基本事件中必有一个发生；而当这三个基本事件之一发生时，$A$ 必定发生．

我们把每次试验都一定发生的事件称为必然事件，用 $\Omega$ 表示，而把每次试验一定不发生的事件称为不可能事件，记为 ．例如在随机试验 $E_2$ 中，“点数大于零且小于 8”是必然事件，而“点数大于 10”是不可能事件．

必然事件与不可能事件本质上没有不确定性，但是为了方便起见，我们还是把它们看作随机事件．样本空间作为样本点的集合，它的每一子集都是一个随机事件，简言之，随机事件就是样本空间的子集，必然事件是样本空间的全集，不可能事件是样本空间的一个空子集．

## 三、事件的关系与运算

为了从较简单事件去研究较复杂事件，必须研究事件之间的某种联系．

设随机试验的样本空间为 $\Omega$，$A$，$B$，$C$，及 $A_i\ (i = 1,2,\cdots)$ $\Omega$ 中的事件．

1．事件的包含与相等

如果事件 $A$ 发生必然导致事件 $B$ 发生，则称事件 $B$ 包含事件 $A$，或称 $A$ 是 $B$ 的子事件，记为

$$A \quad B \text{ 或 } B \quad A.$$

如果 $A$ $B$ 且 $B$ $A$，则称 $A$ 与 $B$ 相等，记为 $A = B$．

如在例 2 中，若 $A$ 表示“出现 3 点”，$B$ 表示“出现奇数点”，则 $A$ $B$，

如果 $C$ 表示“点数能被3整除”，$D$ 表示“出现3或6点”，则 $C=D$.

易见，对 $\Omega$ 中的任意事件 $A$，都有 $A \quad \Omega$.

2．事件的和

由 $A$ 与 $B$ 的所有基本事件所组成的事件，称为事件 $A$ 与 $B$ 的和(或并)记为 $A\cup B$ 或 $A+B$，即 $A\cup B=\{\omega\in\Omega\mid\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$

显然，事件 $A\cup B$ 发生等价于事件 $A$ 与 $B$ 至少有一个发生.

事件的和可以推广到有限个或可列个事件的情形.

事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，可列多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和，记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$.

3．事件的积

既属于 $A$ 又属于 $B$ 的所有基本事件所组成的事件，称为事件 $A$ 与 $B$ 的积(或交) $A\cap B$ 或 $AB$，即 $A\cap B=\{\omega\in\Omega\mid\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$

事件 $A\cap B$ 发生等价于事件 $A$ 与 $B$ 同时发生.

事件 $A_1$，$A_2$，$\cdots$，$A_n$ 同时发生称为事件 $A_1$，$A_2$，$\cdots$，$A_n$ 的积，记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$，或 $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$，可列多个事件 $A_1,\cdots,A_n,\cdots$ 的积，记为 $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$.

4．事件的互不相容(互斥)

如果两个事件 $A$，$B$ 不能同时发生，即 $AB=\quad$，则称事件 $A$ 与 $B$ 是互不相容事件(或互斥事件)

5．对立事件

如果两事件 $A$，$B$ 满足

$$A\cup B=\Omega \text{ 且 } AB=\quad ,$$

则称 $A$ 与 $B$ 互为对立事件，记为 $B=A$ 或 $A=B$.

若 $A$ 与 $B$ 是对立事件，则在一次试验中，$A$ 与 $B$ 有且仅有一个发生.

6．事件的差

$A$ 发生而 $B$ 不发生的事件，称为事件 $A$ 与 $B$ 的差，记为 $A-B$，即 $A-B=\{\omega\in\Omega\mid\omega\in A$ 且 $\omega\mid\quad B\}$

由对立事件和两事件的积的定义可知：$A-B=A\overline{B}$.

上述事件的关系与运算与集合的相应关系和运算一致，为便于比较，列表如下：

| 记号 | 概　率　论 | 集　合　论 |
|---|---|---|
| $\Omega$ | 必然事件，样本空间 | 空间 |
|  | 不可能事件 | 空集 |
| $\omega$ | 基本事件，样本点 | 元素 |
| $A$ | 事件 | $\Omega$的子集 |
| $\omega \in A$ | 事件 $A$ 发生 | $\omega$是集 $A$ 的元素 |
| $A \quad B$ | $A$ 是 $B$ 的子事件 | $A$ 是 $B$ 的子集 |
| $A = B$ | 事件 $A$、$B$ 相等 | 集合 $A$、$B$ 相等 |
| $A \cup B$ | 事件 $A$ 与 $B$ 中至少有一个发生 | 集合 $A$ 与 $B$ 的并集 |
| $AB$ | 事件 $A$ 与 $B$ 同时发生 | 集合 $A$ 与 $B$ 的交集 |
| $A - B$ | 事件 $A$ 发生而 $B$ 不发生 | 集合 $A$ 与 $B$ 的差集 |
| $A$ | $A$ 的对立事件 | 集合 $A$ 对 $\Omega$ 的余集 |
| $A \cap B =$ | 事件 $A$ 与 $B$ 互不相容 | 集合 $A$ 与 $B$ 不相交 |

集合运算的全部规则对事件运算同样适用，主要有下列运算性质:

(1) 交换律: $A \cup B = B \cup A$， $A \cap B = B \cap A$;

(2) 结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$， $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

(3) 分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(4) 对偶律 De Morgan 律)

$$\overline{A \cup B} = A \cap B, \qquad \overline{A \cap B} = A \cup B .$$

**例 5**　设 $A$、$B$、$C$ 是三个事件，试用 $A$、$B$、$C$ 的运算关系表示下列事件:

(1) $M_1$: $A$ 发生而 $B$ 与 $C$ 都不发生;

(2) $M_2$: $A$ 与 $B$ 都发生而 $C$ 不发生;

(3) $M_3$: $A$、$B$、$C$ 中恰有一个发生;

(4) $M_4$: $A$、$B$、$C$ 中至少有两个不发生;

(5) $M_5$: $A$、$B$、$C$ 中至少有一个发生 .

**解**　(1) $M_1 = A\overline{BC} = A - B - C$;

(2) $M_2 = ABC = AB - C$;

(3) $A$、$B$、$C$ 中恰有一个发生就是 $A$ 发生而 $B$、$C$ 不发生，或者 $B$ 发生而 $A$、$C$ 不发生，或 $C$ 发生而 $A$、$B$ 不发生，于是

$$M_3 = ABC \cup ABC \cup ABC .$$

(4) $A$、$B$、$C$ 中至少有两个不发生就是 $A$、$B$、$C$ 中恰有两个不发生或 $A$、$B$、$C$ 都不发生，故

$$M_4 = (ABC) \cup (ABC) \cup (ABC) \cup (ABC)$$

或

$$M_4 = BC \cup CA \cup AB .$$

(5) $A$、$B$、$C$ 中至少有一个发生，依事件的和的意义可以写成 $A \cup B \cup C$；它还可以表示为 $A$、$B$、$C$ 中恰有一个发生，恰有两个发生，三个都发生的和；它也可以表示为三个都不发生的对立事件，所以

$$\begin{aligned} M_5 &= A \cup B \cup C \\ &= ABC \cup ABC \cup ABC \cup ABC \cup ABC \cup ABC \cup ABC . \\ &= \overline{ABC} . \end{aligned}$$

# 习　题　1 - 1

1. 假设董事会有 5 名董事 $A$、$B$、$C$、$D$、$E$，想要从中选一名董事长与一名总经理，假定一个人不能同时担任这两个职务，试写出与挑选有关的样本空间，董事 $A$ 被挑选出来的事件如何表示？

2. 一枚硬币抛 3 次，观察发生正反面的情况：

(1) 写出这个试验的样本空间；

(2) 用基本事件来表示事件 $A$：“恰有一次发生正面”.

3. 从一批零件中任取 2 个，设事件 $A$ 为“第一个零件为合格品”，事件 $B$ 为“第二个零件为合格品”，问 $AB$，$A$，$B$，$AB$，$A-B$，$A \cup B$ 及 $\overline{AB}$ 分别表示什么事件 .

4. 设 $A$、$B$、$C$ 是三个事件，试用 $A$、$B$、$C$ 的运算关系表示下列事件：

(1) $A$、$B$、$C$ 都发生；　2) $A$、$B$、$C$ 都不发生；

(3) $A$、$B$、$C$ 都不发生的对立事件；　4) $A$、$B$、$C$ 不多于两个事件发生；

(5) $A$、$B$、$C$ 中至少有两个事件发生 .

5. 以 $A$ 表示事件“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，则其对立事件 $A$ 为下列哪一事件？

(1)“甲种产品滞销，乙种产品畅销”；

(2)“甲乙两种产品均畅销”；

(3)“甲种产品滞销”；

(4)“甲种产品滞销或乙种产品畅销”.

6. 设一个工人生产了 4 个零件，$A_i$ 表示事件“他生产的第 $i$ 个零件是正品”　$i = 1, 2, 3, 4$)　　　$A_i$ 表示下列事件：

(1) 没有一个产品是次品；　　(2)

(3) 只有一个产品是次品；　　(4)

# 第二节　概率及其运算性质

一个随机试验的任一随机事件在一次试验中都有可能发生 . 虽然事先不能断定某个具体事件是否发生，但它发生的可能性的大小是客观存在的，我们把

刻画事件发生可能性大小的数量指标叫做事件的概率．事件 $A$ 的概率记为 $P\quad A)$ 展史上，人们针对不同的研究对象，从不同的角度给出了概率的定义
化定义与概率的运算性质．

## 一、统计概率

在概率论发展史上，人们为寻找随机事件的规律性进行了大量试验．

**例 1** 蒲丰和 K·皮尔逊进行的抛硬币试验．$n$ 表示抛硬币次数，“出现正面”这一随机事件 $A$ 发生的次数用 $n_A$ 表示，他们试验的结果如下:

| 试验者 | $n$ | $n_A$ | $n_A/n$ |
|---|---|---|---|
| 蒲　丰 | 4 040 | 2 048 | 0.508 0 |
| 皮尔逊 | 12 000 | 6 019 | 0.501 6 |
| 皮尔逊 | 24 000 | 12 012 | 0.500 5 |

从上表可看出，试验次数逐渐增多时，出现正面次数与试验次数的比值稳定于常数 0.5．这个数能反映出现正面的可能性的大小．该试验揭示了随机事件的统计规律性．

**定义 1** 设事件 $A$ 在 $n$ 次重复试验中发生 $n_A$ 次，比值

$$f\quad A) = \frac{n_A}{n} \tag{1}$$

称为事件 $A$ 在这 $n$ 次试验中发生的频率，$n_A$ 称为 $A$ 发生的频数．如果当试验次数 $n$ 很大时，频率 $f\quad A)$ $p$ 的附近摆动，则称数 $p$ 为随机事件 $A$ 的概率，记为 $P\quad A) = p$．

定义 1 称为概率的统计定义(简称为统计概率) $n$ 充分大时，可用频率 $f\quad A)$ $A$ 的概率的一个量度，即由下式

$$P\quad A) \approx f\quad A) = \frac{n_A}{n} \tag{2}$$

来计算概率的近似值．

例如，新生婴儿 10 000 人中死亡 1 人，就说婴儿的死亡率
500 次，中靶 300 次，就说他中靶的概率近似地是 0.6; 2 000 颗种子发芽了 1 800 颗，就说此种子的发芽率近似地是 0.9．

可以验证，事件 $A$ 发生的频率 $f\quad A)$

(1) $0 \leq f\quad A) \leq 1$;

(2) $f\quad \Omega) = 1$, $f\quad\quad ) = 0$;