绪　　论

物理学是探讨物质结构和它们最普遍、最一般运动规律的科学。物理学所研究的物质的空间尺度，小到半径为 10^{-15}m 的质子，大到宇宙空间的类星群(10^{26}m) 所包含的时间尺度,短到 10^{-25}s 的粒子的寿命，长到 10^{39}s 的质子的寿命。物理学探讨如此宽广范围内的机械运动、分子热运动、电磁场运动、微观粒子运动和原子核和粒子间的反应等等，故而在整个自然科学领域中具有十分重要和特殊的地位。

(1) 物理学是一切自然科学的基础

物理学所研究的粒子和原子，构成了一切生命的和非生命的物质和体系，构成了基因、蛋白质、器官、生物体、岩石、空气、海洋、地球、行星和宇宙等。物理学所探讨的物质运动的规律和过程普遍存在于生物科学、化学科学、材料科学、地球科学、天文学、宇宙学等自然科学之中。物理学与数学的关系十分密切，数学成为定量研究物理规律的手段，丰富多彩的物理世界是数学研究的实体。从自然科学发展的历史长河中我们看到，整个自然科学的发展必须遵从物理学所探讨出的物质运动的一般性规律，例如能量守恒与转换定律对整个自然科学就具有普遍的指导意义。

因此，可以说物理学在一切自然科学中是起带头作用的学科，是一切自然科学的理论支柱，是一切自然科学的基础。

(2) 物理学是现代科技发展的先导

美籍华裔物理学家李政道教授曾说过：“没有昨日的基础科学就没有今日的技术革命。”这里所指的基础科学，起主导作用的应是物理学。

18 世纪到 19 世纪的蒸汽机时代，技术革命的发展是物理学上热力学理论的应用。19 世纪电磁学理论的确立，才产生了今日发电机、电动机及庞大的电力工程，出现了电报、电话、电视、雷达等种类繁多的电讯事业。20 世纪人类技术革命的一项重大的贡献是建立了核能利用的技术，它从物理学上爱因斯坦质能关系的提出，到重核裂变能量释放原理，最终到轻核聚变能量释放原理的确立，才为可控、安全应用核能开辟了道路。

信息技术，其中包括计算机技术，通信技术和控制技术已经从根本上改变了当代社会的面貌。信息技术依赖于电子学的发展，从电子管、晶体管、集成电路到超大规模集成电路的问世，都是在固体物理理论、半导体能带理论、微电子学理论的基础上才诞生出来的。

信息技术面对内容繁杂、数量庞大、形式多样的信息，迫切要求信息的处理、存储、传输的手段，从原来的电信号转向于光信号。正是在物理学上“受激辐射光放大”的理论指导下，才出现了激光，并通过激光性能的研究发展了光导纤维和激光光盘技术。同时新一代的光计算机的研究与开发已成为国际高科技的热点之一，使得信息技术发生了根本性的革命。

生物科技的革命是在近几十年内发生的一项重大的变革。以往的生物学大多是定性的描述性的科学。自从物理学、数学、工程学等的理论和方法进入生物学的研究领域，生物学就发生了惊人的变化。

20 世纪 40 年代物理学家薛定谔在《生命是什么》的讲演中提出遗传密码存储于非周期晶体的观点，预言了生命现象的负熵结构；40 年代英国剑桥大学的卡文迪什实验室完成了肌红蛋白的 X 射线结构分析；50 年代美国华生（Watson)、克拉克(Crick)对 DNA 的 X 射线晶体衍射分析，揭示了遗传密码的本质，是 20 世纪生物学的最重大的突破，开创了现代生物学的新纪元。 60 年代普里高津的非线性热力学的理论定量分析生物自组织、耗散结构，建立了非生命现象与生命过程的理论联系。

近年来生物科学和物理学紧密结合产生了一系列的新兴的边缘学科，如分子生物学、分子遗传学、量子生物学、仿生学、生物信息和生物控制论等。物理学还为生物技术提供了现代化的实验方法和手段，如电子计算机、电子显微镜、扫描隧道显微镜、超速离心、光谱、质谱、X 射线衍射、激光、核磁共振等等，使生物科学的发展提高到理论化的高度，使生物技术运用上了最新最现代化的仪器和装置，使细胞工程、基因工程等生物工程按照人类的意愿，生产出优质、高效的生物产品，满足人类物质生活的需要。

(3) 物理学孕育着科学的世界观和方法论

物理学史告诉我们，新的物理概念和观念的确立是人类认识史上的一个飞跃。普朗克的能量量子化假设，是在突破了能量连续变化的传统观念基础上提出来的；爱因斯坦的相对论是突破了牛顿绝对时空观的束缚，创立了相对论的时空观基础上才形成的。这说明物理学的前进和发展是科学的世界观战胜谬误的世界观的结果。

物理学是理论和实验高度结合的一门科学，它往往经历从实际中来的命题的提出——推测答案——理论的预言——回到实验的检验——修改理论——再回到实践……等循环往复的过程。任何一个物理学重要原理的确立都体现了这

种实践与理论的辩证关系。

物理学理论的形成过程处处体现科学思想的指导和科学方法的应用。归纳和演绎是其中之一，例如麦克斯韦电磁场理论，就是通过归纳静电场的高斯定理，稳恒电流的安培环路定理，法拉第的电磁感应定律和麦克斯韦的位移电流定理，从而总结出了麦克斯韦方程组。而后又从电磁场理论——变化的电场激发磁场，变化的磁场激发电场的原理，自然地引导出电磁波的存在及其特性的结论。

其他的科学方法，如物理模型法、类比法、分析-综合法、物理假说和理想实验法等在物理学的发展过程中，广泛地被物理学家应用。同时，对所有科学工作者都有指导意义。所以讨论物理学中的科学的世界观和方法论，对于人类从事更广泛的科学实践活动，探讨物质世界的秘密是非常有益的。

面向21世纪的高等农林教育，肩负着培养高素质的农、林科技人才的重任。这些科技人才必须具备有宽厚扎实的基础理论和专业知识，有较强的综合分析和实际应用能力(包括观察、分析、思维、创造能力等)的"复合型"人才。高等农林教育也必须由过去的"应用型"人才培养模式向素质教育的模式转变。为了实现高素质人才的培养，大学基础物理学将起着其他课程无法替代的作用。因为物理学是一切自然科学的基础，大学基础物理将向学生提供适应21世纪的生物科学和农林科技发展所必须的基础理论和原理；向学生传授在人类生产和生活实践中所必须的物理知识和技能；对学生进行科学的世界观和方法论的教育。培养学生的综合素质、知识和能力是大学基础物理教学的使命。总之高等农林院校大学基础物理课的目的应是，使学生对物理学的内容和方法、工作语言、概念和物理图像，其历史、现状和前沿等方面从整体上有个全面的了解。大学基础物理教育的任务，除了传授理论和实际知识，还有培养学生的综合素质——特别是科学素质、科学作风、思想方法等方面的教养的作用，它对于树立学生辩证唯物主义世界观、爱国主义和正确的人生观有着潜移默化、画龙点睛的意义。

为此高等农林院校的学生一定要努力学好大学基础物理的理论，掌握好有关的物理实验技术，在学习中认真思考物理学所揭示的科学世界观和方法论，为把自己培养成21世纪合格的科技人才而努力。

第一部分

实物的性质和运动规律

第一章　牛顿力学概述

力学研究机械运动的规律。机械运动是物体各部分之间及一个物体相对于其他物体的位置的变化，是实物运动的最简单、最基本的形式。力学的发展经历了古代和近代的不同阶段,形成了完整的科学体系,其中 1687 年牛顿发表的‘自然哲学的数学原理”为经典力学打下了基础。随后逐渐完善起来的理论体系称为牛顿力学。牛顿力学研究低速（$v \ll c = 3\times10^8 \mathrm{m \cdot s^{-1}}$）宏观物体的运动规律，是相对于相对论力学和量子力学而言的。20 世纪初爱因斯坦创立了相对论力学，开始了近代力学的研究。20 世纪 60 年代以后出现了非线性力学，它为物理学向更大的深度和广度发展创造了条件。然而牛顿力学所确立的许多理论、概念和方法，在许多学科领域都有重要意义，它是物理学的基础。

本章讨论牛顿力学的基本概念和基本规律，首先介绍运动学，接着介绍质点动力学，力求在理论上提高一个新的层次，并通过一些实例，培养学生运用高等数学解决基础力学问题的能力。

1.1　质点的运动状态的描述

只对研究对象的运动现象描述，而不究其原因，这是运动学研究的内容。本节将介绍研究对象的物理模型的建立方法和意义；介绍运动的相对性和运动状态的描述方法等。

1.1.1　质点和物理模型

(1) 质点和质点组　实际物体都有一定的形状和大小（常用物体的线度描述)。但是,当描述物体的确切位置(坐标)时,则会出现其线度大小的不确定性（即出现误差）。例如，一个在空中飞行着的鸟，其空间坐标位置就不是一个点。当所考察的运动物体距观察者的距离，比物体的线度大得多（例如太阳的线度即其直径比它距地球的距离小得多）时，这种不确定性则可忽略不计。物体的大小和形状，在所研究的问题中可以忽略不计时，该物体成为没有大小而仅有质量的

几何点，称为质点。可见，一个物体能否被称为质点是有条件的，因而是相对的。例如，研究地球的公转运动时，地球可视为质点；研究地球的自转时，当然地球不能被视为质点。对于不能视为质点的物体，为了处理问题的需要，可将该物体看作是由许多微小的质量单元组成，每个质量单元可视为一个质点。假想中，物体可分割的质点组（质点的集合），称为质点系统（简称系统）或力学体系（简称体系）。我们研究问题的思路是先搞清一个质点的运动规律，进而再研究两个质点（两体）问题和多质点的系统问题。所以，质点力学是更为复杂的力学的基础。

(2) 物理模型　自然界任何实际物体的运动，都不是一种简单的位置移动。例如，地球并不是一个球体，实际上是一个表面凹凸不平的类似于葡萄柚一样的物体；地球的公转轨迹也不是固定的椭圆形，实际情况是形状变化且轨道平面有一定的摆动。

为了由易到难、先简后繁地解决实际问题，在一定条件下，需要先抓住问题的主要方面，忽略次要因素，把问题作适当的简化处理，常用物理模型（简称模型）代替真实的物体。这种简化处理问题的方法称为理想化方法。例如，公转的地球的物理模型为质点。又例如以椭圆形作为地球公转的轨道模型。总之，人们用把研究的问题的主要特点分离出来的方法，达到简化分析的目的。

在基本问题获得解决的基础上，再将那些被忽略的因素逐步考虑进去，逐步解决，以达到逐步接近实际情况的目的。例如飞行的子弹，先视之为质点，搞清它的质点运动规律以后，再考虑它的形状（仍然忽略其体积的变化），也就是说，将子弹视为一个刚体（即形状不变的物体）。刚体的运动既有平动又有转动。弄清子弹作为刚体的运动规律以后，再进一步考虑子弹的形变，甚至与空气摩擦的热力学问题等。

这种先理想化后逐步接近实际问题的思路和方法，在各门学科中都具有普遍意义。我们讲的基础物理学，研究对象都只达到物理模型的层次，物理工程涉及的问题当然更接近实际问题。以后各章将陆续接触一些新的物理模型问题，例如，理想气体、理想流体、点电荷等。应养成一种好的科学作风和习惯，即经常提醒自己，现象的哪些方面在模型中得到反映，哪些方面离开了模型而被忽略。对于所研究的问题的认识，头脑里应该很清楚。

1.1.2　参考物和坐标系

(1) 参考物　物体的位置及其变化（即运动），都是相对其他物体而言的。例如，火车相对地面的运动，地球的公转是相对太阳的运动，地球的自转是相对地轴的运动等。所以，要描述物体的位置，首先要选定参考物。被选择为假定不动的物体称为参考物。

对物体运动的描述，随参考物的选择不同而异。例如，坐在匀速直线运动的

火车上的人，相对火车，人是静止的；相对地面人在做匀速直线运动；相对地心人则做匀速圆周运动（假定地球为球体）。解决物理问题的难易程度，关键之一是参考物的选择是否合适。例如，如果牛顿选择地球为参考物，研究太阳和其他行星绕地球的运动，问题复杂得将使他难以发现万有引力定律。

参考物与考察物体运动必须的计时装置（时钟）的组合，称为参考系。通过“时钟”单值地确定运动质点在不同位置的时刻。相对不同的参考系，对同一物体的运动描述不同，称为运动描述的相对性。

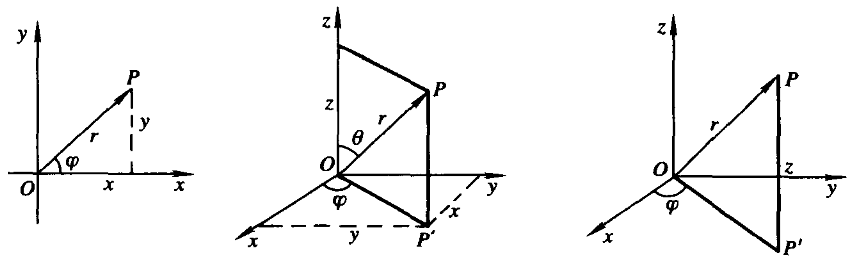
(2）坐标系　参考物选定以后，为了定量和定向地表示质点相对参考物的运动和受力情况，需要在参考物上建立适当的、与参考物固连在一起的坐标系。坐标轴的正方向即是力学中各矢量（或分矢量）的参考正方向。坐标系是参考物的替代者和数学工具。在画图进行问题分析时，常只画坐标系，不再画出参考物。在力学问题中，不特别声明，参考物一般是指地球。

力学中常用的坐标系有：笛卡儿直角坐标系（即直角坐标系），平面极坐标系（即极坐标系),球(面)坐标系和柱(面)坐标系等。物体运动的描述,仅与参考物的选择有关，而与所用的坐标系无关。坐标系的选择是方法问题。如果坐标系选择适当的话，会收到事半功倍的效果。所以，经常需要进行坐标系的变换工作。图 1-1(a)中平面上的 P 点的位置坐标，可以用不同的坐标系表示，如直角坐标形式为 $P(x,y)$,极坐标形式则为 $P(r,\varphi)$。两种坐标间的换算关系是：

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{1.1}$$

式 (1.1)中 r 为径矢 $\boldsymbol{r}$ 的长度，φ 为极角，φ 从极轴 Ox 开始沿逆时针方向转动为 $+\varphi$,否则为 $-\varphi$。

图 1-1(b)中的 P 点是以坐标原点 O 为球心、以 r 为半径的球面上的一点；P'为 P 点在 Oxy 平面上的投影点；φ 为经度角，θ 为纬度角，r 为 P 点的径



(a) 直角坐标与极坐标　(b) 直角坐标与球坐标　(c) 直角坐标与柱坐标

图 1-1　坐标变换

矢的长度。球面坐标与直角坐标间的换算关系是

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} \\ \theta = \arctan\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \end{cases} \tag{1.2}$$

由图 1－1(c)可知柱坐标与直角坐标间的换算关系为：

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \tag{1.3}$$

在实际应用中，究竟采用哪种坐标系，要看具体情况。一般的立体空间（三维空间）问题，常用直角坐标系；球对称性的问题（例如电子在原子核外的空间分布或球面上的电场强度分布等），用球坐标系；轴对称的问题（例如圆柱体绕柱中的对称轴自转时的质量分布问题等），用柱面坐标系。坐标系的方法，经常应用于力学、统计力学、电磁学和量子力学等领域。

(3) 自由度　确定力学系统空间位置的独立坐标的个数，叫该系统的自由度个数，简称自由度。例如，质点沿直线（或曲线）运动时，它有一个自由度。又如质点在立体空间内运动，该质点的自由度为 3。再如，一个刚体 A 在三维空间里的运动，如图 1－2 所示，设刚体A的质量中心(质心)在 M 点。M 点的平动自由度 $t=3$。A 还可以绕自身的轴 OM 自转,转角 φ,转动自由度 $r_1=1$。决定轴 OM 在空间转动的方位有 2 个自由度(α、β)，$r_2=2$ 所以决定一个刚体在空间的位置需要 $i=t+r_1+r_2=6$,总共 6 个自由度。

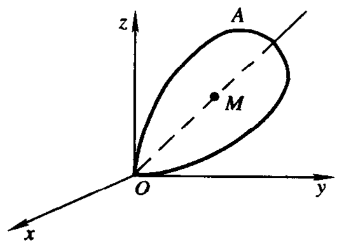


图 1－2　自由度

1.1.3　位矢、位移、速度和加速度

(1) 位矢和坐标　质点在空间的位置，可以用其坐标描述，也可以用位置矢量(简称位矢)$\boldsymbol{r}$ 表示。如图 1－3所示，$\boldsymbol{r}_1$ 称为质点 P 相对坐标原点 O 的径矢。对于 P 点来说，$\boldsymbol{r}_1$ 的大小和方向都是一定的，故径矢 $\boldsymbol{r}_1$ 与 P 点的坐标(x_1, y_1) 之间存在着一一对应关系。一般径矢 $\boldsymbol{r}$ 写成矢量式为：

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1.4}$$

式中的 x、y 和 z 分别为 $\boldsymbol{r}$ 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影（或分量）；$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分别是 x 轴、y 轴和 z 轴正参考方向（正方向）上的单位矢量。所谓单位矢量是指其模为 1，即

$$|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}| = 1$$

的矢量，它们构成互相垂直的直角坐标系，且为右手系，即 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 间的关系符合右手螺旋法则，用矢量法表示为

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$$

否则，例如 $\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}$，则称左手系。

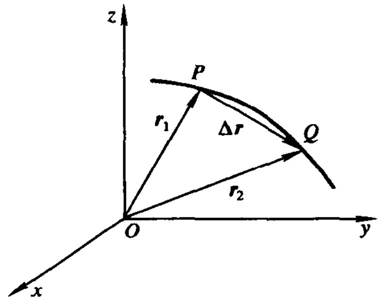


图 1－3　位矢和位移

(2)位移和路程　如图 1－3，假设质点在时间 Δt 内由 P 点移至 Q 点，则

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$

称为该质点在 Δt 时间内的位移。位移是矢量，$|\Delta\boldsymbol{r}| = \overline{PQ}$，$\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向由始点 P 指向终点 Q。弧长 $\Delta s = \overset{\frown}{PQ}$ 称为该质点在时间 Δt 内经过的路程。路程是标量。

(3) 速率和速度　路程变化的快慢程度用速率描述。质点的平均速率的定义式是：

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1.5a}$$

瞬时速率（简称速率）的定义式是：

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.5b}$$

速率是标量。位移变化的快慢程度用速度描述。平均速度和瞬时速度（简称速度）的定义式分别是：

$$\langle \boldsymbol{v} \rangle = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1.5c}$$

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.5d}$$

平均速度 $\langle \boldsymbol{v} \rangle$ 和速度 $\boldsymbol{v}$ 都是矢量，$\langle \boldsymbol{v} \rangle$ 的方向与位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向相同。$\boldsymbol{v}$ 的方向是 $\Delta\boldsymbol{r}$ 趋向极限时它的方向，即与径矢 $\boldsymbol{r}$ 垂直的切线方向。一般是 $\boldsymbol{r}$ 的大小和方向都变化；也可能是其大小或方向中的一个变化。由式（1.5d)得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \\ &= v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} = \boldsymbol{v}_x + \boldsymbol{v}_y + \boldsymbol{v}_z \end{aligned} \tag{1.5e}$$

式中 v_x、v_y、v_z 是速度 $\boldsymbol{v}$ 的分量(投影)，分量是标量；$\boldsymbol{v}_x$、$\boldsymbol{v}_y$、$\boldsymbol{v}_z$ 是 $\boldsymbol{v}$ 的分矢量，

分矢量是矢量。

（4）加速度　速度 $\boldsymbol{v}$ 变化（包括大小和方向）快慢的程度，用加速度描述。设 t_A 时刻质点的速度为 $\boldsymbol{v}_A$，t_B 时刻的速度为 $\boldsymbol{v}_B$，则在时间 $\Delta t = t_B - t_A$ 内，速度的增量为 $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A$。平均加速度 $<\boldsymbol{a}>$ 和瞬时加速度（简称加速度）$\boldsymbol{a}$ 的定义式分别是：

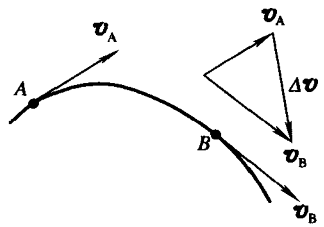


图 1－4　速度的增量

$$< \boldsymbol{a} > = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1.6a}$$

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{1.6b}$$

$<\boldsymbol{a}>$ 的方向与 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的方向相同。由图 1－4 可知，当 $\Delta t \to 0$ 时，$\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ 的方向与 $\boldsymbol{v}_A$ 垂直并指向 A 点处的曲率中心。由式（1.5e），加速度 $\boldsymbol{a}$ 可表示为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}) \\ &= a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{1.6c}$$

1.1.4　运动方程

（1）线量的运动方程　随着质点的运动，它的位矢和坐标都发生变化，利用数学语言可写成下述矢量形式或标量形式：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \tag{1.7a}$$

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \tag{1.7b}$$

该式称为质点的运动方程，式中 t 表示时刻。因为

$$\begin{cases} v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t \\ v_y = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t \\ v_z = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t \end{cases} \tag{1.7c}$$

$$\begin{cases} a_x = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t \\ a_y = \mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t \\ a_z = \mathrm{d}v_z/\mathrm{d}t \end{cases} \tag{1.7d}$$

所以，只要知道运动方程式（1.7b）的具体函数形式，就可以由式（1.7c）和式（1.7d 分别求出速度 v 和加速度 $\boldsymbol{a}$ 的三个分量，就可了解质点这个时刻的运动状况。

如果消去式（1.7b）中的参量 t，则可得质点在空间中的运动轨迹方程。例如，一个质点的运动方程为：

$$x(t)=3\sin\frac{\pi}{6}t, y(t)=3\cos\frac{\pi}{6}t, z(t)=0$$

设式中 t 以秒为单位，x、y 和 z 以米为单位，消去 t 则得：

$$x^2+y^2=9 \text{ 和 } z=0$$

可见，该质点在 Oxy 平面内做以坐标原点为圆心、以 $R=3$ m 为半径的圆周运动。

【例 1.1】 已知质点沿直线（x 轴）运动的运动方程为：$x=A+Bt+Ct^3$ 式中 $A=4$ m，$B=2$ m/s，$C=-0.5$ m/s^3。求在 $t_1=2$ s这一时刻：(1) 质点的坐标 x_1；(2) 瞬时速度 $\boldsymbol{v}_1$；(3) 瞬时加速度 $\boldsymbol{a}_1$。

【解】 (1) $x_1=A+Bt_1+Ct_1^3=4$ m

(2) $v_1=\dfrac{dx}{dt}=B+3Ct_1^2=-4$ m/s

负号说明 v_1 的方向沿 x 轴负方向，即 $\boldsymbol{v}_1=4$ m/s$(-\boldsymbol{i})$

(3) $\boldsymbol{a}_1=\dfrac{dv}{dt}\boldsymbol{i}=6Ct_1\boldsymbol{i}=6$ m/s$^2(-\boldsymbol{i})$

负号说明此时加速度 $\boldsymbol{a}_1$ 沿 x 轴负方向。可见，矢量式可同时描述矢性物理量的大小和方向。

【例 1.2】 某人从地面上方 36.0 m处的高度，以初速率 $v_0=11.8$ m/s竖直向上抛出一小球。忽略空气阻力，试求：(1) 小球的运动方程和速度方程，以及抛出 1 s、2 s和 3 s末时，小球的位置、位移和速度；(2) 如果选择坐标轴 Ox 与地面垂直，且向上为其正方向，而坐标原点一次选在地面上，另一次选在地面上方的 36.0 m处，试问坐标系原点的这两种选法，对上述已求出的结果是否有影响？请通过具体计算证明之。

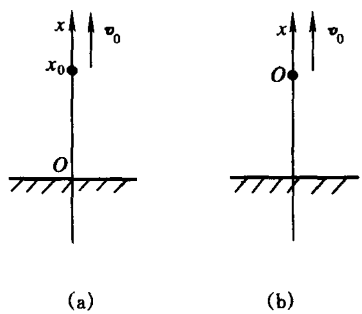


图 1－5 上抛运动

【解】 (1) 坐标系选法如图 1.5(a)。设初始时刻 t_0 时的初始速率为 v_0，因小球的加速度：

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$$

所以有：

$$dv=a\,dt,\quad \int_{v_0}^{v}dv=\int_{t_0}^{t}a\,dt,$$

$$v-v_0=a(t-t_0)$$

设从 t_0 时刻开始计时(即 $t_0=0$)，则速度公式为：

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{a}t=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{g}t=11.8+9.8t(-\boldsymbol{i})$$

所以 $t_1=1$ s、$t_2=2$ s 和 $t_3=3$ s 末的速率分别为：

$$v_1 = 11.8 - 9.8 \times 1 = 2.0 \text{ m/s}, \boldsymbol{v}_1 = 2.0 \text{ m/s } \boldsymbol{i}$$
$$v_2 = 11.8 - 9.8 \times 2 = -7.8 \text{ m/s}, \boldsymbol{v}_2 = 7.8 \text{ m/s}(-\boldsymbol{i})$$
$$v_3 = 11.8 - 9.8 \times 3 = -17.6 \text{ m/s}, \boldsymbol{v}_3 = 17.6 \text{ m/s } (-\boldsymbol{i})$$

说明 $\boldsymbol{v}_1$ 方向向上，$\boldsymbol{v}_2$ 和 $\boldsymbol{v}_3$ 的方向向下。

因为
$$v = \frac{dx}{dt}$$

所以
$$dx = v dt = (v_0 + gt) dt$$
$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (v_0 + gt) dt$$

位移公式：
$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

故 1 s、2 s 和 3 s 时间内的位移分别是

$$\Delta x_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2 = 11.8 \times 1 + \frac{1}{2}(-9.8) \times 1^2 = 6.9 \text{ m}$$

$$\Delta x_2 = v_0 t_2 + \frac{1}{2} g t_2^2 = 11.8 \times 2 + \frac{1}{2}(-9.8) \times 2^2 = 4.0 \text{ m}$$

$$\Delta x_3 = v_0 t_3 + \frac{1}{2} g t_3^2 = 11.8 \times 3 + \frac{1}{2}(-9.8) \times 2^3 = -8.7 \text{ m}$$

这说明小球被抛出 1 s末时，在初位置 $x_0 = 36.0$ m 上方 6.9 m 处；2 s末时，已从最高处返回落到 x_0 上方 4.0 m 处，但位移 Δx_2 的方向仍沿 $+\boldsymbol{i}$ 方向；3 s末时，已落至 x_0 下方 8.7 m 处，且位移 Δx_3 的方向已沿 $-\boldsymbol{i}$ 方向，虽然小球仍在地面上方 36.0 m − 8.7 m = 27.3 m处。运动方程为：

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

所以，小球 1 s末、2 s末和 3 s末的位置分别是：

$$x_1 = 36.0 + 11.8 \times 1 + \frac{1}{2}(-9.8) \times 1 = 42.9 \text{ m}$$

$$x_2 = 36.0 + 11.8 \times 2 + \frac{1}{2}(-9.8) \times 2^2 = 40.0 \text{ m}$$

$$x_3 = 36.0 + 11.8 \times 3 + \frac{1}{2}(-9.8) \times 3^2 = 27.3 \text{ m}$$

(2) 坐标系的选择如图 1 − 5(b)所示，此时的初位置 $x_0 = 0$，故运动方程和速度公式分别为：

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + gt$$

小球1 s末的位置、位移和速度分别是：

$$x_1 = 11.8 \times 1 + \frac{1}{2} \times (-9.8) \times 1^2 = 6.9 \text{ m}$$

$$v_1 = 11.8 - 9.8 \times 1 = 2\ \mathrm{m/s}\ ,或\ \boldsymbol{v}_1 = 2\ \mathrm{m/s}\ \boldsymbol{i}$$

类似的计算可求出 2 s末和 3 s末的位置、位移和速度。结论是：小球相对参考物地面的位置和速度，不因坐标系的选法不同而异，也就是说，小球的运动状态与坐标系的选法无关。

(2) 角量的运动方程 如图 1－6 所示，描述质点绕定轴转动，用极坐标。质点的位置用极角 φ 表示。因该质点运动轨道的半径不变，其自由度为 1，为一维运动，这时以角量 φ 表示的运动方程的一般形式为：

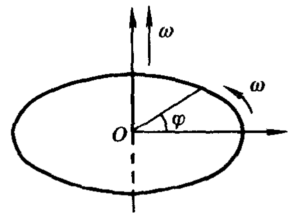


图 1－6　质点绕定轴转动

$$\varphi = f(t) \tag{1.8a}$$

其具体函数形式，由定轴转动的具体规律决定。例如，匀变速转动的角量运动方程为：

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t + \frac{1}{2}\beta t^2 \tag{1.8b}$$

式中 φ_0 为质点的初角位置，t 为时间，ω 为角速度，β 为角加速度（匀变速转动的 β 为常量)。ω 和 β 的定义式见表 1－1。

表 1－1　线量和角量的比较及关系

线　量	角　量	线量和角量关系	备　　注
位置 $\boldsymbol{r}$	角位置 φ		位矢(矢径)$\boldsymbol{r}$
位移 $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$	角位移 $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$		逆时针方向转动 $\Delta\varphi > 0$
速度 $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$	角速度 $\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$	$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ 或 $v = \omega r$	$\boldsymbol{\omega}$ 方向由右手螺旋法则确定
加速度 $\boldsymbol{a} = \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$	角加速度 $\beta = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$	$\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{r}$ $\boldsymbol{a}_n = \omega^2(-\boldsymbol{r})$	$a_t = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$(切向) $a_n = v^2/r$(法向)

对表 1－1 中有关问题说明如下：

(1) 为了描述质点定轴转动的方向性，将角速度表示为矢量形式 $\boldsymbol{\omega}$，确定 $\boldsymbol{\omega}$ 方向的右手螺旋法则的操作方法是：右手四指沿质点转动方向，与这四个指头垂直的拇指所指的方向即为 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向。所以，图 1－6 中质点沿逆时针方向转动时，$\boldsymbol{\omega}$ 方向沿转轴向上。

(2) 角加速度　$\boldsymbol{\beta} = \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$，质点绕定轴转动时，$\boldsymbol{\beta}$ 方向不变，加速转动，$\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 同方向，减速转动时，$\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 反方向。

(3) 总加速度　$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n$，切向加速度分量 $a_t = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ 是 $\boldsymbol{v}$ 的大小变化产

生的，法向加速度分量 $a_n = v^2/r$ 是 $\boldsymbol{v}$ 的方向变化产生的。

【例 1.3】 汽车沿着公路上的弧形转弯，圆弧的曲率半径 $R = 50$ m。汽车的运动方程为：

$$L(t) = A + Bt + Ct^2$$

如图 1－7,式中 $L(t)$表示从圆周上的起点处初始时刻算起的、 t 时刻的曲线坐标，$A = 10$ m,$B = 10$ m/s, $C = -0.5$ m/s^2。求：(1) $t_1 = 5$ s时汽车的速度 v、切向加速度 a_t、法向加速度 a_n 和总加速度 a；(2) 从汽车开始运动时起的 $t_2 = 10$ s时间内，它通过的路程 s 和发生的位移的大小 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 各是多少？

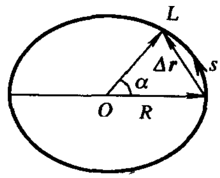


图 1－7

【解】 (1) $v = \dfrac{dL}{dt} = B + 2Ct_1 = 10 - t_1 = 5$ m/s

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 2C = -1 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = v^2/R = 25/50 = 0.5 \text{ m/s}^2$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{1 + 0.25} = 1.12 \text{ m/s}^2$$

(2) $s = L - L_0 = L - A = Bt_2 + Ct_2^2 = 10 \times 10 - 0.5 \times 10^2 = 50$ m

$$|\Delta \boldsymbol{r}| = 2R\sin\frac{\alpha}{2} = 2R\sin\frac{s}{2R} = 2 \times 50\sin\frac{50}{2 \times 50} = 47.96 \text{ m}$$

由此问题可知,如果这样取曲线坐标(又称自然坐标系)就是一维问题；如果取 Oxy 直角坐标系，则成为二维问题。处理起来，当然前者简单后者麻烦。可见坐标系的选用是很重要的。

1.1.5 刚体的平动和转动

如果刚体上的任意一条直线，在刚体运动过程中始终保持与自己平行，则该刚体的这种运动称为平行移动（简称平动）。平动刚体上的每一个质点，都具有相同的运动轨迹、相同的速度和相同的加速度。所以，平动刚体的运动可以用其中的任一质点的运动来描述。平动的刚体有三个自由度。

如果刚体运动时,刚体内两点(如 A 和 B 两点)始终静止不动,则称该刚体绕定轴 (AB) 转动。这时刚体上各质点皆做圆周运动，圆心都在转轴 (AB)上,但它们的半径不同。绕定轴转动的刚体具有一个自由度。

刚体的一般运动形式是平动的同时，也做转动。例如，自行车的轮子既向前移动又绕非定轴转动。

1.1.6 自然坐标系

如图 1－8 所示，自然坐标系的特点是三个正交单位矢量，$\boldsymbol{e}_t$，$\boldsymbol{e}_n$ 和 $\boldsymbol{e}_b$，分别取在曲线$\overset{\frown}{CC'}$ 的切线方向、主法线方向和副法线方向。平面 M 称为法平面，平

面 N 称为切平面。自然坐标系的单位矢量方向，随质点的运动而改变，而直角坐标系的单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 的方向，并不随质点的运动而变。

自然坐标系中，质点的速度、加速度的矢量表达式为：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= v\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} \\ \boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

上式称为‘内禀方程’或‘本性方程’，式中 $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ 是弧长的时间变化率，ρ 是曲线上 O 点处曲线的曲率半径。可见，如果选择自然坐标系，质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 只有切向分量 v_{t}，质点的加速度 $\boldsymbol{a}$ 可以有切向分量 a_{t} 和法向分量 a_{n}，却没有副法线分量。这样，与取其他坐标系（如 $Oxyz$ 系）相比，问题就简化很多。

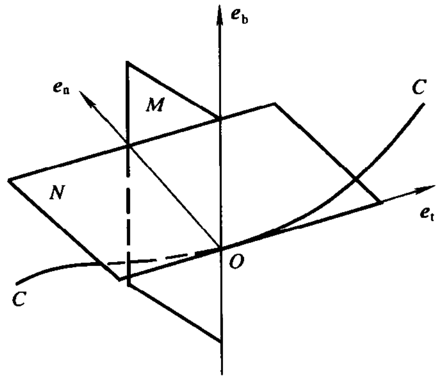


图 1－8　自然坐标系

当质点沿平面曲线运动时，式(1.9)仍成立，这时的主法线方向 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$，就是曲线的法线方向，并指向曲线的凹侧。对于平面曲线运动中的三种特殊情况和有关物理量的特点，见表 1－2。

表 1－2　自然坐标系中的几种平面曲线运动

运动类型 \ 物理量	$\boldsymbol{v}$ 大小	$\boldsymbol{v}$ 方向	ρ	a_{t}	a_{n}	$\boldsymbol{a}$ 大小	$\boldsymbol{a}$ 方向
直线运动	$v=\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$	不变	$\rho\to\infty$	$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\mathrm{d}^2s/\mathrm{d}t^2$	0	a_{t}	$\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}(\mathrm{d}v>0)$ $-\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}(\mathrm{d}v<0)$
匀速率曲线运动	$v=$ 常量	变化	ρ	0	$\frac{v^2}{\rho}$	a_{n}	$\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$
圆周运动	$v=\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$	变化	R	$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$	$\frac{v^2}{R}$	$\sqrt{a_{\mathrm{t}}^2+a_{\mathrm{n}}^2}$	$\tan\theta=a_{\mathrm{n}}/a_{\mathrm{t}}$

对于平面曲线运动而言，若轨道方程为：

$$y = y(x) \tag{1.10}$$

曲率可表示为：

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\left|\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|}{\left[1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{1.11}$$