

第 1 章 经典集合与映射

集合论是德国人康托 (Cantor) 于 1874 年建立的, 它已成为现代数学的一个重要分支及现代数学各分支的基础与工具。自 20 世纪以来, 集合论一直吸引着许多数学家去研究, 并已取得了不少的成绩。1965 年美国人札德 (L.A.Zadeh) 把康托的集合概念进行了拓广, 提出了模糊 (Fuzzy) 集的概念。模糊集合论是现代模糊数学的理论基础, 为了区别, 我们把康托的集合论叫做经典集合论。作为预备知识, 我们先对经典集合论进行介绍。

§ 1.1 经典集合的基本概念和表示方法

一、经典集合的概念

集合是集合论中惟一不能精确定义的基本数学概念。

我们在讨论一个具体问题的时候, 总是把议题限制在一定的范围内。例如要讨论“男学生”这一概念, 我们不必考虑自行车或飞机等这些与学生无关的事物。我们可以把自己的议题首先限制在“学生”这样一个范围内, 把所有的学生作为讨论对象, 然后再在其中去区分性别。通常把被讨论的全体对象叫做论域。论域常以大写的英文字母 $U, V, \dots, X, Y, \dots$ 表示。论域中的每个对象, 统一叫做元素, 以相应的小写字母 $u, v, \dots, x, y, \dots$ 表示。

给定论域 U , U 中的某一部分元素的全体叫做 U 上的一个经典集合, 常以大写英文字母 $A, B, \dots$ 表示经典集合。在意义清楚的情况下, 经典集合也简称为集合。

若 x 是经典集合 A 中的一个元素, 记作 $x \in A$, 读作“ x 属于

A ”；若 x 不是集合 A 的一个元素，则记为 $x \notin A$ ，读作“ x 不属于 A ”。

二、经典集合的表示方法

在本书中，我们约定用几个特定的字母表示几个常用的经典集合，其中：

$\mathbf{N}$ 表示由全体自然数组成的集合；

$\mathbf{Z}$ 表示由全体整数组成的集合；

$\mathbf{Q}$ 表示由全体有理数组成的集合；

$\mathbf{R}$ 表示由全体实数组成的集合。

通常表示经典集合的方法有两种，其中，把集合的所有元素一一列举出来表示集合的方法叫做列举法。例如： $A = \{2, 3, 4, 5\}$ 表示以自然数 2, 3, 4, 5 为元素的集合。

一般说来，只有当一个集合仅含有少数几个元素时，才能用这种方法表示。如区间 $(0, 1)$ 中的所有实数的集合 A 就不能用这种方法表示。但我们容易发现，这些实数有一个共同的特征：都大于 0 而小于 1。因此，如果 x 是 A 的一个元素，就有 $0 < x < 1$ 。于是我们可以把集合 A 写成： $A = \{x | 0 < x < 1\}$ ，其中 x 表示 A 的元素，竖线后的“ $0 < x < 1$ ”是对 x 的说明，它给出了 A 中元素的特征。

一般地，我们把具有特征 P 的元素表示成 $P(x)$ ，于是，由所有具有特征 P 的元素组成的集合 B 可以表示成： $B = \{x | P(x)\}$ 。

通常我们把用描述集合元素的共同特征来表示集合的方法叫做描述法。

三、有限集、无穷集、空集

一个集合，如果它只含有有限个元素，这样的集合称为有限集。例如： $A = \{2, 3, 4\}$ 表示由 2, 3, 4 这 3 个元素所构成的一个有

限集合。

在有限集中 把只有 1 个元素所组成的集合，称为单元素集。
如方程：

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$$

的实根所形成的集合，就是一个单元素集 $\{1\}$ 。但需要注意的是：不要把单元素集和它所含的惟一元素混为一谈，这是因为它们在概念上不是一回事。

如果一个集中有无穷多个元素，则称该集为无穷集。例如，由所有的自然数所构成的集合 $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ 就是一个无穷集。

不含有任何元素的集合叫做空集，记为 $\emptyset$ 。例如方程 $x^2 + 1 = 0$ 的实根的全体所组成的集合就是空集。即设 $B = \{x | x \text{ 是实数且 } x^2 + 1 = 0\}$ ，则 $B = \emptyset$ 。

注意：

(1) $\{0\}$ 不是空集，因为它含有数 0， $\{0\}$ 是单元素集。

(2) 不能将空集记作 $\{\emptyset\}$ ，因为它是以空集 $\emptyset$ 为元素的单元素集。

集合的概念虽然简单，但要准确理解其含义还需注意如下几个问题：

(1) 集合的元素可以是任何事物，一个集合也可以作为另一个集合的元素。

例如集合 $A = \{a, \{b, c\}, d, \{\{d\}\}\}$ 其中 $a \in A, \{b, c\} \in A, d \in A, \{\{d\}\} \in A$ ，但 $b \notin A, \{d\} \notin A$ ， b 是 A 的元素 $\{b, c\}$ 的元素，不是 A 的元素。

(2) 组成一个集合的各个元素是彼此相异的，并且是没有次序关系的。例如， $\{1, 2, 3\}, \{3, 2, 1\}, \{3, 1, 2\}$ 表示同一个集合。

(3) 所讨论的任何一个对象是否属于一个集合，回答是确定的，也就是说，对于一个集合来说，任一对象或者是它的元素或者

不是它的元素,二者必居其一,而且结论是确定的。

§ 1.2 经典集合间的关系、运算及其规律

一、集合间的关系

在实数之间我们定义了关系 $=, <, \leq, >, \geq$ 。类似地,在集合之间可以定义关系: $=, \subset, \subseteq, \supset, \supseteq$ 。

定义 1.1 设 A, B 是 U 上的两个集合,若 $\forall a \in A$ 都有 $a \in B$ (即 A 的每个元素都是 B 的元素),则称 A 为 B 的子集合,或称 B 包含 A ,记作 $B \supseteq A$,或称 A 被 B 包含,记作 $A \subseteq B$ 。

定义 1.2 对于集合 A, B ,若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 则称集合 A, B 相等,记作 $A = B$ 。

由定义知,给定两个集合,当且仅当它们的元素完全相同时才叫做它们相等。这表明:一个集合是由它的元素所决定的。因此,可以用不同的表示方法表示同一个集合。

例如: $\{7, 8, 9\}, \{x | x \text{ 是整数且 } 6 < x < 10\}, \{x | (x-7)(x-8)(x-9)=0\}$ 表示同一个集合,即这 3 个集合相等。

U 中的任意个元素组成的集合 A 都是 U 的子集,即 $U \supseteq A$,而 U 本身当然也是 U 的一个子集。

一般地,对于 U 的任意子集 A 都有: $\emptyset \subseteq A \subseteq U$ 。

事实上,由 $B \subseteq A$ 的意义知,若 $a \in B$,则 $a \in A$ 。此命题与它的逆否命题等价,即若 $a \notin A$,则 $a \notin B$ 。

现设 $B = \emptyset$,要证 $\emptyset \subseteq A$,只要证:若 $a \notin A$,则 $a \notin \emptyset$ 就行了。

事实上,若 $a \notin A$,因 $\emptyset$ 为空集,当然 $a \notin \emptyset$,所以 $\emptyset \subseteq A$ 。同理可证 $\emptyset \subseteq U$ 。

由于 A 是 U 的任一子集,显然有 $A \subseteq U$ 。于是, $\emptyset \subseteq A \subseteq U$

成立。

注意区分“ $\subset$ ”和“ $\in$ ”。例如： $A \in B$ 表示 A 是 B 的一个元素，而 $A \subseteq B$ 表示 A 的每个元素都是 B 的元素。

定义 1.3 对任意两个集合 A 和 B ，若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$ ，则称 A 为 B 的真子集，或称 B 真包含 A ，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ 。

例如： $\{2,3\} \subset \{1,2,3\}$ 。

定义 1.4 以集合为元素的集称为集族。

定义 1.5 含有 n 个元素的集合简称为 n 元集。它的含有 m 个 ($m \leq n$) 元素的子集称作它的 m 元子集。

任给一个 n 元集，如何求出它的全部子集呢？下面举例说明。

例 1.1 设 $A = \{1,2,3\}$ ，求 A 的全部子集。

解 将 A 的子集从小到大分类：

0 元子集，即空集，只有一个： $\emptyset$ ；

1 元子集，即单元素集，有 C_3^1 个： $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ ；

2 元子集有 C_3^2 个： $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$ ；

3 元子集有 C_3^3 个： $\{1,2,3\}$ 。

一般说来，对于 n 元集 A ，它的 m ($0 \leq m \leq n$) 元子集有 C_n^m 个，所以不同的子集总数有： $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n$ 。

由二项式定理容易证明： $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$ ，所以， n 元集有 2^n 个子集。

定义 1.6 集合 A 的一切子集（包括空集 $\emptyset$ 及 A 本身）所构成的集族称为 A 的幂集，记成 $P(A)$ （或 2^A ）。

例 1.22 设 $A = \{1,2,3\}$ ，求： $P(A)$ 。

解 由例 1 知

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

二、经典集合的运算及其规律

运算是数学上常用的手段。两个实数进行加、减、乘、除(除数不能为 0)运算可以得到一个新的实数。类似地,两个集合也可以进行运算。下面我们来定义集合的 5 种基本运算:并、交、余、差与对称差,利用这些运算能产生新的集合。在以下讨论中均假设所涉及的集合如 A, B 等均在某论域 U 中,即设 $A \subseteq U, B \subseteq U$ 。

定义 1.7 设 A, B 是任意两个集合,由至少属于 A 与集合 B 之一的一切元素所组成的集合,称为 A 与 B 的并集,记成 $A \cup B$,即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 。

定义 1.8 设 A, B 是任意两个集合,由既属于 A 又属于 B 的一切元素所组成的集合,称为 A 与 B 的交集,记成 $A \cap B$,即 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 。

两个集合的并、交运算可以推广到多个集合上去, n 个集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的并、交可分别定义为

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x | x \in A_1 \text{ 或 } x \in A_2 \text{ 或 } \dots \text{ 或 } x \in A_n\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x | x \in A_1 \text{ 且 } x \in A_2 \text{ 且 } \dots \text{ 且 } x \in A_n\}$$

n 个集合的并和交可简记为: $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 和 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ 。即

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n,$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n.$$

且当 $n \rightarrow \infty$ 时,可以记为

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots,$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots.$$

定义 1.9 设 U 是一个集合, $A \subseteq U$, 把从 U 中去掉 A 的所有元素所构成的集合叫做集合 A 的余集(或补集),记为 A^c 或 A^c ,

A_0^1 即 $A = \{x \mid x \notin A \text{ 但 } x \in U\}$ 。

例如：设 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A = \{1, 3, 5\}, B = \{1, 2, 4\}$ ，则

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A \cap B = \{1\},$$

$$A = \{2, 4\}, B = \{3, 5\}.$$

集合的并、交、余满足如下运算律：

(1) 等幂律： $A \cup A = A; A \cap A = A$ 。

(2) 交换律： $A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A$ 。

(3) 结合律： $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

(4) 分配律： $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(5) 同一律 (或称 0-1 律)：

$$A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset;$$

$$A \cup U = U, A \cap U = A.$$

(6) 吸收律： $A \cup (A \cap B) = A$ 。

$$A \cap (A \cup B) = A.$$

(7) 复原律 (或称二次否定律)： $A = A$ 。

(8) 补余律： $A \cup A = U; A \cap A = \emptyset$ 。

(9) 关于并、交、余运算，还有如下的 De-Morgan 公式：

$$A \cup B = A \cap B, A \cap B = A \cup B.$$

证明以上等式的基本思路是：要证 $P = Q$ ，即要证 $P \subseteq Q$ 同时 $Q \subseteq P$ 。也就是要证对任意的 x 有 $x \in P \Rightarrow x \in Q$ 和 $x \in Q \Rightarrow x \in P$ 成立。

下面证明公式 (9) 的第一个公式。

证明 设 $x \in A \cup B$ 则 $x \notin A \cup B$ 。因而 $x \notin A$ 且 $x \notin B$ 或者说 $x \in A$ 且 $x \in B$ 。于是， $x \in A \cap B$ 。即

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}.$$

反之 若 $x \in \overline{A \cap B}$ 则 $x \in \overline{A}$ 且 $x \in \overline{B}$, 即 $x \notin A$ 且 $x \notin B$, 因而 $x \notin A \cup B$ 即 $x \in \overline{A \cup B}$ 于是有:

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A \cup B}.$$

由(1),(2)式得: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

定义 1.10 设 A, B 为任意两个集合, 由所有属于 A 而不属于 B 的元素所组成的集合, 叫做集 A 减集 B 的差集, 记为 $A - B$ 或 $A \setminus B$, 即, $A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$.

例如 设 $A = \{1, 3, 5\}, B = \{1, 4\}$, 则 $A - B = \{3, 5\}, B - A = \{4\}$.

定义 1.11 设 A, B 为任意 2 个集合, 则差集 $A - B$ 与 $B - A$ 的并集称为 A 与 B 的对称差, 记为: $A \oplus B$. 即

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A).$$

例如 设 $A = \{0, 1, 2\}, B = \{2, 3\}$, 则 $A - B = \{0, 1\}, B - A = \{3\}$. 于是,

$$A \oplus B = \{0, 1\} \cup \{3\} = \{0, 1, 3\}.$$

A 与 B 的对称差还有一个等价的定义, 即:

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

上面的例子若用这种定义也可得到同样的结果。

事实上, 由于 $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}, A \cap B = \{2\}$, 于是,

$$\begin{aligned} A \oplus B &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= \{0, 1, 2, 3\} - \{2\} \\ &= \{0, 1, 3\}. \end{aligned}$$

上面介绍了集合的并、交、余、差和对称差 5 种运算 这 5 种运算的一个共同特点是: 如果参加运算的集合均在某个集中, 那么运算后的结果仍在该集中。然而, 下面所定义的运算——集合的笛卡儿乘积却无此性质。

为了定义笛卡儿乘积运算,我们先引入序对的概念。

两个元素 a, b (允许 $a = b$), 按规定的次序 (比如 a 在 b 前面) 排列组成的二元组称为一个有序对, 记成 (a, b) , 其中 a 称为序对的第一元素 (或第一分量), b 称为序对的第二元素 (或第二分量)。

有序对具有以下性质:

$$(1) \quad a \neq b \Rightarrow (a, b) \neq (b, a).$$

$$(2) \quad \text{设 } (x, y) \text{ 和 } (a, b) \text{ 为二个有序对, 则 } (x, y) = (a, b) \Leftrightarrow x = a, y = b.$$

由此可见, 序对与含有两个元素的集合 $\{a, b\}$ 是有区别的。由于集合 $\{a, b\}$ 中的 a 和 b 是无序的 因此 当 $a \neq b$ 时有 $\{a, b\} = \{b, a\}$, 而 $(a, b), (b, a)$ 是两个不同的序对。

平面直角坐标系中点的坐标就是有序对。例如 $(1, -1), (-1, 1), (2, 0), (3, 2), \dots$ 都表示坐标系中不同的点。

有序对的概念可以推广到三元组, 四元组, $\dots, n$ 元组上去。

下面定义一种新的集合的运算——笛卡儿乘积。

定义 1.12 设 A, B 是两个任意的集合, 则称集合 $\{(a, b) | a \in A \text{ 且 } b \in B\}$ 为 A 与 B 的笛卡儿乘积或直积, 记为 $A \times B$ 即

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ 且 } b \in B\}.$$

由定义可知, $A \times B$ 是由一切这样的有序对组成的: 每个有序对的第一元素必在 A 中, 第二元素必在 B 中, 于是 $A \times B$ 与 A, B 的次序有关。因此, 一般地, 有 $A \times B \neq B \times A$ 。

例 1.3 设 $A = \{a, b\}, B = \{1, 2, 3\}$ 则

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\},$$

$$B \times A = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}.$$

两个集合的笛卡儿乘积的概念, 可以推广到 n 个集合的笛卡儿乘积上去。

定义 1.13 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是任意 n 个集合 ($n \geq 3$), 集合 $\{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i (i = 1, 2, \dots, n)\}$ 称为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的

笛卡儿乘积,记成 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$,简记为: $\prod A_i$ 。

当 $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ 时,把 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 简记为 A^n ,即: $A \times A \times \cdots \times A = A^n$ 。

§ 1.3 映 射

现实世界中的各种事物通常是互相联系的,反映在数学上就是要考察集合与集合中元素之间的关系,这就是我们下面要介绍的映射的概念。

映射是函数概念的推广,函数是大家所熟悉的数学分析中的重要概念,由此可见映射的重要地位。映射是近代数学最基本的概念和工具。

定义 1.14 设 A, B 是两个非空集合,如果存在一个对应法则 f ,使对于集合 A 的每一个元素 x ,有集合 B 的惟一确定元素 y 与它对应,则称 f 是 A 到 B 的一个映射,记为: $f: A \rightarrow B$, A 叫做映射 f 的定义域,记为 $\text{dom}(f) = A$, B 叫做映射 f 的值域,记为 $\text{ran}(f) = B$ 。 y 称为在 f 之下 x 的像,通常记作 $f(x)$,而 x 叫原像。从 A 到 B 的映射又可记为: $f: x \mapsto y$ 。

例 1.4 设 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$, A 到 B 的对应法则 f 规定如下:

$$\begin{array}{cccc} a & , & b & , & c & , & d \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 3 & , & 5 & , & 7 & , & 2 \end{array}$$

则 f 是由 A 到 B 的一个映射。因为对 A 中每一个元素有 B 中惟一确定的数与之对应。

A 中所有元素在 f 之下的像的全体所成的集合记作 $f(A)$,即: $f(A) = \{f(x) | x \in A \text{ 且 } f(A) \subseteq B\}$ 。

定义 1.15 设 $f:A \rightarrow B$ 若 $f(A)=B$, 则称 f 是从 A 到 B 的满射。

定义 1.16 设 $f:A \rightarrow B$ 如果 $\forall x_1, x_2 \in A$, 只要 $x_1 \neq x_2$ 就有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 是 A 到 B 的一对一映射或称为单射。

定义 1.17 设 $f:A \rightarrow B$ 如果 f 既是满射又是单射, 则称 f 是从 A 到 B 的一一对应或称为双射。

图 1.1.1.2.1.3 分别给出单射、满射和双射的例子。

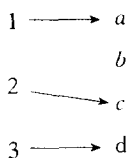


图 1.1

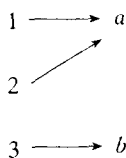


图 1.2

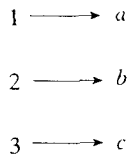


图 1.3

定义 1.18 设 X 是一个集合, $A \subseteq X$, 从 X 到 $\{0, 1\}$ 的如下一个映射 X_A 称为集合 A 的特征函数:

$$\text{对任意的 } x \in X, X_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

A 的特征函数在 x 处的值 $X_A(x)$ 叫做 x 对 A 的隶属(程)度, 当 $x \in A$ 时, 隶属度是 1 即 100% 表示 x 绝对隶属于 A ; 当 $x \notin A$, 隶属度为 0, 表示 x 绝对不属于 A 。

特征函数满足如下运算律:

$$X_{A \cup B}(x) = \max(X_A(x), X_B(x));$$

$$X_{A \cap B}(x) = \min(X_A(x), X_B(x));$$

$$X_{\bar{A}}(x) = 1 - X_A(x)。$$

§ 1.4 复合映射与逆映射

一、复合映射

复合映射是数学分析中复合函数的推广，下面先引入复合映射的定义。

定义 1.19 设映射 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ 用 $\forall x \in X, h(x) = g(f(x))$ 所确定的从 X 到 Z 的映射 h (即 $h: X \rightarrow Z$) 称为映射 f 与 g 的复合映射, 记作 $h = g \circ f$, 或简记为 $h = gf$.

注意:

(1) “ f 与 g 的复合映射” 用上述定义中的规定的记号应记成 $g \circ f$, 而不是记成 $f \circ g$ 。且一般地, $f \circ g \neq g \circ f$ 。

(2) 在定义中可以有 $X = Y$ 或 $Y = Z$ 或 $X = Z$ 。若 $f: X \rightarrow Y, g: Z \rightarrow W$ 且 $Y \neq Z$, 则 f 与 g 不能复合。但从 X 到 X 的任意两映射, f 与 g 均能复合。

例 1.5 设 $X = \{a, b, c\}, Y = \{0, 1\}, Z = \{2, 3\}$ 。

$$f: X \rightarrow Y, f(a) = f(b) = 0, f(c) = 1;$$

$$g: Y \rightarrow Z, g(0) = 2, g(1) = 3。$$

则 $h = g \circ f: X \rightarrow Z$, 且 $g \circ f(a) = g(f(a)) = g(0) = 2$;

$$g \circ f(b) = g(f(b)) = g(0) = 2;$$

$$g \circ f(c) = g(f(c)) = g(1) = 3。$$

但 $f \circ g$ 无意义。

当 X, Y, Z 都是数集时, 复合映射就是通常意义下的复合函数概念。

例 1.6 由函数 $y = \sqrt{x}$ 与 $Z = \sin y$ 复合而成的复合函数为 $Z = \sin \sqrt{x}$ 。

单射、满射、双射这几种映射经过复合后仍可保持单射、满射、

双射吗？回答是肯定的。一般地，有如下命题。

命题 1.1 设 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ 。

(1) 若 f 和 g 都是满射 则 $g \circ f$ 也是满射。

(2) 若 f 和 g 都是单射 则 $g \circ f$ 也是单射。

(3) 若 f 和 g 都是双射 则 $g \circ f$ 也是双射。

证明 由于(3)是(1)和(2)的直接结果，因此只须证明(1)，
(2)。

(1) 因为 g 是从 Y 到 Z 的满射，所以 $\forall z \in Z$ 在 Y 中至少存在一个元素 y ，使 $g(y) = z$ 。再由于 f 是从 X 到 Y 的满射，可知对上述的 y ，在 X 中至少有一元素 x 使 $f(x) = y$ 。

于是， $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ 。

这表明 $\forall z \in Z$ 在 X 中至少有一元素 x ，使 $(g \circ f)(x) = z$ 因而 $g \circ f$ 是满射。

(2) 设 $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ ，由于 f 是单射，于是知 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 。再由 g 是 Y 到 Z 的单射可知： $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ 亦即： $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$ ，故 $g \circ f$ 是从 X 到 Z 的单射。

命题 1.2 映射的复合运算满足结合律，即若 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z, h: Z \rightarrow W$ ，则 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ 。

证明略。

二、逆映射

定义 1.20 设 $f: X \rightarrow Y$ 是一一对应，则对于 y 中每个元素 y ，都对应着 X 中以 y 为映像（在 f 下）的那个元素 x ，这个对应是集合 Y 到 X 上的映射，我们称这个映射为 f 的逆映射 记为 f^{-1} 。

例 1.7 设 $X = \{a, b, c\}, Y = \{3, 4, 5\}, f: X \rightarrow Y, f(a) = 5, f(b) = 3, f(c) = 4$ ，则 f 是可逆的，且 $f^{-1}: Y \rightarrow X, f^{-1}(3) = b, f^{-1}(4) = c, f^{-1}(5) = a$ 。

当 X, Y 为数集时， X 到 Y 的一一映射 f 的逆射 f^{-1} 就是通

常意义下的反函数。

例 1.8 任何一个严格单调函数必有反函数。例如，指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) (其定义域 $\text{dom}(y) = \mathbf{R}$, 值域 $\text{ran}(y) = \mathbf{R}^+$), 它的反函数是对数函数 $y = \log_a x$ (其 $\text{dom}(y) = \mathbf{R}^+$, $\text{ran}(y) = \mathbf{R}$)。

命题 1.3 设 $f: X \rightarrow Y$, 且 f 是可逆的, 则 $(f^{-1})^{-1} = f$ 。

命题 1.4 设 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$, f, g 均可逆, 则 $g \circ f$ 也可逆, 且 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 。

证明略。

第 2 章 关 系

关系是在集合上定义的一个常用概念。例如自然数之间可以定义相等关系和大于、小于关系，在集合 A 的各个子集之间可定义相等关系和包含关系。我们知道，映射与集合两个概念是有联系的。而映射的概念，提供了描述事物与事物之间的一种单值依赖关系的工具，通过这种单值依赖关系来研究事物的运动规律。然而世界是复杂的，运动也是复杂的，事物之间的联系也是多样的，不仅有单值的依赖关系，而且有多值的依赖关系。“关系”这个概念提供了一种描述事物间的多值依赖的工具，这样，集合、映射、关系等概念就成为描述自然现象及其互相联系的有力工具，而映射是关系的一种特例。

研究“关系”这个概念及其数学性质是本章的主要内容。本章将给出关系概念的数学定义，特别是二元关系的一些常用性质、二元关系的运算以及应用广泛的偏序关系及等价关系。

§ 2.1 关系的基本概念

下面先研究与笛卡儿乘积密切相关的一个重要概念——二元关系。所谓二元关系，就是集合中两个元素之间的某种相关性。为了得出二元关系的定义，先看如下一个例子。

引例 设 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, $C = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, x \leq y\} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$ 。见图 2.1。

可见， C 是有序对的集合，且它是 A, B 两集的笛卡儿乘积 $A \times B$ 的一个子集，若 A 中的元素 x 与 B 中的元素 y 具有“ $\leq$ ”关

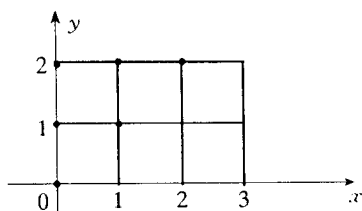


图 2.1

系, 则 $(x, y) \in C$; 反之, 若 $(x, y) \in C$, 则有 $x \leq y$ 。这就是说, C 可看作是介于集合 A 与集合 B 之间的一种联系, A 中的元素 x 和 B 中的元素 y 是否具有“ $\leq$ ”关系, 完全等价于 (x, y) 是否属于集合 C , 由此启发我们如何描述“关系”这一概念。

一、二元关系

定义 2.1 对集合 A 和 B , $A \times B$ 的任一子集称为 A 到 B 的一个二元关系, 记作 R 。若 $(x, y) \in R$, 称 x 与 y 符合关系 R , 记为 xRy , 若 $(x, y) \notin R$, 称 x 与 y 不符合关系 R , 记为 $x \not R y$ 。在 $A = B$ 时, $A \times A$ 的任一子集称为 A 上的一个二元关系。二元关系可简称为关系。

由定义知, 之所以称为二元关系, 是因为这种性质涉及且仅涉及两个元素是否有此性质。

例 2.1 设 $\mathbf{Z}$ 表示整数集合, 整数间的整除关系“ $|$ ”。 $m | n \Leftrightarrow m$ 能整除 n ($m, n \in \mathbf{Z}$)。就是 $\mathbf{Z}$ 上的一个二元关系。

如设 C 为正整数集 $\mathbf{Z}^+$ 某个子集, 则 C 上的整除关系定义为: $D_C = \{(x, y) | x, y \in C \text{ 且 } x | y\}$ 。比如设 $C = \{1, 3, 6, 9\}$ 则 $D_C = \{(1, 1), (1, 3), (1, 6), (3, 3), (3, 6), (3, 9), (6, 6), (9, 9)\}$ 。

例 2.2 设实数集 $\mathbf{R}$ 中的关系:

$$C = \{(x, y) | 2x - 5y = 8\}.$$

集 C 是 xOy 平面上的直线, 因此, 我们说 x, y 之间的关系是 xOy 平面上的平面点集上一个二元关系, 且是直线关系 (或线性关系)。

例 2.3 设 $f: A \rightarrow B$ 则映射就是 A 与 B 的一个二元关系:
 $\forall x \in A, y \in B, xfy \Leftrightarrow f(x) = y$ 。

于是, 映射是一个特殊的二元关系。即 $\forall x \in A$, 有惟一的 $y \in B$, 使 xfy 。

把二元关系这个概念加以推广可得如下 n 元关系的定义。

定义 2.2 设 $n \in \mathbf{N}$ 且 $n > 1$, $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 n 个集合, 则 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 的任一子集称为从 A_1 到 A_n 上的一个 n 元关系。

二、3个特殊的关系

下面定义 3 个 A 上的特殊的关系。

定义 2.3 对任意的集合 A ,

(1) A 上的恒等关系 I_A 定义为 $I_A = \{(x, x) | x \in A\}$ 。

(2) A 上的全域关系 (全关系) E_A 定义为:

$$E_A = \{(x, y) | x \in A \text{ 且 } y \in A\}.$$

(3) 空集 $\emptyset$ 称为 A 上的空关系。

例如: 设 $A = \{1, 3\}$ 则

$$I_A = \{(1, 1), (3, 3)\},$$

$$E_A = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3)\}.$$

三、关系的定义域和值域

设 S 是从 A 到 B 的一个二元关系, 通常并非是 A 和 B 中所有的元素都出现在 S 的有序对中。例如, 设 A 和 B 都是实数集 $\mathbf{R}$, $S = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R} \text{ 且 } x^2 + y^2 = 1\}$, S 中的所有元素构成了坐标平面上的单位圆。显然 S 是 $\mathbf{R}$ 上的关系 但 $\forall (x, y) \in S$,