初 等 数 学

主编　唐　敏　田长明

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

初等数学 / 唐敏，田长明主编. —成都：电子科技大学出版社，2004. 9

ISBN 7–81094– 642 – 0

Ⅰ. 初… Ⅱ. ①唐… ②田… Ⅲ. 初等数学–高等学校–教材 Ⅳ. 012

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 094720 号

内容提要

本书是根据教育部和国家民委颁布的大学预料数学教学大纲，按照大学预科阶段数学教学要求规定的性质和任务而编写的教材，由西南民族大学唐敏、田长明担任主编。本书以大学预科学生为教学对象，主要介绍了函数、三角函数、方程、不等式、排列、组合、二项式定理、数列、复数、一元 n 次多项式、平面解析几何、行列式与线性方程组。

全书贯穿了“模块”的思想，各校可根据自己的需要选择不同的模块组织教学。本书由浅入深、循序渐进地组织教材内容，结构合理。同时加强了应用，例题和课后习题丰富，语言通俗易懂，便于自学。本书中的探索与思考，鼓励学生探索新问题，思考解决问题的方法。

本书除供高校各级各类预科学生使用外，还适用于师范专科学生、职高学生、成人大专学生、中学教师进修培训和青年自学时使用和参考。

初 等 数 学

主编 唐 敏 田长明

出 版：电子科技大学出版社（成都建设北路二段四号 邮编：610054）
责任编辑：汤云辉
发 行：新华书店经销
印 刷：四川省文瑞印务有限责任公司
开 本：787mm×1092mm 1/16 印张 14.5 字数 353 千字
版 次：2004 年 9 月第一版
印 次：2004 年 9 月第一次印刷
书 号：ISBN 7-81094-642 - 0 / O • 36
印 数：1—2000 册
定 价：27.50 元

前　言

本书是根据教育部和国家民委颁布的大学预科数学教学大纲，按照大学预科阶段数学教学要求规定的性质和任务，为满足大学预科数学教学的需要而编写的教材。

本书是以大学预科学生为教学对象，从大学预科学生的实际出发，结合本专科数学教学所需的基础知识来选材编写的，具有较强的目标性。教材的顺序是根据大学预科学生的认识规律来安排的。

本书使用通俗易懂的语言，由浅入深、由易到难地介绍教材内容。

本书配备了丰富的实例和课后练习，每章末给出了小结，帮助学生掌握本章的知识和技能。

本书加强了数学在日常生活等方面的应用，把数学知识和实际问题有机地结合在一起，帮助学生提高分析解决问题的能力。

本书中的探索与思考，鼓励学生探索新问题，思考解决问题的方法。

本书突出了“模块”的思想，有利于不同的学校根据自己的师资力量、办学条件和教学对象灵活选择不同的模块组织教学。

本书充分发挥了大学预科阶段的数学教学是夯实基础，承上启下，完成从初等数学到高等数学，从初等数学的学习方法到高等数学的学习方法的过渡作用。

本书由西南民族大学唐敏、田长明担任主编，冀小明、曾纯一参加了本书的编写工作。其中第 1 章至第 8 章由唐敏编写，第 9 章由田长明编写，第 10 章由冀小明编写，曾纯一参加了部分习题的选编工作。

在本书的编写过程中，得到了西南民族大学各级领导的大力支持，在此谨致谢意。

本书除供高校各级各类预科学生使用外，还适用于师范专科学生、职高学生、成人大专学生、中学教师进修培训和青年自学时使用和参考。

由于作者水平有限，时间短促，书中难免存在不妥之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

2004 年 8 月

目　录

第 1 章　函　　数

§ 1.1　集　　合

1. 集合的概念

集合是现代数学中最基本的概念之一，它是从日常生活和生产活动中抽象出来的一个数学概念．为了帮助理解这个概念，先研究如下问题：

① 所有不大于 6 的正整数；

② 与一个角 α 的两边距离相等的所有点；

③ 整式 $3a+2b$，a^2+b^2，$(a-b)^2$ 的全体；

④ 所有等边三角形；

⑤ 某校计算机室的所有计算机．

它们分别是由一些数、一些点、一些整式、一些图形、一些物体组成的．虽然它们是 5 个完全不同的问题，但是它们有一个共同的特点，就是每个问题讨论的事物都具有某种属性．

一般地，集合(有时也简称集）就是具有某种属性(或满足某种条件)的事物的全体．组成这个集合的事物称为该集合的元素．

上面 5 个问题讨论的事物分别组成 5 个集合．第①个集合是由 6 个数 1、2、3、4、5、6 组成的，该集合的元素就是这 6 个数．第②个集合是由平面上的点组成的，该集合的元素就是指定角平分线上的所有点．第③个集合是由 3 个整式 $3a+2b$，a^2+b^2，$(a-b)^2$ 组成的，该集合的元素就是这 3 个整式．第④个集合是由等边三角形组成的，所有等边三角形都是该集合的元素．第⑤个集合是由指定计算机室内的计算机组成的，该集合的元素是这些计算机．

一个给定的集合，必须符合下列规则：

① 集合中的元素具有确定性．即对任何一个事物，能够判断该事物是不是这个集合的元素．例如，某班身高 1.70 米的所有学生可以组成一个集合，但某班高个子学生不能组成一个集合．

② 集合中的元素具有互异性．即集合中任意两个元素都是不同的，同一个元素不能在一个集合中重复出现．例如，由方程 $(x-1)^2(x+1)=0$ 的根组成的集合只有两个元素 1 和 -1．

③ 集合中的元素具有无序性．即同一个集合中的元素之间没有顺序关系，元素相同但元素的排列顺序不同的集合实际上是同一个集合．例如，集合$\{1，3，5，2，4，6\}$和$\{6，5，4，3，2，1\}$与$\{1，2，3，4，5，6\}$都是同一个集合．

2. 集合的表示法

集合通常用大写字母 A、B、C、…表示；集合的元素用小写字母 a、b、c、…表示．如果 a 是集合 A 的元素就记作 $a\in A$ (读作 a 属于 A)；如果 a 不是集合 A 的元素就记作 $a\notin A$ (或

$a \bar{\in} A$，读作 a 不属于 A).

表示集合的方法，常用的有列举法和描述法两种.

(1) 列举法

把集合的所有元素既不重复、也不遗漏地写在大括号内，元素之间用逗号分隔，这种表示方法称为列举法．列举法实质上就是把集合的元素一一列举出来.

例 1　所有小于 5 的自然数组成的集合 A 可以表示为：

$A=\{1，2，3，4\}$.

例 2　由字母 a、b、c、d、e 组成的集合 B 可以表示为：

$B=\{a，b，c，d，e\}$.

例 3　掷一枚钱币，出现正面记作"正"，出现反面记作"反"．连续两次掷一枚钱币，出现正面反面的所有结果组成的集合 C 可以表示为：

C＝{(正、正)，(正、反)，(反、正)，(反、反)}.

(2) 描述法

把集合所有元素的属性用语言或式子描述出来，写在大括号内，这种表示方法称为描述法.

用描述法表示集合时，通常写成如下形式：

{集合元素具有的属性或满足的条件} 或 {x | x 具有的属性或满足的条件}.

后一种表示法中，x 表示集合中的任意一个元素，分隔符" | "右边是 x 具有的属性或满足的条件.

例 4　所有直角三角形组成的集合 A 可以表示为：

A＝{直角三角形}.

例 5　方程 $x^2-5x+6=0$ 的根组成的集合 B 可以表示为：

$B=\{x \mid x^2-5x+6=0\}$.

例 6　直线 $x+y-1=0$ 上的所有点组成的集合 C 可以表示为：

$C=\{(x，y) \mid x+y-1=0\}$.

3. 几类特殊的集合

(1) 有限集和无限集

含有有限个元素的集合称为有限集，含有无限个元素的集合称为无限集．上面例 1 和例 2 中的集合都是有限集，而例 4 和例 6 的集合是无限集．有限集通常使用列举法来表示，无限集通常使用描述法来表示.

(2) 数集和点集

许多事物都可以组成集合，数学中通常讨论的是数集和点集.

数组成的集合称为数集．为了方便使用，几个特定的数集通常用如下符号表示：

N 表示全体自然数的集合(简称自然数集)，即 $N=\{n \mid n$ 是自然数$\}$.

Z 表示全体整数的集合(简称整数集)，即 $Z=\{x \mid x$ 是整数$\}$.

Q 表示全体有理数的集合(简称有理数集)，即 $Q=\{x \mid x$ 是有理数$\}$.

R 表示全体实数的集合(简称实数集)，即 $R=\{x \mid x$ 是实数$\}$.

由点组成的集合称为点集．例如前面第②个问题研究的集合就是由这个角的角平分线上的所有点组成的点集．又如，正比例函数 $y=kx\ (k\neq0)$的图像，是由直角坐标平面内满足

函数关系式 $y=kx$ $(k\neq0)$的所有有序实数对$(x，y)$的对应点组成的直线上的点的集合.

(3) 空集

不含有任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$. 例如，{小于零的正整数}是空集，$\{x\mid x^2+1=0，且 x\in R\}$也是空集，而集合$\{x\mid x=0\}$或$\{0\}$表示只含有一个元素 0 的集合，它不是空集.

注意：空集不能写成$\{\varnothing\}$，$\{\varnothing\}$表示由空集组成的集合.

4. 两个集合之间的关系

(1) 子集

设有两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素(即若 $x\in A$，则必有 $x\in B$)，则称集合 A 为集合 B 的子集. 记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，它们分别读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”.

由子集的概念，可得如下结论：

① 规定空集是任何一个集合的子集，即

$$\varnothing\subseteq A.$$

② 任何集合都是它本身的子集. 因为对任何一个非空集合 A，它的每一个元素都属于 A，所以，有 $A\subseteq A$.

例 7　讨论下列各组集合之间的包含关系：

① 若 $A=\{1，2，3\}$，$B=\{1，2，3，4\}$，

② 若 $A=\{-1，1\}$，$B=\{x\mid x^2-1=0\}$，

③ 数集 $N，Z，Q，R$.

解　① 根据子集的概念，有 $A\subseteq B$.

② 根据子集的概念，有 $A\subseteq B$，同时，$B\subseteq A$.

③ 对于数集，显然有以下包含关系：

$$N\subseteq Z，Z\subseteq Q，Q\subseteq R.$$

例 8　写出集合$\{0，1，2\}$的所有子集.

解　集合$\{0，1，2\}$的所有子集为：

$$\varnothing，\{0\}，\{1\}，\{2\}，\{0，1\}，\{0，2\}，\{1，2\}，\{0，1，2\}.$$

(2) 真子集

如果集合 A 是集合 B 的子集，并且集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A，则称集合 A 是集合 B 的真子集. 记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

显然，集合 $A=\{1，2，3\}$是集合 $B=\{1，2，3，4\}$的真子集，自然数集 N 是整数集 Z 的真子集，但集合 $A=\{-1，1\}$不是 $B=\{x\mid x^2-1=0\}$的真子集.

通常用封闭的曲线围起来的图形表示集合，图形中的点表示元素. 集合间的包含关系也可用类似的直观图形来表示. 例如，$A\subset B$ 可以表示为图 1-1.

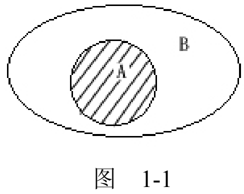

图　1-1

对于两个集合 A、B，如果 $A\subseteq B$，并且 $B\subseteq A$，则称集合 A 与 B 相等，记作 $A=B$，读作“集合 A 等于集合 B”.

例 9　假设集合 $A=\{-1，1\}$，$B=\{x\mid x^2-1=0\}$，证明 $A=B$.

证明　任取 $x\in A$，则 x 必定是方程 $x^2-1=0$ 的根，所以

有

$x\in B$,

所以，有

$A\subseteq B$, ①

另一方面，任取 $x\in B$，则 x 满足方程 $x^2-1=0$，解这个方程，得

$x=1$ 或 $x=-1$,

所以，

$x\in A$,

所以，

$B\subseteq A$, ②

由①和②可知，

$A=B$.

5. 集合的运算

(1) 交集

设 A 和 B 是两个集合，则它们共有的元素组成的集合称为集合 A 与 B 的交集．记作 $A\cap B$(读作“A 交 B”)，即有

$$A\cap B=\{x\,|\,x\in A，且\ x\in B\}.$$

图 1-2 是两个集合的交集的示意图，图中的阴影部分表示集合 A 与 B 的交集．

交集有下列性质：

① $A\cap B\subseteq A$,

② $A\cap B\subseteq B$,

③ $A\cap A=A$,

④ $A\cap\varnothing=\varnothing$.

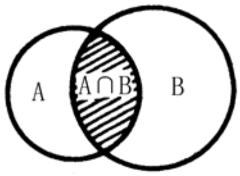

图　1-2

例 10　设 $A=\{a，b，c\}$，$B=\{a，b，d\}$，求 $A\cap B$.

解　$A\cap B=\{a，b\}$.

例 11　设 $A=\{x\,|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x\,|\,x>0\}$，求 $A\cap B$.

解　$A\cap B=\{x\,|-1\leqslant x\leqslant 1\}\cap\{x\,|\,x>0\}=\{x\,|\,0<x\leqslant 1\}$.

图 1-3 就是这个交集的示意图．

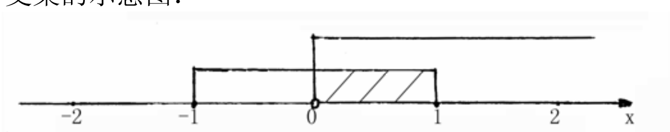

图　1-3

(2) 并集

设 A 和 B 是两个集合，则它们的所有元素组成的集合称为集合 A 与 B 的并集．记作 $A\cup B$(读作“A 并 B”)，即有

$$A\cup B=\{x\,|\,x\in A，或\ x\in B\}.$$

图 1-4 是两个集合的并集的示意图，图中的阴影部分表示集合 A 与 B 的并集．

图　1-4

并集有下列性质：

① $A \subseteq A \cup B$，

② $B \subseteq A \cup B$，

③ $A \cup A = A$，

④ $A \cup \varnothing = A$.

例 12　设 $A=\{x \mid -1<x<2\}$，$B=\{x \mid 1<x<3\}$，求 $A \cup B$.

解　$A \cup B=\{x \mid -1<x<2\} \cup \{x \mid 1<x<3\}=\{x \mid -1<x<3\}$.

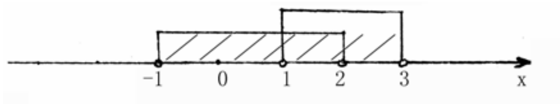

图　1-5

图 1-5 就是这个并集的示意图.

例 13　设 $A=\{1, 2\}$，$B=\{-1, 0, 1\}$，$C=\{-2, 0, 2\}$，求① $A \cup B$，② $A \cup B \cup C$.

解　① $A \cup B=\{1, 2\} \cup \{-1, 0, 1\}=\{-1, 0, 1, 2\}$，

② $A \cup B \cup C=(A \cup B) \cup C=\{-1, 0, 1, 2\} \cup \{-2, 0, 2\}=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

注意：在 $A \cup B$ 中，A 与 B 共有的元素只能出现一次.

(3) 差集

设 A 和 B 是两个集合，则属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的集合称为集合 A 与 B 的差集．记作 $A-B$(读作"A 与 B 的差集")，即有

$$A-B=\{x \mid x \in A, \text{且 } x \notin B\}.$$

图 1-6 是两个集合的差集的示意图，图中的阴影部分表示集合 A 与 B 的差集.

差集有下列性质：

① $A-B \subseteq A$，

② $A-A=\varnothing$，

③ $A-\varnothing=A$.

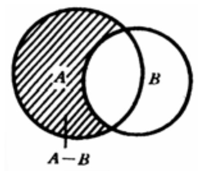

图　1-6

例 14　设 $A=\{1, 2, 3, 4, \}$，$B=\{1, 3, 5, 7\}$，求① $A-B$，② $B-A$.

解　① $A-B=\{2, 4\}$，

② $B-A=\{5, 7\}$.

(4) 补集

在研究集合与集合间的关系时，这些集合常常是某一个给定集合的子集，这个给定的集合就称为全集．全集是由所研究的问题而定的，它含有所要研究的各个集合的全体元素．例如，研究元素是整数的集合之间的关系，可以取全集为整数集 Z; 研究元素是实数的集合之间的关系，可以取全集为实数集 R.

已知全集 I，集合 $A \subseteq I$，由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合，称为集合 A 在 I 中的补集，记作 $\overline{A}$(读作"A 补")，即

$$\overline{A}=\{x \mid x \in I, \text{且 } x \notin A\}.$$

图 1-7 中的长方形表示全集 I，圆内表示集合 A，阴影部分表示集合 A 在 I 中的补集.

补集有如下性质：

① $A\cup\overline{A}=I$，

② $A\cap\overline{A}=\varnothing$，

③ $\overline{A}=I-A$，

④ $\overline{\overline{A}}=A$.

其中，$\overline{\overline{A}}$表示$\overline{A}$在全集I中的补集.

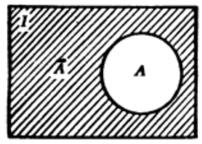

图 1-7

例 15　已知全集I为实数集，$A=\{x\,|\,x^2-1<0\}$，求$\overline{A}$.

解　$\overline{A}=I-A=\{x\,|\,x^2-1\geqslant 0$，且$x\in R\}=\{x\,|\;\;|x|\geqslant 1\}$.

例 16　设$I=\{1，2，3，4，5，6\}$，$A=\{1，2，3\}$，$B=\{2，4，6\}$．求① $\overline{A}$，② $\overline{B}$，③ $\overline{A}\cup\overline{B}$，④ $\overline{A}\cap\overline{B}$.

解　① $\overline{A}=I-A=\{4，5，6\}$，

② $\overline{B}=I-B=\{1，3，5\}$，

③ $\overline{A}\cup\overline{B}=\{4，5，6\}\cup\{1，3，5\}=\{1，3，4，5，6\}$，

④ $\overline{A}\cap\overline{B}=\{4，5，6\}\cap\{1，3，5\}=\{5\}$.

6. 集合的运算定律

(1) 交换律

$A\cap B=B\cap A$，

$A\cup B=B\cup A$.

(2) 结合律

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$，

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

(3) 分配律

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(4) 对偶律(De Morgan 定律)

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

上面的运算定律，都可以根据两集合相等的定义来证明，并且，都可以推广到有限多个集合的情形.

习题 1.1

1. 已知$A=\{1，2，3，4\}$，$B=\{2，5，6，8\}$，求$A\cap B$，$A\cup B$.

2. 设$I=\{1，2，3，4，5，6\}$，$A=\{1，2\}$，$B=\{1，3，5\}$，求．$A\cap B$，$\overline{A}$，$\overline{B}$.

3. 设$I=\{1，2，3，4，5，6，7，8\}$，$A=\{3，4，5\}$，$B=\{4，7，8\}$，求(1) $\overline{A}$，(2) $\overline{B}$，(3) $\overline{A}\cup\overline{B}$，(4) $\overline{A}\cap\overline{B}$.

4. 设N是全体自然数的集合，且$x\in N$，列举下列集合含有的元素：

(1) $A=\{x\,|\,2\leqslant x\leqslant 4\}$；　　(2) $B=\{x\,|\,x-1=0，x-2=0\}$.

5. 证明$A\cup B=B\cup A$.

6. 用列举法表示下列集合：

(1) $A=\{x\mid 5<x<8,\ x\in N\}$；　　　　　　　　　　(2) $B=\{x\mid x-3=0,\ x\in R\}$；

(3) $C=\{x\mid\ \ |x|<5,\ x\in Z\}$.

7. 求下列集合的元素：

(1) $A=\{x\mid x+1<6=\cap\{x\mid x>3,\ x\in N\}$；

(2) $B=\{x\mid x+2<10\}\cap\{x\mid x+1>5,\ x\in N\}$.

8. 设 $I=R$，$A=\{x\mid x\leqslant 6\}$，求：(1) $A\cap\varnothing$，$A\cup\varnothing$；(2) $A\cap R$，$A\cup R$；(3) $\overline{A}$；(4) $A\cap\overline{A}$，$A\cup\overline{A}$.

9. 用列举法表示下列集合的元素$(x,\ y)$：

(1) $A=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2=-1,\ x\in R,\ y\in R\}$；

(2) $B=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2=13,\ x\in Z,\ y\in Z\}$.

§1.2　实　数　集

1. 有理数与无理数

数的概念是随着实际需要逐渐发展起来的．由于计数和测量的需要，人们引入了正整数(即自然数)、正分数、负整数、负分数和零，它们统称为有理数．有理数可以表示为$\dfrac{p}{q}$的形式(其中 p，q 是互质的整数，且 $q\neq 0$)，也可以表示为有限小数或无限循环小数的形式．除了这种形式的数以外，还存在着不能表示为上述形式的数，如$\sqrt{2}=1.4142\cdots$，$\pi=3.14159\cdots$等，这些数称为无理数．有理数与无理数统称为实数．每一个实数可用数轴上一个点表示，且不同的实数可以用不同的点表示．反之，数轴上的每一点就表示一个实数，且不同的点表示不同的实数．也就是说，数轴上的全体点与全体实数之间有一一对应关系．

若没有说明，以后都把集合$\{x\mid a<x<b,\ x\in R\}$简记为$\{x\mid a<x<b\}$.

例 1　设 $A=\{x\mid -1<x<2=$，$B=\{x\mid 1\leqslant x<3=$，求

(1) $A\cup B$，　　　　　　　　(2) $A\cap B$.

解　(1) $A\cup B=\{x\mid -1<x<2\}\cup\{x\mid 1\leqslant x<3\}$

$=\{x\mid -1<x<3=$

(2) $A\cap B=\{x\mid -1<x<2\}\cap\{x\mid 1\leqslant x<3\}$

$=\{x\mid 1\leqslant x<2\}$

例 2　设 $A=\{x\mid -4<x<-\dfrac{1}{2}\}$，$B=\{x\mid x\leqslant -4\}$，求

(1) $A\cup B$，　　　　　　　　(2) $A\cap B$.

解　(1) $A\cup B=\{x\mid -4<x<-\dfrac{1}{2}\}\cup\{x\mid x\leqslant -4\}$

$=\{x\mid x<-\dfrac{1}{2}\}$.

(2) $A\cap B=\{x\mid -4<x<-\dfrac{1}{2}\}\cap\{x\mid x\leqslant -4\}$

$=\varnothing$.

例 3　设 $I=R$，$A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$，求$\overline{A}$.

解　$\overline{A}=\{x\mid x<1=\cup\{x\mid x>2\}$.

或

$$\overline{A}=\{x\mid x<1 \text{ 或 } x>2\}.$$

2. **实数的基本性质**

下面列举实数的一些重要性质，这都是今后常常要用到的：

① 实数具有顺序性，即任意两个实数可以比较大小．也就是当 $x\in R$，$y\in R$ 时，$x>y$，$x=y$，$x<y$ 中有一个且仅有一个成立．

② 实数具有稠密性，即在任何两个不同的实数之间，必存在另一个实数．也就是对任意实数 a，b，若 $a<b$，则必存在数 c 使 $a<c<b$．

③ 实数具有连续性，即在实数集内的数与数轴上的点建立了一一对应关系，因而数轴又叫做实数轴．

④ 实数对加、减、乘、除(除数不为零)、乘方这 5 种运算是封闭的．即任意两个实数进行加、减、乘、除(除数不为零)、乘方运算的结果仍是实数．

⑤ 实数的运算规律：

交换律：$a+b=b+a$，$ab=ba$；

结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$，$(ab)c=a(bc)$；

分配律：$a(b+c)=ab+ac$；

指数律：设 m、n 是有理数，则 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$，$(a^m)^n=a^{mn}$，$(ab)^n=a^n\cdot b^n$.

习题 1.2

1. 设 $A=\{x\mid x+2>0\}$，$B=\{x\mid x-3<3\}$，求 $A\cap B$.
2. 设 $A=\{x\mid x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid x<1\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，并在数轴上将其表示出来．
3. 求{有理数}∩{无理数}，{有理数}∪{无理数}．
4. 设 $I=R$，且 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$，判断下列命题哪些是真的：

(1) $1\in A$；　　(2) $2\notin A$；　　(3) $2\in A$；　　(4) $4\in\overline{A}$.

§1.3　对　　应

1. **单值对应**

设 A、B 是两个集合，如果按照某种对应关系 f，使 A 的每一个元素 x，在 B 中都有唯一的一个元素 y 和它对应，则称这种对应关系为单值对应(也称为映射)．在单值对应下，若 A 中元素 a 对应 B 中的元素 b，则 a 称为 b 的原像，b 称为 a 的像．

例如，$A=\{1，2，3，4\}$，$B=\{3，4，5，6，7，8，9\}$，则集合 A 与集合 B 之间的对应关系 f：$x\to y=2x+1$ 就是一个从 A 到 B 的单值对应．

2. **一一对应**

设 A、B 是两个集合，f 是从集合 A 到集合 B 的单值对应，如果对于集合 A 的不同元素，在 B 中有不同的象，而且 B 中的每一个元素都有原像，这个单值对应就称为从 A 到 B 的一一对应(也称为一一映射)．

例如，$A=\{1，2，3，4\}$，$B=\{2，4，6，8\}$，则集合 A 与集合 B 之间的对应关系 f：$x\to y=2x$ 就是一个从 A 到 B 的一一对应．

3. **逆对应**

设 A、B 是两个集合，f 是从集合 A 到集合 B 的一一对应．对于集合 B 中的每一个元素 b，令 b 在 A 中的原像 a 和它对应，这样建立的对应就称为 f 的逆对应(也称为逆映射)，记作 f^{-1}．

例如，$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,4,6,8\}$，f：$x\to y=2x$ 是从 A 到 B 的一一对应，则 f^{-1}：$y\to x=\dfrac{y}{2}$ 就是 f 的逆对应．如图 1-8 所示．

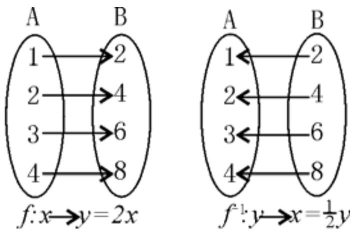

图　1-8

习题 1.3

1. 下列各对应，哪个是从集合 A 到集合 B 的单值对应?

(1) $A=\{x\,|\,x\in Q\}$，$B=\{y\,|\,y\geqslant 0，y\in R\}$，$f$：$x\to y=|x|$；

(2) $A=\{1，2，3，\cdots\}$，$B=\{\dfrac{1}{2}，\dfrac{2}{3}，\dfrac{3}{4}，\cdots\}$，$f$：$x\to y=\dfrac{x}{x+1}$　$x\in A$，$y\in B$；

(3) $A=\{0，\dfrac{\pi}{2}，\pi，\dfrac{3\pi}{2}，2\pi\}$，$B=\{-1，1\}$，$f$：$x\to y=\cos x$　$x\in A$，$x\in B$.

2. 下列各对应，哪一个是一一对应?

(1) f：$x\to y=x^2+1$，$x\in R$，$y\in R^+$；

(2) f：$x\to y=|x-3|$，$x\in R^+$，$y\in R^+$；

(3) f：$x\to y=\lg x$，$x\in\{x\,|\,x>1\}$，$y\in R^+$.

3. 在下列两集合 A 和 B 之间建立一种一一对应关系 f，并求其逆对应 f^{-1}.

(1) $A=\{1，2，3，4，5\}$，$B=\{8，9，10，11，12\}$；

(2) $A=\{1，2，3，4，\cdots\}$，$B=\{1，3，5，7，\cdots\}$.

§1.4　函　　数

函数是描述客观世界中变量间的依赖关系的工具，是高等数学的主要研究对象，是现代科学技术中不可缺少的内容．

1. **函数概念**

定义一：在某研究过程中有两个变量 x，y．如果对于 x 在某个数集 D 内的每一个确定的值，按照某个对应法则 f，在数集 Y 内都有唯一确定的值 y 和它对应，那么 y 就称为 x 的函数．记作

$$y=f(x)\qquad (x\in D).$$

x 称为自变量，y 称为因变量．x 的取值范围称为函数的定义域，所有和 x 对应的 y 的值组成的集合 M 称为函数的值域．

定义二：设 D 和 Y 是两个数集，若对于每一个数 $x\in D$，依据某一对应法则 f，都有唯一的一个数 $y\in Y$ 与之对应，则称 f 是从 D 到 Y 内的一个函数．记作

$$y=f(x) \qquad (x\in D).$$

x 称为自变量，y 称为因变量．x 的取值范围称为函数的定义域，所有和 x 对应的 y 的值组成的集合 M 称为函数的值域．

这两个函数的定义本质上是一样的，只是各自的侧重点不同．定义一侧重于从运动的观点描述函数的定义，定义二侧重于从映射的观点描述函数的定义．

若点 $x_0\in D$，则称函数 $f(x)$在点 x_0 有定义，其函数值为 $f(x_0)$．若点 $x_0\notin D$，则称函数 $f(x)$在点 x_0 无定义．

显然，函数的值域 $M=\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}\subseteq Y$，并且函数是从定义域到值域的一个单值对应．

例如，函数 $y=2x+1$ 的定义域是实数集 R，值域也是 R，对应法则是 f: $x\to y=2x+1$．这个函数是一个 R 到 R 上的单值对应．

又如，二次函数 $y=x^2+3$ 的定义域是实数集 R，值域是集合$\{y \mid y\geqslant 3\}$，对应法则是 f：$x\to y=x^2+3$，这个函数是一个 R 到$\{y \mid y\geqslant 3\}$上的单值对应．

当函数的定义域和对应关系确定以后，这个函数就完全确定．因此，两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时，才被认为是相同的函数．

例如，函数 $y=x$ 与 $y=\sqrt[3]{x^3}$ 的定义域和对应关系完全相同，它们是相同的函数，而函数 $y=\dfrac{x}{x}$ 与 $y=1$ 是不同的函数；函数 $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$ 也是不同的函数．

2. 函数的表示法

表示函数对应关系的方法，常用的有以下 3 种：

(1) 解析法

解析法是用数学式子来表示自变量和因变量之间的对应关系．以后主要研究用解析法表示的函数．

例如，在自由落体运动中，物体下落的距离 S 随时间 t 而变，它们之间的对应关系可以用解析法表示为 $S=\dfrac{1}{2}gt^2$．

有些函数在它们的定义域内不能用一个解析式表示，而是在定义域的各个小区间内分别用相应的解析式表示，这种函数称为分段函数．例如，函数

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & -2\leqslant x<0 \\ -x^2 & 0\leqslant x\leqslant 1 \end{cases}$$

用两个不同的解析式表示自变量和因变量之间的对应关系，它就是一个分段函数．在分段函数中，对自变量 x 的不同取值范围，分别使用不同的解析式．

(2) 列表法

列表法是用表格的形式表示自变量和因变量之间的对应关系．平方表、立方表、对数表、开平方表、三角函数表等实质上都是用列表法表示的函数．

(3) 图像法

图像法是利用图像的形式表示自变量和因变量之间的对应关系.

例如，某气象台为了掌握某地气温的变化情况，使用自动记录器将每天的气温记录下来，直接画出一条如图 1-9 所示的曲线（图中只画出某一天的那一段曲线）.

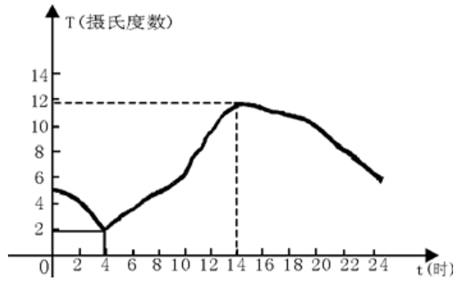

图　1-9

根据这条曲线，可以确定任一时刻 t 的气温．首先在横轴上找出与时刻 t 对应的点，然后经过这一点作纵轴的平行线，它与曲线的交点 P 的纵坐标 T 就是这个时刻的气温．可见，这条曲线可以表示气温 T 与时间 t 的对应关系，而这种对应关系却难于用解析法表示.

以上 3 种方法是表示函数的常用方法，但请注意，并不是所有函数都能用这 3 种方法表示．有些函数自变量和因变量之间的对应关系，并不是通过某种运算关系表达的，而是用一句话给出的.

例 1　“对任意 $x\in R$，对应的 y 是不超过 x 的最大整数”．显然，对每一个 $x\in R$ 都对应唯一的一个 y，这个对应关系是一个函数，记为 $y=[x]$，如 $[2.5]=2$，$[1]=1$，$[-\pi]=-4$ 等等，如图 1-10 所示.

例 2　如果 $x>0$ 时，令 $y=1$；如果 $x=0$ 时，令 $y=0$；如果 $x<0$ 时，令 $y=-1$．显然，这个对应关系是一个函数，记为

$$y=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

如图 1-11 所示.

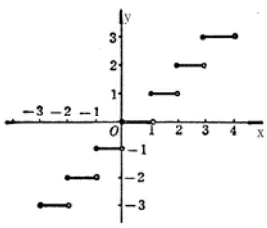

图　1-10

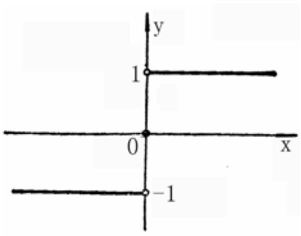

图　1-11

例 3　对任意 $x\in R$，当 x 是有理数时，对应的 y 的值是 1；当 x 是无理数时，对应的 y 的值是 -1，该对应关系确定的函数即是

$$y=\begin{cases}1 & x\text{ 是有理数}\\ -1 & x\text{ 是无理数}\end{cases}$$

这些函数的自变量和因变量之间的对应关系，使用解析法、列表法和图像法都不易表示，而是使用一句话给出的.

3. 函数的定义域

函数的定义域可以有多种表示方式，通常使用集合、不等式和区间表示.

(1) 区间

区间是特殊的数集．常用的区间有开区间、闭区间、半开半闭区间、无穷区间等．设 a、$b\in R$，且 $a<b$，则各区间的表示如下：

ⅰ．开区间．满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a、b 为端点的开区间(如图 1-12(1)所示)，记为$(a，b)$，即

$$(a，b)=\{x\mid a<x<b=.$$

ⅱ．闭区间．满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a、b 为端点的闭区间(如图 1-12(2)所示)，记为$[a，b]$，即

$$[a，b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

ⅲ．半开半闭区间．类似地

$$(a，b)=\{x\mid a<x\leqslant b\},$$

$$[a，b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}.$$

称为以 a、b 为端点的半开半闭区间(如图 1-12(3)、(4)所示)．

这些区间在数轴上的表示如图 1-12 所示．

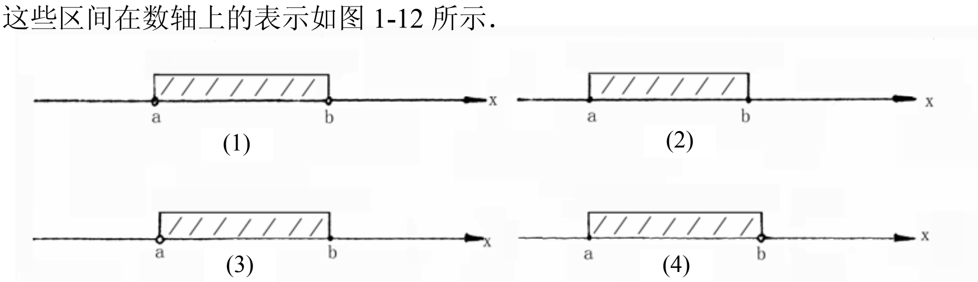

图　1-12

以上为有限区间，有限区间右端点与左端点之差 $b-a$ 称为区间的长度．

ⅳ．无穷区间．除有限区间外，还常常用到无穷区间，它们是：

$$(a，+\infty)=\{x\mid x>a\},\qquad(1)$$

$$[a，+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\},\qquad(2)$$

$$(-\infty，b)=\{x\mid x<b\},\qquad(3)$$

$$(-\infty，b]=\{x\mid x\leqslant b\},\qquad(4)$$

$$(-\infty，+\infty)=\{x\mid x\in R\}.\qquad(5)$$

这些无穷区间在数轴上的表示如图 1-13 所示．

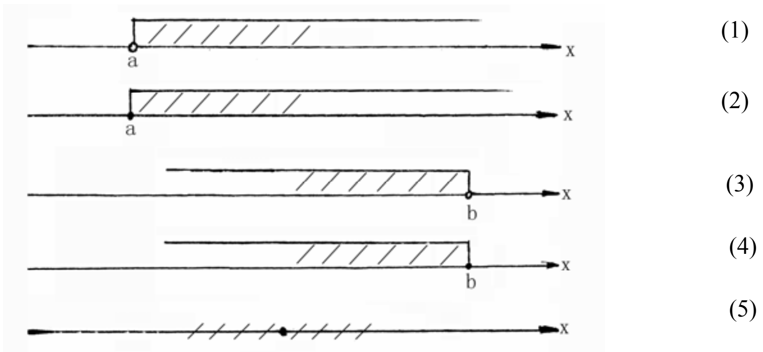

图　1-13