第四届中国图书奖获奖图书

抽象空间常微分方程

郭大钧　孙经先　著

山东科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

抽象空间常微分方程/ 郭大钧, 孙经先著 .—2 版 . 济南: 山东科学技术出版社, 2002 .10
ISBN 7 - 5331 - 0491 - 9

Ⅰ.抽 ... Ⅱ.①郭 ...②孙 ... Ⅲ.抽象空间 - 常微分方程 Ⅳ.0175 .15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 073324 号

抽象空间常微分方程

郭大钧 孙经先 著

出版者:山东科学技术出版社
地址:济南市玉函路 16 号
邮编:250002 电话:(0531)2065109
网址:www .lkj .com .cn
电子邮件:sdkj@jn-public .sd .cninfo .net
发行者:山东科学技术出版社
地址:济南市玉函路 16 号
邮编:250002 电话:(0531)2020432
印刷者:山东新华印刷厂潍坊厂
地址:潍坊市潍州路 753 号
邮编:261008 电话:(0536)8236911

开本:850mm×1168mm 1/ 32
印张:10
字数:215 千
版次:2002 年 10 月第 2 版第 2 次印刷
印数:1001 - 3500

ISBN7 - 5331 - 0491 - 9 O·31
定价: 19 .00 元

第 二 版 序

第二版基本上是第一版的重印。在第九章中我们增加了一节(即节 9.5),论述一类无穷边值问题的最大解和最小解。另外,在书末尾的参考文献中,我们增加了反映近年来重要工作的若干论文。

本书再版过程中,得到山东科学技术出版社的大力支持,特致谢意。我的博士生刘衍胜副教授对全书文稿进行了仔细地校阅,在此也表示感谢。

郭大钧

2002 年 4 月 20 日

于山东大学南院

前　　言

Banach 空间中的常微分方程理论是近二三十年发展起来的一个新的数学分支，它把常微分方程理论和泛函分析理论结合起来，利用泛函分析方法研究 Banach 空间中的常微分方程。它的理论在无穷常微分方程组、临界点理论、偏微分方程、不动点定理等多方面都有广泛的应用。特别是，临界点理论中常用的最速下降流线，即是以 Banach 空间常微分方程理论作基础。由于它的重要性，又比较新，故被列为我国自然科学基金重点资助的项目之一。

在我国，研究 Banach 空间常微分方程理论的人很少，到目前为止，还没有出版过一本这方面的专著。1985 年，在第五届全国非线性泛函分析会议上，我和孙经先副教授合作了《Banach 空间中的常微分方程理论》综合报告，引起了许多人的兴趣。1985 年至 1987 年，我赴美国 Texas 大学 Arlington 分校与美国这一领域的著名数学家 V .Lakshmikantham 教授合作，做了一些研究工作。孙经先副教授在国内对 Banach 空间常微分方程及其在临界点理论的应用方面做了一些工作。现将国外一些著名数学家在这一领域中所获的结果，加上我们自己做的工作，写成这本书，介绍给国内读者。本书显然可作为综合性大学和高等师范院校有关专业的研究生教材，也可供有关教师和科技工作者进行科研时参考。

本书在写作过程中，得到了国家自然科学基金和国家教委博士点基金的资助，特致谢意。

限于作者水平，书中不妥、错误之处在所难免，敬请读者批评指正。

郭大钧

1988 年 7 月 28 日

于山东大学南院

目　　录

第一章　预备知识

本章属于预备知识，介绍后面要用到的若干基本概念和结论，包括非紧性测度、中值定理、半内积等．

1.1　非紧性测度

定义 1.1.1　**设** E **是实** Banach **空间，**S **是** E **中有界集．令** $\alpha(S)=\inf\{\delta>0\mid S$ **可表为有限个集的并：**$S=\bigcup_{i=1}^{m}S_i$**，且每个** S_i **的直径** $d(S_i)$ **都不大于** $\delta\}$**．显然，**$0\leq\alpha(S)<+\infty$**．**$\alpha(S)$ **叫做** S **的非紧性测度（按** Kuratowski **意义）．**

定理 1.1.1　**非紧性测度具有下列性质**（S，T **表** E **中有界集，**a **是实数**）；

(**i**)　$\alpha(S)=0$　　S **是相对紧集**；

(**ii**)　S　T　$\alpha(S)\leq\alpha(T)$；

(**iii**)　α(瑢) = $\alpha(S)$；

(**iv**)　$\alpha(S\cup T)=\max\{\alpha(S),\alpha(T)\}$；

(**v**)　$\alpha(aS)=|a|\alpha(S)$，**其中** $aS=\{x=az\mid z\in S\}$；

(**vi**)　$\alpha(S+T)\leq\alpha(S)+\alpha(T)$，**其中** $S+T=\{x=y+z\mid y\in S,\ z\in T\}$；

(**vii**)　$\alpha(\overline{coS})=\alpha(S)$；

(ⅷ) α 关于 Hausdorff 距离

$$d_H(S_1, S_2) = \max\left\{\sup_{x\in S_1}\rho(x, S_2), \sup_{x\in S_2}\rho(x, S_1)\right\}$$

($\rho(x, S_2)$表 x 到集 S_2 的距离) 是一致连续的，即：对于任给的$\varepsilon > 0$，必有 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ 存在，使对于 E 中任二有界集 S_1，S_2，只要 $d_H(S_1, S_2) < \delta$，就有

$$|\alpha(S_1) - \alpha(S_2)| < \varepsilon. \tag{1.1.1}$$

证　(ⅰ)～(ⅶ)的证明见郭大钧〔1〕．下证(ⅷ)．任给$\varepsilon > 0$．取 $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$．对于 E 中任二满足 $d_H(S_1, S_2) < \delta$ 的有界集 S_1 与 S_2，设 $S_1 = \bigcup_{i=1}^{m} T_i$，$d(T_i) < \alpha(S_1) + \frac{\varepsilon}{3}$ ($i = 1, 2, \cdots, m$)，并令

$$Z_i = \{y\in S_2 \mid \exists\ x\in T_i, \rho(x, y) = |x - y| < \delta\}$$
$$(i = 1, 2, \cdots, m).$$

显然　$d(Z_i) \leq 2\delta + d(T_i) < \alpha(S_1) + \varepsilon$　($i = 1, 2, \cdots, m$)．

又，由 $d_H(S_1, S_2) < \delta$ 易知 $S_2 = \bigcup_{i=1}^{m} Z_i$．故得

$$\alpha(S_2) < \alpha(S_1) + \varepsilon. \tag{1.1.2}$$

同理可证

$$\alpha(S_1) < \alpha(S_2) + \varepsilon. \tag{1.1.3}$$

由(1.1.2)和(1.1.3)两式，得

$$|\alpha(S_1) - \alpha(S_2)| < \varepsilon. \tag{1.1.4}$$

一致连续性获证．□

本节以下，$I = [a, b]$ 恒表实数轴上有限闭区间，$C[I, E]$ 表从 I 到 E 的抽象连续函数空间，其范数为$\|x\| = \max_{t\in I}\|x(t)\|$．对 $H \subset C[I, E]$，我们记

$$H(t)=\{x(t)\mid x\in H\}\quad E, \tag{1.1.5}$$

$$H(I)=\{x(t)\mid x\in H,\ t\in I\}=\bigcup_{t\in I}H(t)\quad E. \tag{1.1.6}$$

定理1.1.2　**设** $H\quad C[I,E]$ **是有界的，等度连续的，则**

(a) $\alpha(H)=\alpha(H(I))$，　(b) $\alpha(H(I))=\max\limits_{t\in I}\alpha(H(t))$.

证　**先证**(a).**我们证明** $\alpha(H(I))\leq\alpha(H)$，**任给** $\varepsilon>0$.**取** $H=\bigcup\limits_{i=1}^{m}H_i$ **使** $d(H_i)<\alpha(H)+\dfrac{\varepsilon}{2}$ $(i=1,2,\cdots,m)$.**由** H **的等度连续性，可将** I **分成有限个小闭区间** I_j $(j=1,2,\cdots,n)$ **使**

$$|x(t)-x(t')|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \forall\ x\in H,\ t,t'\in I_j,$$

$$j=1,2,\cdots,n. \tag{1.1.7}$$

现令 $S_{ij}=\{x(t)\mid x\in H_i,\ t\in I_j\}$ $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$.**显然** $H(I)=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\bigcup\limits_{j=1}^{n}S_{ij}$.**又，当** $x,y\in H_i$，$t,t'\in I$ **时，由**(1.1.7)**式，我们有**

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t')|&\leq|x(t)-y(t)|+|y(t)-y(t')|\\&\leq d(H_i)+\frac{\varepsilon}{2}<\alpha(H)+\varepsilon,\end{aligned}$$

故
$$\alpha(H(I))\leq\alpha(H)+\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ **的任意性，即得** $\alpha(H(I))\leq\alpha(H)$.**下证相反的不等式** $\alpha(H)\leq\alpha(H(I))$.**任给** $\varepsilon>0$.**由** H **的等度连续性知，**I **可被有限个邻域** $V(t_i)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ **所覆盖，使得** $|x(t)-x(t_i)|<\varepsilon$ **对任何** $x\in H$，$t\in V(t_i)$ **成立**.**又，存在分解** $H(I)=\bigcup\limits_{j=1}^{m}B_j$ **使得** $d(B_j)<\alpha(H(I))+\varepsilon$，$j=1,2,\cdots,m$.**用** P **表从** $\{1,2,\cdots,n\}\quad N$ **到** $\{1,2,\cdots,m\}\quad N$ **的所有映象** $i\to\mu(i)$ **的全体，这里** N **表正整数集**.**显然，**P **是有限集**.**令**

$L_\mu = \{ x \in H \mid x(t_i) \in B_{\mu(i)},\ i = 1, 2, \cdots, n \}$. 很明显, $H = \bigcup_{\mu \in P} L_\mu$. 对于任何 $x, y \in L_\mu$ 及 $t \in I$, t 必属于某 $V(t_i)$, 从而

$$|x(t) - x(t_i)| < \varepsilon, \quad |y(t) - y(t_i)| < \varepsilon,$$

$$|x(t_i) - y(t_i)| < \alpha(H(I)) + \varepsilon .$$

于是

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq |x(t) - x(t_i)| + |x(t_i) - y(t_i)| \\ &+ |y(t_i) - y(t)| < \alpha(H(I)) + 3\varepsilon . \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

由此可知 $d(L_\mu) \leq \alpha(H(I)) + 3\varepsilon$, $\alpha(H) \leq \alpha(H(I)) + 3\varepsilon$. 由 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 得 $\alpha(H) \leq \alpha(H(I))$. 结论(a)获证 . 下证(b) . 首先注意, 由 H 的等度连续性易知, 当 $t \to t_0$ ($t, t_0 \in I$) 时, 必 $d_H(H(t), H(t_0)) \to 0$, 从而根据定理 1.1.1(ⅷ)知 $\alpha(H(t)) \to \alpha(H(t_0))$, 故 $\alpha(H(t))$ 是 t 的连续函数, 因此, $\max_{t \in I} \alpha(H(t))$ 存在 .

由于对任何 $t \in I$ 有, $H(t) \quad H(I)$, $\alpha(H(t)) \leq \alpha(H(I))$, 从而 $\max_{t \in I} \alpha(H(t)) \leq \alpha(H(I))$. 再证相反的不等式 . 任给 $\varepsilon > 0$. 由 H 的等度连续性, I 可被有限个邻域 $V(t_i)$ ($i = 1, 2, \cdots, n$) 所覆盖, 使得 $|x(t) - x(t_i)| < \varepsilon$ 对任何 $x \in H$, $t \in V(t_i)$ 成立 . 又, 易知: 对任何 $i = 1, 2, \cdots, n$, 存在分解 $H = \bigcup_{j=1}^{m} H_j^{(i)}$ (m 不随 i 而变), 使得 $H(t_i) = \bigcup_{j=1}^{m} H_j^{(i)}(t_i)$, 并且

$$d(H_j^{(i)}(t_i)) < \alpha(H(t_i)) + \varepsilon \quad (j = 1, 2, \cdots, m) . \tag{1.1.9}$$

令

$$B_{ij} = H_j^{(i)}(V(t_i)), \quad (i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, m) .$$

显然, $H(I) = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} B_{ij}$. 对 $x, y \in H_j^{(i)}$, $t, t' \in V(t_i)$, 我们有

$$|x(t)-y(t')|\leq|x(t)-x(t_i)|+|x(t_i)-y(t_i)|$$
$$+|y(t_i)-y(t')|<2\varepsilon+d(H_j^{(i)}(t_i)).$$

于是，注意到(1.1.9)式，知

$$d(B_{ij})<\alpha(H(t_i))+3\varepsilon\leq\max_{t\in I}\alpha(H(t))+3\varepsilon.$$

故得

$$\alpha(H(I))<\max_{t\in I}\alpha(H(t))+3\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性，即得 $\alpha(H(I))\leq\max_{t\in I}\alpha(H(t))$. (b)获证.
□

系 1.1.1 设 $D\subset E$ 有界，映象 $f: I\times D\to E$ 有界且一致连续. 则

$$\alpha(f(I\times B))=\max_{t\in I}\alpha(f(t,B)),\quad\forall B\subset D.\quad(1.1.10)$$

证 令 $\varphi_x(t)=f(t,x)$, $H=\{\varphi_x\mid x\in B\}$. 则 $H\subset C[I,E]$. 由 f 的有界性与一致连续性易知，H 是有界的、等度连续的；从而，根据定理 1.1.2(b)知，

$$\alpha(H(I))=\max_{t\in I}\alpha(H(t)),$$

此即(1.1.10)式. □

定理 1.1.3 (Ascoli - Arzela) 集 $H\subset C[I,E]$ 相对紧的充分必要条件是：H 是等度连续的，并且对任何 $t\in I$，集 $H(t)$ 是 E 中的相对紧集.

证 必要性：设 H 在 $C[I,E]$ 中相对紧. 显然，对任何 $t\in I$，$H(t)$是 E 中相对紧集. 下证 H 的等度连续性. 任给 $\varepsilon>0$. 由 Hausdorff 定理，存在$\{x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_m\}\subset H$，$\{x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_m\}$成为 H 的$\frac{\varepsilon}{3}$ - 网. 由 $x_i(t)$在 I 上的一致连续性知，存在 $\delta_i>0$，使当$|t-t'|<\delta_i(t,t'\in I)$时恒有$|x_i(t)-$

$x_i(t')| < \frac{\varepsilon}{3}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$. 现令 $\delta = \min\{\delta_1, \cdots, \delta_m\}$. 于是，对任何 $x \in H$，存在 x_i 使 $\|x - x_i\| = \max_{t \in I} \|x(t) - x_i(t)\| < \frac{\varepsilon}{3}$. 当 $|t - t'| < \delta$ $(t, t' \in I)$时，我们有

$$\|x(t) - x(t')\| \leq \|x(t) - x_i(t)\| + \|x_i(t) - x_i(t')\|$$
$$+ \|x_i(t') - x(t')\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

故 H 的等度连续性获证.

充分性：设 H 是等度连续的，并且对任何 $t \in I$，$H(t)$是 E 中相对紧集. 由此易知，H 是有界的，并根据定理 1.1.1 (i)知

$$\alpha(H(t)) = 0, \quad \forall\ t \in I. \tag{1.1.11}$$

现根据定理 1.1.2，我们有

$$\alpha(H) = \max_{t \in I} \alpha(I(t)). \tag{1.1.12}$$

于是，由(1.1.11)式和(1.1.12)式得 $\alpha(H) = 0$，由此，再根据定理 1.1.1 (i) 即知 H 是 $C[I, E]$ 中的相对紧集. □

1.2 中值定理与比较定理

本节中，$I = [a, b]$，E 表实 Banach 空间.

定理 1.2.1 (中值定理) 设 $x \in C[I, E]$，且除去至多可数集 $\Gamma \subset [a, b]$ 外，当 $t \in [a, b] \setminus \Gamma$ 时，$x(t)$右可微(即右导数 $x'_+(t)$存在). 则

$$x(b) - x(a) \in (b - a)\overline{co}(\{x'_+(t) \mid t \in [a, b] \setminus \Gamma\}). \tag{1.2.1}$$

证 记 $\Gamma = \{p_k;\ k = 1, 2, 3, \cdots\}$，$D = \{x'_+(t) \mid t \in [a,$

$b] \setminus \Gamma\}$. 任给 $\varepsilon>0$. 令

$$T=\Big\{ t\in [a,b] \;\Big|\; d(x(t)-x(a),(t-a)\,coD) \leq (t-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<t}2^{-k}\Big\},$$

其中 $d(\cdot,\cdot)$ 表点到集的距离. 显然 $a\in T$, 故 $T\neq$. 令 $\lambda=\sup T$. 下证 $\lambda\in T$. 事实上, 设 $t_n\in I$, $t_n\to\lambda(t_n\leq\lambda)$. 于是, 存在 $\xi_n\in coD$ 使

$$|x(t_n)-x(a)-(t_n-a)\xi_n|<(t_n-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<t_n}2^{-k}+\frac{1}{n}$$

$$\leq(\lambda-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda}2^{-k}+\frac{1}{n}\quad(n=1,2,3,\cdots).\tag{1.2.2}$$

由此, 注意到 $\{|x(t_n)|\}$ 的有界性, 即知存在 $M>0$ 使

$$|\xi_n|\leq M\quad(n=1,2,3,\cdots).\tag{1.2.3}$$

由(1.2.2)式和(1.2.3)式, 知

$$d(x(\lambda)-x(a),(\lambda-a)\,coD)\leq|x(\lambda)-x(a)-(\lambda-a)\xi_n|$$

$$\leq|x(t_n)-x(a)-(t_n-a)\xi_n|+|x(\lambda)-x(t_n)|+(\lambda-t_n)|\xi_n|$$

$$<(\lambda-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda}2^{-k}+\frac{1}{n}+|x(\lambda)-x(t_n)|+M(\lambda-t_n)$$

$$(n=1,2,3,\cdots).$$

令 $n\to\infty$ 取极限, 得

$$d(x(\lambda)-x(a),(\lambda-a)\,coD)\leq(\lambda-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda}2^{-k},\tag{1.2.4}$$

故 $\lambda\in T$. 再证 $\lambda=b$. 如不然, $\lambda<b$. 若 $\lambda\in\Gamma$, 则 $\lambda=p_m$. 由(1.2.4)式, 可取 $\xi\in coD$ 使

$$|x(\lambda)-x(a)-(\lambda-a)\xi|<(\lambda-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda}2^{-k}+\frac{\varepsilon 2^{-m}}{3}.$$

再取 $\delta>0$，使 $\lambda+\delta<b$ 且

$$|x(\lambda+\delta)-x(\lambda)|<\frac{\varepsilon 2^{-m}}{3},\quad \delta|\xi|<\frac{\varepsilon 2^{-m}}{3}.$$

于是

$$\begin{aligned}&d(x(\lambda+\delta)-x(a),(\lambda+\delta-a)coD)\\ \leq&|x(\lambda+\delta)-x(a)-(\lambda+\delta-a)\xi|\\ \leq&|x(\lambda)-x(a)-(\lambda-a)\xi|+|x(\lambda+\delta)-x(\lambda)|+\delta|\xi|\\ <&(\lambda-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda}2^{-k}+\varepsilon 2^{-m}\\ <&(\lambda+\delta-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda+\delta}2^{-k},\end{aligned}$$

从而 $\lambda+\delta\in T$，此与 $\lambda=\sup T$ 矛盾. 若 $\lambda\overline{\in}\Gamma$，则 $x'_+(\lambda)$ 存在且 $x'_+(\lambda)\in coD$. 取 $\delta>0$ 使 $\lambda+\delta<b$ 且

$$|x(\lambda+\delta)-x(\lambda)-\delta x'_+(\lambda)|<\frac{\delta\varepsilon}{2}.\tag{1.2.5}$$

又，由 (1.2.4) 式，可取 $\xi\in coD$ 使

$$|x(\lambda)-x(a)-(\lambda-a)\xi|<(\lambda-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda}2^{-k}+\frac{\delta\varepsilon}{2}.\tag{1.2.6}$$

于是，由 (1.2.5) 式和 (1.2.6) 式，得

$$\begin{aligned}&d(x(\lambda+\delta)-x(a),(\lambda+\delta-a)coD)\\ \leq&\left|x(\lambda+\delta)-x(a)-(\lambda+\delta-a)\left(\frac{\delta}{\lambda+\delta-a}x'_+(\lambda)+\frac{\lambda-a}{\lambda+\delta-a}\xi\right)\right|\\ =&|x(\lambda+\delta)-x(a)-\delta x'_+(\lambda)-(\lambda-a)\xi|\\ \leq&|x(\lambda+\delta)-x(\lambda)-\delta x'_+(\lambda)|+|x(\lambda)-x(a)-(\lambda-a)\xi|\\ <&\frac{\delta\varepsilon}{2}+(\lambda-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda}2^{-k}+\frac{\delta\varepsilon}{2}\\ \leq&(\lambda+\delta-a)\varepsilon+\varepsilon\sum_{p_k<\lambda+\delta}2^{-k},\end{aligned}$$

故 $\lambda+\delta\in T$，也与 $\lambda=\sup T$ 矛盾．由此可知，$\lambda=b$．于是

$$d(x(b)-x(a),(b-a)\,coD)\leq(b-a)\varepsilon+\varepsilon.$$

再注意到 $\varepsilon>0$ 的任意性，即得(1.2.1)式．□

系 1.2.1 设 $x\in C[I,E]$，且除去至多可数集 Γ $[a,b]$ 外，当 $t\in[a,b]\setminus\Gamma$ 时 $x(t)$ 右可微．若存在 $M>0$，使 $|x'_+(t)|\leq M$，$\forall\ t\in[a,b]\setminus\Gamma$，则

$$|x(b)-x(a)|\leq M(b-a);\qquad(1.2.7)$$

特别，若 $x'_+(t)=\theta$（θ 表 E 的零元素），$\forall\ t\in[a,b]\setminus\Gamma$，则 $x(t)$ 是常元素，即 $x(t)\equiv x_0\in E$，$\forall\ t\in[a,b]$．

系 1.2.2 设 $x\in C[I,E]$，且除去至多可数集 Γ $[a,b]\setminus\Gamma$ 外，当 $t\in[a,b]\setminus\Gamma$ 时 $x(t)$ 右可微，又设 P 是 E 中某锥，从而产生 E 中半序 $\leq$（关于锥和由锥导出的半序的详细讨论，见郭大钧〔1〕）．则 x 是 $[a,b]$ 上增函数（即 $a\leq t_1\leq t_2\leq b$ $x(t_1)\leq x(t_2)$）的充分必要条件是 $x'_+(t)\geq\theta$，$\forall\ t\in[a,b]\setminus\Gamma$．

证 必要性显然．下证充分性．设 $x'_+(t)\geq\theta$，$\forall\ t\in[a,b]\setminus\Gamma$．对 $[t_1,t_2]$ 应用定理 1.2.1，知

$$x(t_2)-x(t_1)\in(t_2-t_1)\,\overline{co}(\{x'_+(t)\mid t\in[t_1,t_2]\setminus\Gamma\}).$$

由于 $\overline{co}(\{x'_+(t)\mid t\in[t_1,t_2]\setminus\Gamma\})$ P，故 $x(t_2)-x(t_1)\in P$，即 $x(t_2)\geq x(t_1)$．□

对于左可微的情形，类似的结论成立，即有下面的

定理 1.2.2（中值定理） 设 $x\in C[I,E]$，且除去至多可数集 Γ $[a,b]$ 外，当 $t\in[a,b]\setminus\Gamma$ 时 $x(t)$ 左可微（即左导数 $x'_-(t)$ 存在）．则