

第一章 绪论

§ 1.1 命名法

从实验得知 放置在磁场 $\vec{H}$ 中的 0 任何材料都获得一磁矩。将单位体积内的偶极矩定义为磁化强度 并用矢量 $\vec{M}$ 表示。在大多数材料中 $\vec{M}$ 正比于外加磁场 $\vec{H}$ 。这种关系可用下式表示：

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \quad (1.1.1)$$

χ 称为材料的磁化率。

在 Maxwell 方程组中通常不用 M ，而用下列矢量代替：

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \gamma_B \vec{M}) \quad (1.1.2)$$

式中 γ_B 是 Brown 为了适应不同单位制而引入的一个符号。对于教科书中已普遍采用的 SI 单位制， $\gamma_B = 1$ 而对于磁学界更为流行的高斯制或 cgs 制， $\gamma_B = 4\pi$ ， $\mu_0 = 1$ 。如果 (1.1.1) 式成立，则可将 1.1.2) 式改写为以下形式：

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.1.3)$$

其中：

$$\mu = \mu_0 (1 + \gamma_B \chi) = \mu_0 \mu_r \quad (1.1.4)$$

μ 称为磁导率。依照 χ 和 μ_r 可对材料进行分类 如果 $\chi > 0$ 或 $\mu_r > 1$ 称为“顺磁性材料”；如果 $\chi < 0$ 或 $\mu_r < 1$ 则称为“抗磁性材料”。

但是，某些材料不符合这种分类，因为其磁化强度 M 不正比于外加磁场 H 。譬如说，在 $H = 0$ 时磁化强度不等于零。事实上，这种材料的磁化强度甚至不是磁场 H 的单值函数，而与外加磁场的历史有关。典型的情况如图 1.1 所示。它给出了磁化强度 M 在外加磁场 H 方向的分量 M_H 与磁场值之间的关系曲线。最外面的回线称为极限磁滞回线。它是用下述方法得到的，即首先沿一个方向加一足够大的磁场，接着减小至零，再反向加至最大磁场。当外加磁场从正到负，连续、循环变化时，极限磁滞回线的形状不变。

从原点开始的曲线称为起始磁化曲线。每次样品退磁后（即处在 $H = 0$ ， $M = 0$ 的状态）只能测绘一次起始磁化曲线。退磁的方法有两种，即将样品加热至高温后，在零磁场中冷却；或者使外加磁场沿正负方向往返循环变化，同时逐渐减小磁场幅值为零。如果增大磁场，在尚未达到极限磁滞回线之前，减小磁场至零并反向，则得到所谓的小磁滞回线。图 1.1 给出了这种回线的一个例子，实际上，可测出一整套连续的小回线。适当选择外加磁场的历史，就可以达到极限磁滞回线内的任意点。特别是可以得到 $H = 0$ 时，在 $-M_r$ 和 $+M_r$ 之间的任何 M_H 值。 M_r 是极限磁滞回线上 $H = 0$ 所对应的 M_H 值（图 1.1）称为剩磁 (Remanence) 或剩余磁化强度。

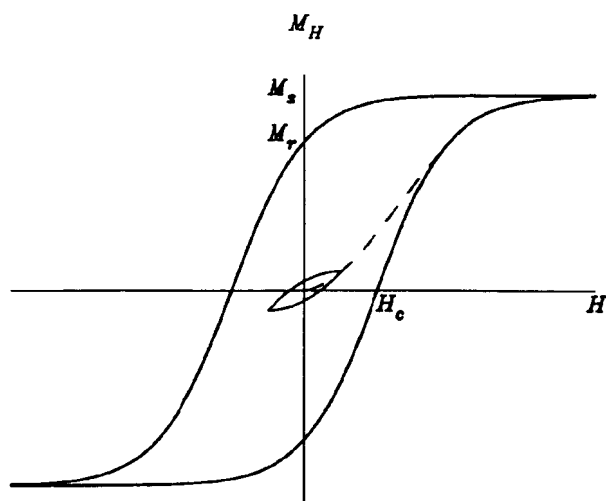


图 1.1 典型铁磁材料的“极限”磁带迴线、起始磁化曲线及一个小迴线的示意图 (M_s —饱和磁化强度; M_r —剩余磁化强度; H_c —矫顽力)

为了使铁磁材料在某些方面形式上类似于顺磁性材料，虽然并不是真正需要，但可以对其定义磁导率。不论(1.1.1)式，还是(1.1.2)式在铁磁材料的场合均不满足，所以磁导率的定义不是唯一的。不过习惯上仍然引入在某些特定磁场时的有效磁导率：

$$\mu_{eff} = \partial B_H / \partial H \quad (1.1.5)$$

或者某个磁场范围内的有效磁导率：

$$\mu_{eff} = \Delta B_H / \Delta H \quad (1.1.6)$$

在上述两种场合，可以作某种近似，将适用于顺磁材料的 Maxwell 方程组应用于有效磁导率描述的铁磁材料。但是，不同于顺磁材料，此处磁导率 μ 不是常数。整个的表述至多只能用于一特定的磁场。

从图 1.1 所示的极限磁滞回线，还可以定义另外两个重要的磁参数。一是矫顽力 (Coercivity 或 Coercive force), 位于 $M_H = 0$ 对应的磁场，它实际上是磁场，并不是力。另一参数是饱和磁化强度或自发磁化强度 M_s 。暂时将很强磁场中测得的 M 值或 M_H 定义为饱和磁化强度。这一定义是不准确的，但此处只能先这样作，在 § 4.1 节中将作修正。

饱和磁化强度是材料的内禀性质，如果测量方法适当，则与样品无关。它是温度的函数。图 1.2 给出此函数的典型形式。图中 M_s 和 T 均分别以零度时的饱和磁化强度 $M_s(0)$ 及居里温度 T_c 归一化的。所谓居里温度是零磁场中 M_s 变为零所对应的温度。当用归一化的形式表示时，不同铁磁材料的曲线几乎都是一样的 (如图 1.2)。所有的铁磁体在温度高于 T_c 时均转变为正常的顺磁体。因为测量 T_c 时，往往需要外加磁场，所以高于居里温度时仍有不为零的磁化强度。图 1.2 中强调了这一行为。图中给出了在小磁场中实际测得的曲线，在居里温度 M_s 并没有等于零。有关 Ni 和 Fe 的实验曲线可以参阅文献，譬如 Potter 的图 9[2]。

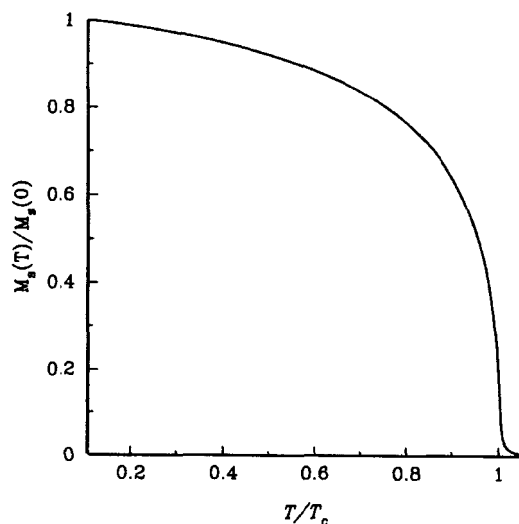


图 1.2 铁磁体的饱和磁化强度对温度的函数关系（温度用 T/T_c 的形式给出，假设外磁场比较小但是仍然存在，这个情形和实际中的测量相符合）

§ 1.2 Weiss 磁畴

任何一种铁磁理论，原则上都必须对别材料中未曾碰到的两种罕见的现象加以注意，即必须对图 1.1 所示的滞后现象和图 1.2 所示的温度依赖性给予解释。然而大多数理论工作者只研究其中之一，而忽略另一现象。他们甚至在理论结果与实验比较时，仍然只研究一种现象，而实际中往往是二者并存的。这是不可避免的，因为普遍的定量问题对现有的知识来说是太复杂了。

由于 1907 年 Weiss 所给的解释，定性地说，对于上述两种现象已经有了一定程度的了解。Weiss 假设在铁磁材料中存在着某种内场（或分子场），它力图使原子的磁偶极矩反抗热涨落，而取向排列。热涨落倾向于使这些偶极矩排列完全无序，由第二章将会看到，用分子场足以解释图 1.2 所示的温度依赖性以及高于居里温度时的顺磁性。不过，这种模型导致的结果是：低于居里温度 T_c 的任意温度下，磁化强度 $\bar{M}$ 是一常数。为了解释图 1.1 所示的不寻常的磁场依赖性，Weiss 假设铁磁体是由很多磁畴组成，每个磁畴均磁化至饱和 $M_s(T)$ （图 1.2），但每个磁畴的磁化方向却不同。磁化强度的测量值是对这些磁畴的平均值。如果磁化矢量平行和反平行于某一特定方向的磁畴数目相等时，磁化强度沿此方向的平均值就等于零。如果这两类磁畴的数目不相等，则可以得到数值上小于 $M_s(T)$ 的不为零的磁化强度值。外加磁场使每个磁畴的磁化强度矢量转向它的方向。当磁场足够大时，所有磁畴的磁化矢量均沿磁场取向，则测得的平均值就等于 $M_s(T)$ 。不做详细的考虑，就可以清楚地看到，这一假设至少足以定性地解释图 1.1 所示的磁场依赖性。

Weiss 未对其两个随意的假设给出证明，未能阐明分子场的起源和磁畴的存在。同时，用他的原理进行定量的估计时也遇到一些困难，例如在其理论中采用居里温度的实测值时，给出铁中的分子场高达 10^6 [奥斯特]。然而，量级为 1 [奥斯特] 的磁场又能使铁中的磁畴重新

排列， 10^3 [奥斯特] 的磁场能使磁畴完全消失。为什么 10^6 [奥斯特] 的磁场不能使铁的所有磁矩平行排列，而额外只要 10^3 [奥斯特] 的磁场就能做到？为什么甚至 1 [奥斯特] 的磁场都能显著地改变磁畴的分布，而 10^6 [奥斯特] 的磁场却不能？

尽管有这些困难（以后还会提及），Weiss 的两个假设事实上是有效的、正确的。它包含了对铁磁性的基本认识。现在已经阐明分子场是自旋间耦合作用的某种近似，可以从更基本的原理推导出。对这些基本原理，下面将在不同层次上给予说明。沿不同方向磁化的磁畴的存在问题已不再是假设。已经用 § 4.1 节所列的各种技术观察到了磁畴。磁畴的存在现已成为确定的实验事实。现已证明，唯一的差别是磁畴只能沿某些特定的方向磁化，而不是 Weiss 当初想象的无规取向。虽然，磁畴的存在已是实验事实，但这并不是让我们停止去阐明为什么会出现磁畴？为什么 10^6 [奥斯特] 的磁场不能作 1 [奥斯特] 的磁场能完成的工作？本书的部分内容就是致力于回答这些问题。

虽然，铁磁体的基本性质在本质上属于量子力学效应，本书在大多数场合将采用经典物理学的方法处理，以便使在学校没有学过量子力学的学生能够听懂。这不仅仅是本书的选择。近年来谁都知道经典理论充其量只能是正确量子力学处理的一种近似，特别是磁性问题。但是，很多铁磁理论的发展仍然是利用经典的概念完成的。这样作的理由是纯量子理论尚未发展到足以解决实际问题的程度，而能解决的只是一些很少有实际应用的简单情况。不过在采用铁磁性的经典处理方法之前，必须思考一个著名的、经常引用的 Bohr—Van Leeuwen 定理，依照这个定理，经典物理学不可能导出磁性，因为在纯经典的物理学材料中的电子不会与外加磁场发生作用。

§ 1.3 Bohr—Van Leeuwen 定理

讨论 N 个电子组成的经典体系。它具有 $3N$ 个自由度，可以用 $3N$ 个坐标 q_i 和 $3N$ 个动量 p_j 来描述。每个电子具有电荷 $e = -|e_e|$ 。在 cgs 单位制中，一个速度为 $\vec{v}$ 的电子产生的电流密度 $\vec{j} = e\vec{v}$ 并在空间 $\vec{r}$ 处产生磁矩：

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \vec{r} \times \vec{j} = \frac{e}{2c} \vec{r} \times \vec{v} \quad (1.3.7)$$

c 为光速。由此看出一个重要的特征，即 $\vec{m}$ 是每一个电子的速度 $\vec{v}$ 的线性函数。这意味着，无论所有电子的运动图象如何，其总磁矩依然是所有电子速度的线性函数。所以，所有电子总磁矩的 z 分量必须是下列形式的函数：

$$m_z = \sum_{i=1}^{3N} a_i^z(q_1, \dots, q_{3N}) \dot{q}_i \quad (1.3.8)$$

式中 $\dot{q}_i$ 表示 q_j 对时间的微商；系数 a_i^z 是所有 q_j 坐标的函数，与 p_j 无关。

经典运动的正则方程为：

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad (1.3.9)$$

其中：

$$H = \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2m_e} (\bar{p}_i - \frac{e}{c} \bar{A}_i)^2 + eV(q_1, \dots, q_{3N}) \quad (1.3.10)$$

为哈密顿量， m_e 为电子质量， A 为磁场的向量势及 eV 为势能。

将(1.3.9)式代入(1.3.8)式，则得：

$$m_z = \sum_{i=1}^{3N} a_i^z(q_1, \dots, q_{3N}) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad (1.3.11)$$

若 k_B 为 Boltzman 常数， T 为温度，

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \quad (1.3.12)$$

则磁矩的经典统计平均值，即测量值为：

$$m_z = \frac{\int m_z e^{-\beta \mathcal{H}} dq_1 \dots dq_{3N} dp_1 \dots dp_{3N}}{\int e^{-\beta \mathcal{H}} dq_1 \dots dq_{3N} dp_1 \dots dp_{3N}} \quad (1.3.13)$$

根据(1.3.11) 式，(1.3.13) 式的分子是很多项的和，而每一项都正比于下式：

$$\int \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} e^{-\beta \mathcal{H}} dp_i = [-k_B T e^{-\beta \mathcal{H}}]_{p_i=-\infty}^{\infty} \quad (1.3.14)$$

这一积分等于零。因为根据 1.3.10)式，当 $|p_j|$ 很大时 $\mathcal{H}$ 与 p_i^2 成正比。所以， $M_z = 0$ 。

即在任何矢量势中 (即在任何磁场中) 材料的磁矩恒等于零 而与电子在材料中具体的运动形式无关。换句话说，如果材料中的电子遵循经典物理学的定律，则外加磁场与任何材料中的电子之间无相互作用。这就是说经典物理学既不能阐明抗磁性，也不能阐明顺磁性，铁磁性当然不在话下了。

这个定理是很普遍的，其证明也是严格的。但是，它不排除应用经典物理学的所有可能性，应该排除的只是纯经典物理学的应用。当然，在今天已无人会以任何形式这样作。经典电子不可能围绕原子核作圆周轨道运动 而会释放能量 并失陷于原子核。而当今的很多“经典”理论只应用量子力学的结果，使电子作轨道运动，再用经典的方法计算轨道半径。从下一节将会看到，抗磁性经典理论的建立，事实上是以电子的圆周轨道运动为前提的。经典电子不具有自旋。但是，只要对电子引入自旋的量子力学概念，就可以建立铁磁性的经典理论了。在物理学的其它领域，将经典理论看作是量子力学的一种极限。但铁磁性的经典理论仅仅是一种准经典的处理方法，并不是真正的经典理论。它采纳了自旋的量子力学概念，而在运算时将自旋又视为经典矢量。从本质上讲，它只是采用了经典形式表达量子力学的结果。某些量子力学的结果乍看起来似乎不令人喜爱。

从原则上将，用纯量子力学的方法处理磁学各领域的问题，特别是铁磁性的问题，那是最好不过的了。某些书，譬如 Wagner 的书[3]以及每年发表的很多研究论文均采用了这种处理方法。不过量子力学只能应用于一些很有限的铁磁性问题。对于此领域的所有其他问题，几乎是别无选择，不是忽略不计，就是用准经典的技术研究。正如本书在大多数情况下所采用的方法。此外，经典的计算能给出有用的、直观的导向性结果。就这一点就足以使人们甚至在量子力学可能，不过比较复杂的场合，宁愿采用准经典的方法。另外，由第三章将会看到很多已报道的量子计算中使用了比较粗略的近似。而从未证实这种近似要比应用经典物理

更好。

§ 1.4 抗磁性

作为例证，本节中将同时用量子力学的观点和准经典的处理方法研究抗磁性。在准经典方法中引入了电子的 Bohr 轨道。

首先从量子力学的观点讨论一个孤立的，具有 Z 个电子的原子，其哈密顿量为：

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m_e} \sum_{i=1}^Z [\vec{p}_i - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}_i)]^2 + \text{其他项} \quad (1.4.15)$$

式中其他项包含电子与原子核、电子与电子间的相互作用。这些项对于抗磁性不起作用。如果外加磁场沿 z 轴方向，并不随位置和时间变化，则矢量势为：

$$\vec{A} = \frac{H}{2} (-y, x, 0) \quad (1.4.16)$$

及

$$\vec{p}_i \cdot \vec{A}(\vec{r}_i) = \frac{H}{2} (xp_y - yp_x)_i = \frac{H}{2} \hbar l_{zi} \quad (1.4.17)$$

式中 l_{zi} 为轨道角动量的 z 分量。

将(1.4.16)式及(1.4.17)式代入(1.4.15)式，则哈密顿量的期望值为：

$$\overline{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m_e} \sum_{i=1}^Z [\overline{p_i^2} - \frac{eH\hbar}{c} \overline{l_{zi}} + \frac{e^2 H^2}{4c^2} \overline{(x^2 + y^2)_i}] + \text{其他项} \quad (1.4.18)$$

由此得出磁矩为：

$$\overline{m_z} = -\frac{\partial \overline{\mathcal{H}}}{\partial H} = \frac{e}{2m_e c} \sum_{i=1}^Z [\hbar \overline{l_{zi}} + \frac{eH}{2c} \overline{(x^2 + y^2)_i}] \quad (1.4.19)$$

对于一克分子的材料，其磁化率为：

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = -\frac{e^2 N}{4m_e c^2} \sum_{i=1}^Z \overline{(x^2 + y^2)_i} \quad (1.4.20)$$

式中 N 为 Avogadro 常数，即一克分子材料中的原子数。

为了用准经典的估计获得相同的结果，试讨论一电子围绕原子核作频率为 ω_0 的圆周运动，其半径为 r 。原子核的电荷为 $Z|e|$ 。在平衡状态电子所受的离心力等于电子与原子核之间的库仑吸引力，即

$$m_e \omega_0^2 r = \frac{Ze^2}{r^2}$$

于是：

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Ze^2}{m_e r^3}} \quad (1.4.22)$$

如果，外加一磁场 $\vec{H}$ ，则在以前已有的作用力上附加一 Lorentz 力 $(e/c)\vec{v} \times \vec{H}$ 频率变为 ω ，则新的平衡方程式变为：

$$m_e \omega^2 r = \frac{Ze^2}{r^2} + \frac{|e| \hbar r H}{c} \quad (1.4.23)$$

采用记号：

$$\omega_L = \frac{|e| \hbar H}{2m_e c} \quad (1.4.24)$$

则 (1.4.23) 式变为：

$$\omega^2 - 2\omega\omega_L - \omega_0^2 = 0 \quad (1.4.25)$$

即使在技术上能获得的最大磁场下， $\omega_L \ll \omega_0$ ，所以，将二次方程式 (1.4.25) 的解可写成下列形式：

$$\omega = \omega_L + \sqrt{\omega_L^2 + \omega_0^2} \approx \omega_L + \omega_0 \quad (1.4.26)$$

可以看出，外加磁场使频率偏移了 ω_L 。称此 ω_L 为 Larmor 频率。

频率的这一变化意味着电子另外获得了每秒 $\omega_L/2\pi$ 的转数，产生了附加电流：

$$j = \frac{e\omega_L}{2\pi} \quad (1.4.27)$$

在 cgs 单位制中，磁矩等于 j/c 与轨道面积的乘积，即

$$m_z = \frac{j}{c} \pi(x^2 + y^2) = -\frac{e^2 \hbar}{4m_e c^2} (x^2 + y^2)$$

上式给出与 (1.4.20) 式相同的磁化率。

这一结果与 Bohr—Van Leeuwen 定理并不矛盾，因为一个真正的经典电子不可能象这一“经典”计算中假设的那样维持在轨道上。不过它的确证实了用准经典的方法同样可以得到正确的结果，只要人为地附加某些量子力学要求的東西，正如此处的电子维持圆周轨道一样。用同样的方式，使电子具有自旋，并在自旋间存在某种形式的交换作用的方法，可以对铁磁性进行准经典的研究。

在结束本节之前，做某些注释是适宜的。首先，电子完全局域于一个原子位的图象，对大多数固体来说是过于简单化，无疑是不能用于金属。因为金属中简并化 Fermi 电子气占有一定的能带。在磁场作用下分裂为所谓的 Landau 能级。这是一个完全不同性质的课题，已超出本书所讨论的范围。上面的计算实际上只适用于稀有气体或者被电离至具有闭合电子壳层的气体。在这样的场合，材料完全是各向同性的，所以 $\overline{x^2} = \overline{y^2} = \frac{1}{3} \overline{r^2}$ 。在这样的情况下，

文献中通常可以看到 (1.4.20) 式为下列形式：

$$\chi = -\frac{e^2 N}{6m_e c^2} \sum_{i=1}^Z \overline{r_i^2} \quad (1.4.29)$$

进一步的问题是计算 $\overline{r^2}$ 的数值。对于氢原子比较简单，但对别的材料并不简单。

其次，抗磁性 [即 (1.4.20) 式或 (1.4.19) 式给出的负磁化率] 存在于所有的材料中，包括顺磁材料。不过顺磁材料的正磁化率远大于上述的负磁化率部分，相比之下可以忽略。在 cgs 单位制中 (1.4.19) 式方括弧中第一项 $\hbar l_z$ 的典型值的数量级为 10^{-27} ，而第二项

$|e|H(x^2 + y^2)/(2c)$ 的数量级为 $10^{-36} H$ 。实际上能获得的最大磁场为 10^6 [奥斯特]。即使在此最大磁场的情况下, (1.4.19) 式的第二项仍可忽略不计。只有在电子壳层闭合时(如稀有气体) 第一项消失, 第二项(即抗磁性) 才有可能测量出。必须指出, 轨道角动量的零贡献类似 s 电子是不充分的。因为电子自旋对第一项的贡献通常无论如何也能使第二项忽略不计。在第一项中轨道和自旋的总贡献为零, 各个原子在外磁场为零时不具有固有磁矩。只有在此条件下, 才能测出第二项。在抗磁性的场合, 单个原子或者材料中的原子集合体的磁矩正比于外加磁场, 磁矩的方向与磁场相反。

在顺磁性的场合, 每个原子的磁矩不等于零。该磁矩不是外加磁场产生的, 与磁场无关。而磁场的作用在于使各原子的磁矩沿它的方向取向。材料的磁矩随磁场的增加而增加, 磁化率为正。负磁化率的抗磁性依然存在, 不过通常与正磁化率相比, 负磁化率小得多, 可以忽略不计。在无磁场的情况下, 各原子的磁矩无规取向, 平均磁矩为零。

在铁磁材料的场合, 各原子间存在着强大的相互作用。从下面的章节将会看到, 这种相互作用甚至在外加磁场的情况下仍能使各原子的磁矩产生一定的取向, 这种取向导致材料在零磁场中仍具有不等于零的平均磁矩。这正是铁磁性与顺磁性的基本差别。所以, 可以依照零磁场中的磁矩值对材料进行分类: 每个原子的磁矩均为零的材料为抗磁性; 每个原子的磁矩不为零, 但很多原子的磁矩的平均值为零的材料为顺磁性; 平均磁矩不等于零的材料为铁磁性。

第二章 分子场近似

§ 2.1 顺磁性

在试图阐明铁磁性之前，必须先了解顺磁性。为此最好仍然应用准经典的处理方法。因为这样会有益于铁磁性研究。引入顺磁性的量子力学理论[3]并不是特别困难，不过对于我们的目的来说，并不是有效的。试讨论一原子系综，假设每个原子具有固有磁矩 $\vec{m}$ 。为了在下面用于铁磁性更方便，我们采用量子力学的结果，认为原子固有磁矩 $\vec{m}$ 的数值为 $g\mu_B S$ 。 g 是所谓的“Lande”因子或者“光谱”分裂因子。 μ_B 为 Bohr 磁子：

$$\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2m_e c} \quad (2.1.1)$$

这是原子磁矩(1.4.19)式的另外一种表达形式。当然就顺磁性而言，无需对这个量作任何证明。可以认为仅仅是原子磁矩的定义。自旋量子数 S 的另一个量子力学性质是其 S_z 分量只能取 $2S+1$ 个分立值： $-S, -S+1, \dots, S$ 。即 $-S$ 和 S 之间的整数值或半整数值，彼此的间隔为整数。

假设这些磁矩与外加磁场 $\vec{H}$ 有相互作用，而磁矩之间无互作用。我们知道偶极矩 $\vec{m}$ 在外磁场 $\vec{H}$ 中的相互作用能为 $-\vec{m} \cdot \vec{H}$ 。如果选择磁场 H 的方向为 z 轴，在温度 T 时，依照经典统计， $\vec{m}$ 在磁场方向的分量 m_z 的平均值为：

$$\langle m_z \rangle = \frac{\sum m_z e^{m_z \beta H}}{\sum e^{m_z \beta H}} \quad (2.1.2)$$

式中， β 由(1.3.12)式定义。将磁矩 $\vec{m}$ 的上述值代入上式， m_z 的容许值为 S_z ：

$$\langle m_z \rangle = \frac{1}{D} \sum_{n=-S}^S g\mu_B n e^{g\mu_B \beta H n} = \frac{1}{D} \sum_{n=-S}^S g\mu_B n \xi^n \quad (2.1.3)$$

为了简便，使用了以下的记法：

$$D = \sum_{n=-S}^S e^{g\mu_B \beta H n} = \sum_{n=-S}^S \xi^n \quad (2.1.4)$$

及：

$$\xi = e^\eta \quad \eta = \frac{g\mu_B H}{k_B T} \quad (2.1.5)$$

(2.1.2)式分母中的和是熟知的几何级数：

$$\sum_{n=-S}^S \xi^n = \frac{1}{\xi^S} (1 + \xi + \dots + \xi^{2S}) = \frac{1}{\xi^S} \cdot \frac{1 - \xi^{2S+1}}{1 - \xi} = \frac{\xi^{-S} - \xi^{S+1}}{1 - \xi} \quad (2.1.6)$$

上式对 ξ 求微商，重新排列后得：

$$\sum_{n=-S}^S n \xi^{n-1} = \frac{S(\xi^{S+1} - \xi^{-S-1}) - (S+1)(\xi^S - \xi^{-S})}{(1-\xi)^2} \quad (2.1.7)$$

将(2.1.6)式及(2.1.7)式代入(2.1.3)式得：

$$\begin{aligned} \langle S_z \rangle &= \frac{\langle m_z \rangle}{8\mu_B} = \frac{S(\xi^{S+1} - \xi^{-S-1}) - (S+1)(\xi^S - \xi^{-S})}{(\frac{1}{\xi} - 1)(\xi^{-S} - \xi^{S+1})} \\ &= \frac{2S \sinh[(S+1)\eta] - 2(S+1) \sinh(S\eta)}{\xi^{S+1} + \xi^{-S-1} - (\xi^S + \xi^{-S})} \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

所以：

$$\langle S_z \rangle = \frac{S\{\sinh[(S+1)\eta] - \sinh(S\eta)\} - \sinh(S\eta)}{\cosh[(S+1)\eta] - \cosh(S\eta)} \quad (2.1.9)$$

这些表达式可用熟知的双曲函数间的下列关系式进行简化：

$$\sinh[(S+1)\eta] - \sinh(S\eta) = 2 \sinh(\frac{\eta}{2}) \cosh(\frac{2S+1}{2}\eta) \quad (2.1.10)$$

$$\cosh[(S+1)\eta] - \cosh(S\eta) = 2 \sinh(\frac{\eta}{2}) \sinh(\frac{2S+1}{2}\eta) \quad (2.1.11)$$

(2.1.9)式分子上的最后一项可作如下的变换：

$$\sinh(S\eta) = \sinh(\frac{2S+1}{2}\eta - \frac{\eta}{2}) = \sinh(\frac{2S+1}{2}\eta) \cosh(\frac{\eta}{2}) - \cosh(\frac{2S+1}{2}\eta) \sinh(\frac{\eta}{2}) \quad (2.1.12)$$

将上述结果全部代入(2.1.9)式并除以 S ，则得：

$$\frac{\langle S_z \rangle}{S} = \frac{2S+1}{2S} \coth(\frac{2S+1}{2}\eta) - \frac{1}{2S} \coth(\frac{\eta}{2}) \quad (2.1.13)$$

考虑 η 的定义[(2.1.5)式]，可将上式变为下列形式：

$$\frac{\langle S_z \rangle}{S} = B_S \left(\frac{g\mu_B S H}{k_B T} \right) \quad (2.1.14)$$

其中，函数：

$$B_S(x) = \frac{2S+1}{2S} \coth(\frac{2S+1}{2S}x) - \frac{1}{2S} \coth(\frac{x}{2S}) \quad (2.1.15)$$

称为 Brillouin 函数，不仅与自变数 x 有关，同时还与自旋数有关。

作为例证，我们将单独讨论 $S = \frac{1}{2}$ 的特殊情况。此时， S_z 的容许值 $\eta = \pm \frac{1}{2}$ 。(2.1.3)式

和(2.1.4)式对这两个值求和：

$$\langle S_z \rangle = \frac{\sum_n n e^{n\eta}}{\sum_n e^{n\eta}} = \frac{-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\eta} + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\eta}}{e^{-\eta/2} + e^{\eta/2}} = \frac{1}{2} \tanh(\frac{\eta}{2}) \quad (2.1.16)$$

这就是说，此时可以用下式代替(2.1.14)式：

$$\langle S_z \rangle = S \tanh\left(\frac{g\mu_B SH}{k_B T}\right) \quad (2.1.17)$$

代数运算并没有错误。利用双曲函数之间的关系式，由(2.1.15)式对 $B_S(x)$ 的定义，的确可以得到相同的结果，即

$$B_{1/2}(x) = \tanh x \quad (2.1.18)$$

不过，这一特殊函数使得 $S = \frac{1}{2}$ 的情况变得不寻常。所以读者必须注意经常在文献中遇到的惯用语。诸如“作为例子，讨论 $S = \frac{1}{2}$ 的情况”。事实上， $S = \frac{1}{2}$ 指的是一个特殊情况，它不同于 S 为其他值的情况。况且的确存在 $S = \frac{1}{2}$ 的某些盐类[4]。

在自变数 x 很小时

$$\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} + O(x^3) \quad (2.1.19)$$

代入(2.1.15)式：

$$B_S(x) = \frac{(2S+1)^2 - 1}{12S^2} x + O(x^3) = \frac{S+1}{3S} x + O(x^3) \quad (2.1.20)$$

于是， H 不是很大时，(2.1.4)式变为：

$$\langle S_z \rangle = \frac{g\mu_B S(S+1)}{3k_B T} H \quad (2.1.21)$$

这正是(1.1.1)式。在普通温度下对大多数顺磁体即使在技术上达到的最大磁场中(2.1.21)式所给的线性关系亦然满足。在高场中，磁化强度与磁场不满足线性关系时，习惯上仍保持(1.1.1)方程式不变，而是定义一个随磁场变化的磁化率 $\chi(H)$ 。而将(2.1.21)式给出的值认为是起始磁化率：

$$\chi_i = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{\partial \langle M_z \rangle}{\partial H} = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{\partial N g \mu_B \langle S_z \rangle}{\partial H} = \frac{C}{T} \quad (2.1.22)$$

其中 N 为单位体积内的自旋数，而

$$C = \frac{NS(S+1)}{3k_B} (g\mu_B)^2 \quad (2.1.23)$$

对于所有的顺磁体 方程式(2.1.22) 给出的磁化率与温度的依赖关系均与实验相吻合 即为 Curie 定律。值得提到的是顺磁体中尽管 χ 可以与磁场有关 但却与磁场 $\vec{H}$ 的历史无关。这一点与下面即将讨论的铁磁体不同。在顺磁体中 $\chi(\vec{H})$ 是完全确定的单值函数。

当自变数很大时， $\coth x \rightarrow 1$ ，此时(2.1.15)式给出：

$$B_S(\pm\infty) = \pm 1 \quad (2.1.24)$$

这就是说，在很强的磁场中，磁化强度不再随磁场的增大而变化，而达到“饱和”。很明显，当所有的自旋都沿外加磁场方向取向时即为饱和磁化。因为在顺磁体中外加磁场的作用只在于改变每个固有磁矩的方向，并不改变固有磁矩的数值。当然 § 1.4 节所述的抗磁性的贡献总是存在的，不过对顺磁体可以忽略不计。

在大多数顺磁体中不可能观测到磁化饱和，因为现在能获得的磁场还不够强。但是，可

以看出(2.1.14式)的自变数是 SH/T 而不仅仅是 H 。所以,在 T 很小的极低温度下可以得到磁化饱和。如果 S 很大也可以观察到磁化饱和。借助于一特殊现象即所谓的超顺磁性,可以获得很大的 S 值。在正常的材料中, S 是单个原子的自旋数,数量级大约为 1。然而,在某种条件下将在 § 5.2 节中叙述) S 被应用于彼此耦合在一起的非常多的原子的自旋,此时 S 的数量级为 10^3 或 10^4 , 在较小的磁场中足以达到饱和。

§ 2.2 铁磁性

上节中叙述的顺磁体,其原子磁矩只与外磁场相互作用。而铁磁体的情况却不同,其原子的自旋之间存在着相互作用,每个自旋力图使其他自旋沿它的方向取向。自旋间的相互作用来源于自旋的量子力学性质,这将在第三章中讲述。没有学习过量子力学的读者可以跳过这一章,这对于继续学习本书以后的章节并无影响。这些读者只要承认这样一个公理,即存在着一种力,试图使所有自旋平行排列。这就是所谓的交换作用,可以用自旋 $\vec{S}_i$ 和自旋 $\vec{S}_j$ 之间的交换作用能表示。交换作用能正比于 $\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$ 。系统的总能量包括交换作用能及在外磁场 H 中的势能:

$$E = -\sum_{ij} J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j - \sum_i g\mu_B \vec{S}_i \cdot \vec{H} \quad (2.2.25)$$

其中,第一个求和符号旁的分号表示求和时排除 $i=j$ 的情况,因为自旋不可能与自身发生作用。除此之外,上式中的两项求和遍及材料中所有的原子自旋。系数 J_{ij} 称为交换积分,可用第三章中讲述的方法进行计算。需要指出,这些系数的正负是这样定义的:如果 J_{ij} 为正,则自旋平行时较反平行时的能量低,这也正是铁磁相互作用的情况。

本课题是一个多体问题,求解中作某种近似是不可避免的。在本章中我们引入一种很流行的处理方法,在物理学的其它分支中可能使用不同的命名,而在铁磁性的讨论中称为分子场近似。近年来,越来越广泛地采用了“平均场近似”的命名法。用此方法时,先对某一个自旋标以记号,以便更详细地研究其统计规律,而将别的自旋用其平均值,或者更准确地说,是其量子力学期望值代替。经过某些操作之后,取消特定自旋的标记,认为平均地讲它与别的自旋无什么不同之处,于是得到平均值。

明确地讲,我们认为自旋 $\vec{S}_i$ 具有某种特殊的品格,将与自旋 $\vec{S}_i$ 有关的能量项,或者与自旋 $\vec{S}_i$ 有关的哈密顿量汇集在一起。而将所有别的自旋 $\vec{S}_j$ 用其平均值 $\langle \vec{S}_j \rangle$ 代替:

$$E_i = -2 \sum_j J_{ij} \vec{S}_i \cdot \langle \vec{S}_j \rangle - g\mu_B \vec{S}_i \cdot \vec{H} = -\vec{S}_i \cdot \vec{H}_i \quad (2.2.26)$$

其中:

$$\vec{H}_i = g\mu_B \vec{H} + 2 \sum_j J_{ij} \langle \vec{S}_j \rangle \quad (2.2.27)$$

式中的因子“2”来自下述事实:在(2.2.25)式双重求和中,实际将标记自旋计算了两次,一次是 $\vec{S}_i$ 本身,另一次是 $\vec{S}_j$ 求和的过程中。(2.2.27)式表明总能量 E 不等于 $\sum_i E_i$, 而对相

相互作用求和时必须引入 $\frac{1}{2}$ ，以便避免重复计算两次。

在此近似中，认为自旋间的交换相互作用等效于每个自旋在一有效场 H_i 中的相互作用。甚至在实在的外磁场为零时，有效场可能不等于零。显然，Weiss 的假设 § 1.2 很重要，正因为如此，文献中将有效场称为 Weiss 分子场或者就称 Weiss 场。最近以来，Weiss 的名字渐渐被遗忘而平均场的名字似乎被人们所接收。不论哪一种命名，上述的处理方法可以认为是对“分子场”的某种程度的证明。而 Weiss 当时只是作为假设提出的。为了证明到这个程度，我们曾随意地提出存在着由 (2.2.25 式) 描述的交换作用的假设。更进一步的证实必须求助于更基本的原理 参阅第三章 推导出的 (2.2.25 式)。

这样一来，铁磁性的问题就简化为一些孤立的自旋与外加场作用的问题，与上节中顺磁性问题的处理一样。只需指出，此处能量为 $-S \cdot H$ 而顺磁性的场合为 $-g\mu_B \vec{S} \cdot \vec{H}$ 。所以，需对 (2.1.14 式) 中的 Brillouin 函数的自变数作适当的改变。这样做后， $\vec{S}_i$ 的 z 分量变为：

$$\langle S_{iz} \rangle = SB_S \left(\frac{SH_i}{k_B T} \right) \quad (2.2.28)$$

其中， H_i 由 (2.2.27 式) 确定。

现在将特定自旋的标记取消，平均而言，那个被标记过的自旋与 (2.2.27 式) 求和中出现的自旋并无区别。于是，可以将这两类自旋的标记 i 和 j 取消。将 (2.2.27 式) 代入后，(2.2.28 式) 变为：

$$\langle S_z \rangle = SB_S \left[\frac{S}{k_B T} (g\mu_B H + 2 \langle S_z \rangle \sum_j J_{ij}) \right] \quad (2.2.29)$$

这就是决定 $\langle S_z \rangle$ 的超越方程式。事实上，以这样的方式写出时，此关系式并不是严格确定的，因为对 j 的求和依赖于 i 。为了求解，仍需对求和的问题作出另外的假设。最常用的假设是晶体中非最近邻自旋间的 $J_{ij} = 0$ 而所有最近邻自旋间的交换积分 J 相同 并且不等于零。

通常采用以下记号：

$$\mu = \frac{\langle S_z \rangle}{S} \quad (2.2.30)$$

$$h = \frac{g\mu_B SH}{k_B T} \quad (2.2.31)$$

及：

$$\alpha(T) = \frac{2S^2}{k_B T} \sum_j J_{ij} = \left[\frac{2S^2}{k_B T} pJ \right] \quad (2.2.32)$$

其中， p 为最近邻自旋的数目。上式中的方括弧是在非最近邻自旋间的交换积分为零的假设下得到的。当然，也可以提出别的假设 诸如 次近邻自旋间的交换积分为某个值 事实上的确存在 如文献[4] 及更远自旋间的交换积分不等于零等等 此时 仍可以用同样的运算方法处理。在 § 2.3 节中将会给出这样的例子。采用上述的记号后，(2.2.29 式) 变为：

$$\mu = B_S (h + \alpha \mu) \quad (2.2.33)$$

老的教科书上通常用作图法求解上式，并给出详细的说明。现在，不再需要这样作，用现代计算机数值求解(2.2.33)式是很平常的事。将 μ 作为 α 的函数画出曲线，以 h 为参变量。当 h 较小时，其解的形式类似于图 1.2 所示的曲线。随 S 值之不同，曲线略有变化。在 h 趋于零的极限场合，其解近似于图 2.1 所示的曲线。这两种曲线可用别的理论将在 § 4.6 节中讨论画出，并不真的是分子场近似给出的曲线。此处画出这些曲线只是为了举例说明(2.2.33)式解的大体的曲线形状。对于理论工作者最感兴趣的 $h=0$ 的场合，文献[5]给出了近似的解析解。这对于分子场曲线需多次、复杂的计算，譬如就某个参变量求平均时特别有用。采用下列记号：

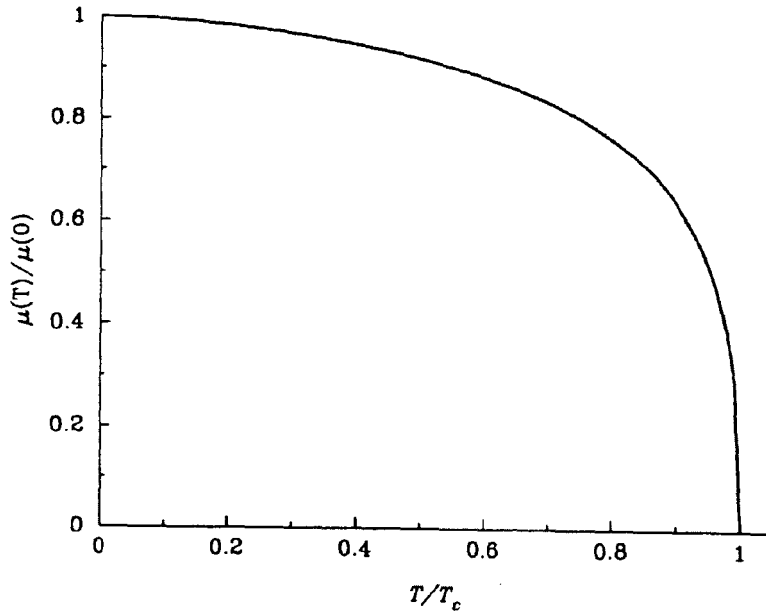


图 2.1 $h=0$ 时方程式 (2.2.33) 的解的近似图形 (温度用 T/T_c 的形式给出, T_c 为居里温度, $T > T_c$ 时, 该方程式的唯一解是 $\mu = 0$)

$$m = \mu(T)/\mu(0) \quad t = T/T_c \quad (2.2.34)$$

则近似解析表达式为：

$$(m-a)^2 = a^2 + \frac{1-2a}{1-2b}(1-t)(1-2b+t^c) \quad (2.2.35)$$

其中, a 和 b 为可调参数, 表 2.1 列出其最佳数值, 及

$$c = 1 + \frac{1}{4S(S+1)} \quad (2.2.36)$$

表 2.1 还给出了解析表达式与 (2.2.33) 式的精确解之间的最大相对偏差。这样的准确度对于大多数实用目的已经足够。最大偏差往往发生在 t 值较小的场合, 而此时准确度通常并不重要。

表 2.1 不同 S 时的 a 、 b 参数和最大相对偏差 D

S	a	b	D (%)
$\frac{1}{2}$	-1.0182×10^{-2}	0.26166	0.695
1	7.7521×10^{-3}	0.19270	0.708
$\frac{3}{2}$	4.5249×10^{-3}	0.14825	0.519
2	1.1241×10^{-3}	0.11229	0.277
$\frac{5}{2}$	-7.9838×10^{-4}	0.080979	0.356
3	-1.5270×10^{-3}	0.052860	0.535
$\frac{7}{2}$	-1.4780×10^{-3}	0.027221	0.677

在 § 1.2 节中曾指出 预期的零场中磁化强度的温度依赖性 由 (2.2.35) 式表示或图 2.1 所示) 应适用于磁畴内部。而实际测量却是在足够强的磁场中, 使磁畴不存在的情况下进行的。为了同理论曲线比较, 将实测曲线外推至 $H = 0$ 。这一测量过程的细节将在第四章中讨论。

事实上, 如果 $H = 0$, 乍看起来似乎空间中没有一个方向可定义为 z 轴, 而推导 (2.2.33) 式时使用了 z 轴的概念。对于铁磁体并无困难, 因为它是各向异性的, 具有一个内在的从优方向。不过, 对于此仍然觉得奇怪的读者, 只要假设 $H = 0$ 是先外加一定值的磁场, 接着减小至零的整个过程的终点就可以了。这个过程与实测过程非常接近。

§ 2.3 反铁磁性

在上节中假设交换积分 J_{ij} 为正, 于是自旋力图彼此平行取向。交换积分为正对于产生铁磁有序极为重要。不过, 就所有的材料而言, 交换积分不一定总是正的, 也可以为负。事实上, 自然界中负的交换耦合比正的更经常出现。当最近邻自旋间的交换积分为负时, 它力图使相邻自旋反平行取向, 低温下也能给出某种有序化。这类材料确实存在, 称为反铁磁体。

有关这一现象的理论, 甚至在实验尚未观测到之前, 已被 L.Néel 提出 (参阅他的 Nobel 奖的演讲中叙述的历史部分) 他研究了由两个次晶格组成的晶体材料 认为一个次晶格上每个自旋的最近邻为另一次晶格的自旋。它们之间存在着反铁磁性耦合 $-J (J > 0)$ 。在后来的研究中考虑了更远自旋间的相互作用。不过, 此处我们将只限于讨论比较简单的情况, 可以看作是 Néel 最初关于最近邻自旋间相互作用的简单推广。我们假设每个自旋除与 p 个另一次晶格上的最近邻自旋之间存在反铁磁性耦合 $-J$ 外 还与 p' 个位于同一次晶格上的次近邻自旋之间有铁磁性耦合 $+J'$ 。为了保持反铁磁性, 我们假设 $J' \ll J$ 并认为更远自旋间的相互作用为零。

文献中可以找到别的可能性, 包括不能将晶格简单地分成两个次晶格的情况。一个突出的例子是 EuSe。虽然, 它的晶格可以分成两个次晶格, 但是 $J \approx J'$ 。所以 很小的微扰 (譬如某些杂质) 就能产生由铁磁性向反铁磁性转变或者相反的转变。此处我们不考虑这类情况,

也不打算推广到更普遍的情况。

用 S_1 和 S_2 分别表示两个次晶格自旋的 z 分量。依照 (2.2.27) 式 次晶格位的有效场分别为：

$$H_1 = g\mu_B H + 2p'J'\langle S_1 \rangle - 2pJ\langle S_2 \rangle \quad (2.3.37)$$

及：

$$H_2 = g\mu_B H + 2p'J'\langle S_2 \rangle - 2pJ\langle S_1 \rangle \quad (2.3.38)$$

将上两式代入 (2.2.28) 式 得：

$$\langle S_1 \rangle = SB_S \left[\frac{S}{k_B T} (g\mu_B H + 2p'J'\langle S_1 \rangle - 2pJ\langle S_2 \rangle) \right] \quad (2.3.39)$$

$$\text{及 } \langle S_2 \rangle = SB_S \left[\frac{S}{k_B T} (g\mu_B H + 2p'J'\langle S_2 \rangle - 2pJ\langle S_1 \rangle) \right] \quad (2.3.40)$$

在 $H = 0$ 的场合，一切都是对称的。容易看出，通过 $\langle S_1 \rangle = -\langle S_2 \rangle$ 的代换，上述的两个方程式变为同样的形式。所以，求解的结果是两个次晶格的磁化强度相同，只是方向相反。

二者的解为：

$$\langle S \rangle = SB_S \left[\frac{2S}{k_B T} (p'J' + pJ) \langle S \rangle \right] \quad (2.3.41)$$

此解与 (2.2.29) 式或者 (2.2.33) 式中 $H = 0$ 的解相同。

由此可见，在外加磁场为零时，反铁磁体的每个次晶格的磁化强度与铁磁体的相同。其温度依赖性如图 2.1 所示。当温度高于某个转变温度时，磁有序消失。在铁磁性的场合，称为 Curie 点；在反铁磁性的场合称为 Néel 点。但是，必须强调指出， $H = 0$ 时，总的磁化强度 $\langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$ 的测量值为零。这就是说，不可能通过宏观磁化强度的测量发现这类材料。这正是为什么在 Néel 提出两个次晶格及反铁磁耦合的概念之前，无人知晓有这类材料的原因。当今，可以用中子衍射了解 Néel 温度以下的反铁磁有序，因为中子通过晶体时与“局域”磁化强度发生作用。也可以用核磁共振和 Mossbauer 效应观测反铁磁有序。这两种方法都是测量单个原子的磁矩，而不是宏观的磁化强度。通过比热及高于 Néel 温度下的磁化率的测量，也可以推论出反铁磁性的存在。前一方法不在此讨论，后一方法将在下一节讨论。

§ 2.4 Curie—Weiss 定律

在高于转变点 铁磁体的 Curie 点，反铁磁体的 Néel 点 的任何温度下 外加磁场为零时 (2.2.33) 式及 (2.3.41) 式的解为零。在 $T > T_c$ 的温度范围，可清楚地，至少是定性地看出，在足够高的温度下，热涨落的作用超过自旋间的相互作用，铁磁有序和反铁磁有序消失，使材料中的自旋与顺磁体一样处于无序排列的状态。

为了定量地研究高温范围的行为，我们将铁磁体和反铁磁体放在一起讨论。因为二者所用的代数运算实际上是相同的，没有必要重复。事实上，可以将铁磁体看作是上节中阐述的由两个次晶格组成的反铁磁体的一个特例。对真实的反铁磁体，我们曾假设 J 和 J' 均为正，并且 $J' \ll J$ 。而简单铁磁体可看作是 $J = 0$ ， $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle$ 及 $H_1 = H_2$ 的特殊情况。也可以看作是 $J < 0$ ， $J' = 0$ 的一个特例。

高温范围在 Brillouin 函数的级数展开式(2.1.20)中只取第一项即可，因为自变量总是小的。于是(2.3.39)式及(2.3.40)式可用下式代替：

$$\langle S_1 \rangle = \frac{S(S+1)}{3k_B T} (g\mu_B H + 2p'J'\langle S_1 \rangle - 2pJ\langle S_2 \rangle) \quad (2.4.42)$$

$$\langle S_2 \rangle = \frac{S(S+1)}{3k_B T} (g\mu_B H + 2p'J'\langle S_2 \rangle - 2pJ\langle S_1 \rangle) \quad (2.4.43)$$

上式为两个次晶格磁化强度的线性方程组。

求解上述线性方程组并不困难。不过并不需要这样做，因为只要将两个方程式相加，求解即可：

$$\langle S_{\text{总}} \rangle = \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle = \frac{CH}{g\mu_B T} - \frac{\theta}{T} \langle S_{\text{总}} \rangle \quad (2.4.44)$$

其中：

$$C = \frac{2S(S+1)}{3k_B} (g\mu_B)^2 \quad \theta = \frac{2S(S+1)}{3k_B} (pJ - p'J') \quad (2.4.45)$$

所以，总磁矩为：

$$\langle M_z \rangle = g\mu_B \langle S_{\text{总}} \rangle = \frac{CH}{T + \Theta} \quad (2.4.46)$$

这一温度依赖关系正是熟知的 Curie—Weiss 定律。它既适用于铁磁体，也适用于反铁磁体，同时与这两类材料的实验结果的确符合的很好。当然，也发现了一些例外 [7] 对此不算在此讨论。通常多以起始磁化率的形式给出：

$$\chi_i = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{\langle M_z \rangle}{H} = \frac{C}{T + \Theta} \quad (2.4.47)$$

此式较(2.4.46)式更为普遍。在很多场合这两种表达式是等效的。Curie—Weiss 定律只适用于低磁场的场合。有时候当 H 很大时，在(2.4.42)式及(2.4.43)式中只取 B_S 展开式中的第一项是不合适的。

在铁磁体和反铁磁体两种场合，当温度高于 Curie 点或者 Néel 点时，实验证明线性近似的的确是合适的（至少在低磁场）对这两种材料 $H = 0$ 时， $\langle S_2 \rangle = 0$ 。前面提到铁磁体是 $J = 0$ 的特例。由(2.4.45)式知，铁磁体的 $\Theta < 0$ ；而对于反铁磁体曾假设 $J' \ll J$ ，由(2.4.45)式知 $\Theta > 0$ 。

于是，根据高温顺磁性起始磁化率的测量可以识别铁磁体和反铁磁体，它们的差别在于 Θ 的符号不同。图 2.2 给出两类材料的 Curie—Weiss 定律的示意曲线图。两者的差别是明显的。这一特性对于 Curie 温度或 Néel 温度极低的材料，当不易直接获得极低温度时特别有用。此时根据高温磁化率的测量数据，可以推断温度降低时，此材料将转变为铁磁体，还是反铁磁体。如果根本没有转变，则材料将保持为顺磁体，直至绝对零度， $J = J' = \Theta = 0$ ，而高温磁化率的倒数 $1/\chi$ 外推至 $T = 0$ 时为零。

在低温下， B_S 的线性近似已不再合适。但是在无序化刚刚开始转变的温度， B_S 的线性近似仍然适用，因为函数是连续的， $H = 0$ 对应的 $\langle S_i \rangle$ 值必须从很小的值开始。所以，在转变温度线性方程组(2.4.42)式和(2.4.43)式在 $H = 0$ 时对 $\langle S_1 \rangle$ 和 $\langle S_2 \rangle$ 仍有非零的解。存