



研究生试用教材

中国地质大学（北京）研究生教材基金
国家自然科学基金委面上基金项目 联合资助

半空间均匀各向同性单相
固体弹性介质与地震波传播

Half-Space Homogeneous Isotropic Single-Phase

Solid Elastic Medium and Seismic Wave Propagation

牛滨华 孙春岩 编著

地质出版社

· 北京 ·

内 容 提 要

半空间均匀各向同性单相固体弹性介质与地震波传播是地震学的基础和重要内容。本书讲述直角坐标系下这种介质模型及其地震波传播知识体系的框架结构, 阐述处理问题的思路和方法、主要结论及其相互关系。围绕知识体系的核心内容即弹性波动方程, 首先阐述位移、应力和应变三个场变量之间关系的三个场变量方程; 然后是三个场变量方程的综合即弹性波动方程及其通解; 再后是波动方程的外延内容即能量方程和速度方程。作为弹性介质与地震波传播的深化, 在最后一章阐述了“黏弹性介质与地震波传播”的基本知识, 可以为进一步学习这方面知识起到导引作用。书中涉及到的弹性介质与地震波传播的相关内容, 均有系统的分析和综合, 对各种问题的归纳和公式的导出都有详尽的阐述。各章后都附有本章内容要点。

阅读本书仅需高等数学、线性代数、矩阵、场论矢量分析和弹性力学等方面的初级知识。为便于读者阅读本书, 在附录中提供了这方面的相关知识。本书在半空间均匀各向同性单相固体弹性介质与地震波传播方面具有较好的系统性和综合性, 可以作为地球物理、勘查技术与工程以及有关专业本科生高年级和研究生的教材, 也可以作为相关专业教师和科技人员教学科研的参考书。

图书在版编目 (CIP) 数据

固体弹性介质与地震波传播 / 牛滨华等著. —北京:

地质出版社, 2005. 12

ISBN 7 - 116 - 04680 - 1

I. 固... II. 牛... III. ①固体—弹性—介质②地震波传播 IV. ①O34②P315.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 144914 号

摇 摇 GUTI TANXING JIEZHI YU DIZHENBO CHUANBO

责任编辑: 祁向雷

责任编辑: 王素荣

出版发行: 地质出版社

社址邮编: 北京海淀区学院路 31 号, 100083

电 话: (010) 82324508 (邮购部); (010) 82324577 (编辑室)

网 址: <http://www.gph.com.cn>

电子邮箱: zbs@gph.com.cn

传 真: (010) 82310759

印 刷: 北京印刷学院实习工厂

开 本: 787mm × 1092mm¹/₁₆

印 张: 16.25

字 数: 410 千字

印 数: 1—1000 册

版 次: 2005 年 12 月北京第一版·第一次印刷

定 价: 40.00 元

ISBN 7 - 116 - 04680 - 1/P · 2637

摇 摇 (凡购买地质出版社的图书, 如有缺页、倒页、脱页者, 本社出版处负责调换)

前 言

半无限空间均匀弹性各向同性介质与地震波传播是地震学最基本和最重要的内容，其中的许多理论及其方法技术在地震学理论与应用中具有重要作用。这种介质模型及其地震波传播的基本理论也是黏弹性、各向异性和孔隙介质等其它复杂介质模型及其地震波传播理论与应用的重要基础。

本书关注半无限空间均匀弹性各向同性介质与地震波传播，讲述直角坐标系下这种介质模型及其地震波传播知识体系的框架结构，处理问题的思路和方法，知识体系中的主要结论认识及其相互关系。

本书内容的框架结构

通过位移与应变方程、位移与应力方程、应力与应变（即本构）方程、弹性波动方程、能量能流方程和相速度群速度特征方程等内容，构建起半空间介质模型中地震波传播理论的知识体系框架。本书围绕上述六个方程及其相关内容进行阐述。该知识体系框架是半空间地震波传播理论体系中最基本、最重要的内容，也是最具代表性的缩影。

首先是建立波动方程的准备知识——场变量的内在方程。围绕位移变量波动方程的建立，需要涉及位移、应力和应变三个（地震波）场变量。三者之间的内在联系即三个基本方程是建立矢量波动方程的基础内容。前面三章，第1章是“位移与应变”，第2章是“位移与应力”，第3章是“应力与应变”，较为详细地阐述位移、应力和应变之间关系的三个基本方程。

其次是第4章的弹性波动方程——场变量的核心方程。基于前面三章内容，着眼于位移与应变、位移与应力和应力与应变三个方程，可以顺利地得到位移变量的波动方程。波动方程是地震波传播理论与应用中的核心内容。本章重点阐述三个问题，它们是波动方程的表达形式和性态分析，矢量地震波场的纵波和横波（波场）的分解，以及波动方程的通解（即波函数）。

最后是“波动方程的外延”——场变量的外延方程。需要以波动方程为基础并进行演化处理来加以解决的问题可以统称为“波动方程的外延”。本书涉及“能量和速度”两个方程。第5章是能量和能流的平衡方程。分为考虑震源和不考虑震源两种情况，后者通常称为地震波传播的能量（即机械能）平衡问题。第6章是相速度和群速度及其特征方程。均匀弹性各向同性介质中，相速度和群速度相等，相速度具有球对称性，即各向同性。求取相速度和群速度普遍适用的方法是速度特征方程法。波动方程的外延内容涵盖了地震波传播中的许多重要定律或规律。

场变量方程与“二次型”。地震波传播理论中的“二次型”放在第6章结束部分。波动方程、速度特征方程和能量（或弹性势能）方程都蕴含了“二次型”问题。因此，可以用数学的“二次型”对这些场变量方程进行综合和贯通。

本书的知识体系、研究问题的思想方法，同样适用于均匀黏弹性各向同性（单相固体）介质；尽管介质模型的差异导致许多结论的不尽相同。

第7章“开尔芬黏弹性介质与地震波传播”是半空间均匀弹性各向同性介质地震波内容的延伸和深入。黏弹性介质与地震波传播同样是地震波传播理论与应用的重要组成部分，该章内容为有关读者进一步深入地学习黏弹性介质的相关知识提供了“导引过程”。作者将在另一本书中较为系统地深入阐述黏弹性介质与地震波传播的内容。

预备知识是作者为便于读者阅读本书而准备的，这部分内容主要包含行列式、矩阵、张量及其性质、矢量分析、场论初步、傅里叶变换以及诺特方程和佐谱里兹方程。考虑到有关读者具有一定程度的上述知识和弹性力学的知识，因而基本上可以不必额外再翻阅其它书籍就可以顺利地阅读本书。有关读者也可以根据实际情况的需要，通过参考相关的其它书籍和文献资料，进一步深入地学习这方面的知识。

致谢

本书的第1、2章和预备知识由孙春岩教授编写，其余章节由牛滨华教授编写。感谢中国地质大学（北京）研究生院对本书出版的大力资助；本书编写得到国家自然科学基金委面上基金49974028和40474043项目的资助，书中有关内容也与基金项目的研究内容密不可分，对基金项目给予的资助表示衷心的感谢；真诚地感谢同济大学海洋地质地球物理国家教委重点实验室对本书部分研究工作和出版给予的支持。特别要感谢杨宝俊教授、高锐研究员、张中杰教授、于晟研究员对作者工作一贯地支持以及对作者撰写本书给予的真诚鼓励和具体帮助。作者还要感谢本书所引用参考文献的各位学者和专家。

本书的文字及公式校对工作，孙晟、李国平、黄新武、李佳、李亚晶、孙小芳、张文忠、王荣东等博士和硕士都付出了辛勤劳动并提出过宝贵意见，作者对他们表示十分衷心的感谢。由于作者水平所限，书中不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

作者于北京
2005年9月

目 录

1 位移与应变	(1)
1.1 位移增量方程与位移梯度矩阵	(1)
1.1.1 矩阵形式的位移增量方程	(1)
1.1.2 张量形式的位移增量方程	(2)
1.1.3 位移梯度矩阵的对称与反对称矩阵	(3)
1.2 应变矩阵的对称与反对称矩阵	(5)
1.2.1 对称应变矩阵	(5)
1.2.2 反对称应变矩阵	(7)
1.3 位移增量方程的物理意义	(9)
1.4 科西方程与对称应变矩阵	(11)
1.4.1 应变矩阵的单双角标表示法	(11)
1.4.2 科西方程	(12)
2 位移与应力	(17)
2.1 应力矩阵	(17)
2.1.1 体积元上的应力	(18)
2.1.2 正应力、切应力和主应力	(22)
2.2 平动运动方程——奈维尔方程	(26)
2.2.1 平动运动方程——奈维尔方程	(27)
2.2.2 弹性介质的静态平衡方程	(29)
2.3 转动运动方程——应力张量对称方程	(32)
2.3.1 转动运动方程	(32)
2.3.2 转动运动方程的分析	(34)
3 应力与应变	(37)
3.1 本构方程和弹性矩阵	(37)
3.1.1 本构方程	(37)
3.1.2 介质的弹性矩阵	(38)
3.2 均匀弹性各向同性介质的本构方程	(39)
3.2.1 五个弹性模量	(40)
3.2.2 均匀弹性各向同性介质的本构方程	(43)
3.2.3 科西方程与本构方程之间的系数匹配关系	(46)
3.2.4 速度参数表达的动态弹性模量	(47)
3.3 均匀弹性各向同性介质的弹性矩阵	(49)
3.3.1 弹性矩阵的四种表达形式	(49)
3.3.2 顺度矩阵	(51)

3.4	摇均匀弹性各向同性介质的泊松比和速度平方比	(55)
3.4.1	摇泊松比的四种表达形式	(55)
3.4.2	摇泊松比与速度比的关系	(56)
3.4.3	摇泊松比与岩性和流体成分的关系	(57)
4	摇弹性波动方程	(63)
4.1	摇三维三分量波动方程	(63)
4.1.1	摇矩阵形式的三维三分量波动方程	(63)
4.1.2	摇分量形式的三维三分量波动方程	(64)
4.1.3	摇矢量形式的三维三分量波动方程	(66)
4.1.4	摇射线上的矢量波动方程	(67)
4.2	摇弹性流体介质的波动方程	(69)
4.2.1	摇弹性流体介质的三个方程	(69)
4.2.2	摇弹性流体介质的波动方程	(70)
4.2.3	摇弹性流体介质波动方程的波函数	(71)
4.3	摇矢量波场的胀缩纵波场和旋转横波场的分解	(72)
4.3.1	摇矢量弹性波场中无旋场和无散场的分解	(72)
4.3.2	摇矢量弹性波场中体变系数和旋转系数波动方程的分解	(73)
4.3.3	摇矢量弹性波场中标量位和矢量位函数的分解	(74)
4.3.4	摇应变系数与位移位函数之间的关系	(76)
4.4	摇三维三分量波动方程的退化处理	(78)
4.4.1	摇二维单垂向分量即 2D-1VC 波动方程	(79)
4.4.2	摇三维单垂向分量即 3D-1VC 波动方程	(79)
4.4.3	摇二维三分量即 2D-3C 波动方程	(80)
4.4.4	摇二维二分量即 2D-2C 波动方程	(81)
4.4.5	摇一维双水平分量即 1D-2HC 波动方程	(82)
4.5	摇波动方程的波函数	(83)
4.5.1	摇球面波波动方程及其波函数	(84)
4.5.2	摇均匀平面简谐波函数	(85)
4.5.3	摇标量波动方程的通解及其物理意义	(87)
4.5.4	摇非均匀平面简谐波函数	(90)
4.5.5	摇程函方程	(91)
5	摇波的能量和能流方程	(99)
5.1	摇能量密度矢量和波场能量平衡方程	(99)
5.1.1	摇能量密度矢量和波场能量平衡方程	(99)
5.1.2	摇能量平衡方程的物理意义	(102)
5.2	摇能流密度矢量和波场能流平衡方程	(103)
5.3	摇弹性机械能平衡方程和能速度	(105)
5.3.1	摇弹性机械能平衡方程	(105)
5.3.2	摇速度矢量波动方程	(107)

5.3.3	摇波能量传播的速度	(108)
5.3.4	摇平面波的机械能和能流	(110)
摇5.4	摇弹性矩阵的物理可实现条件	(116)
5.4.1	摇弹性机械能与弹性矩阵的对称性	(116)
5.4.2	摇弹性矩阵的正定性与物理可实现条件	(117)
6	摇波的相速度和群速度	(121)
摇6.1	摇相速度及其时间空间域特征方程	(121)
摇6.2	摇均匀弹性各向同性介质相速度及其特征方程	(124)
摇6.3	摇群速度及其频率波数域特征方程	(127)
6.3.1	摇群速度及其特征方程	(128)
6.3.2	摇均匀弹性各向同性介质群速度及其特征方程	(130)
摇6.4	摇速度特征方程和二次型问题	(133)
6.4.1	摇特征方程	(134)
6.4.2	摇数学上的特征值与专业上的速度之间的一致性	(134)
6.4.3	摇二次型问题	(135)
6.4.4	摇三阶特征矩阵与六阶弹性矩阵的一致性	(136)
7	摇开尔芬介质与地震波传播	(143)
摇7.1	摇本构方程和波动方程	(143)
7.1.1	摇本构方程	(143)
7.1.2	摇波动方程	(144)
摇7.2	摇矢量波场的纵波和横波波场的分解	(146)
7.2.1	摇矢量波场无旋位移场和无散位移场的分解	(147)
7.2.2	摇矢量波场体变系数和旋转系数的波动分解	(148)
7.2.3	摇位移位的标量位和矢量位满足的波动方程	(148)
7.2.4	摇应变系数与位移位函数之间的关系	(149)
摇7.3	摇地震波的能量和能流	(150)
7.3.1	摇能量平衡方程	(150)
7.3.2	摇能流平衡方程	(153)
7.3.3	摇机械能方程和波的振幅与能量	(154)
摇7.4	摇相速度特征方程和复数相速度	(156)
摇7.5	摇横波的波函数及其特性	(158)
7.5.1	摇横波的复数波数	(158)
7.5.2	摇横波的复数相速度	(160)
7.5.3	摇横波复数相速度与复数波数之间的关系	(161)
7.5.4	摇横波的波函数及其特性	(162)
摇7.6	摇纵波的波函数及其特性	(170)
7.6.1	摇纵波的复数波数	(171)
7.6.2	摇纵波的复数相速度	(172)
7.6.3	摇纵波复数相速度与复数波数之间的关系	(173)

7.6.4	摇纵波的波函数及其特性	(175)
摇7.7	摇开尔芬介质的泊松比和速度平方比	(183)
7.7.1	摇复数弹性模量	(184)
7.7.2	摇开尔芬介质的相速度平方比	(185)
7.7.3	摇开尔芬介质的泊松比	(186)
摇7.8	摇黏弹性介质的波场延拓	(187)
7.8.1	摇黏弹性介质波动方程的波场延拓	(187)
7.8.2	摇黏弹性介质波场延拓的实现过程	(189)
8	摇预备知识	(195)
摇8.1	摇行列式	(195)
8.1.1	摇行列式及其拉普拉斯展开定理	(195)
8.1.2	摇行列式的主要性质	(195)
摇8.2	摇矩阵	(196)
8.2.1	摇矩阵及其秩	(196)
8.2.2	摇特殊矩阵	(197)
8.2.3	摇矩阵的运算及其性质	(201)
8.2.4	摇矩阵变换	(203)
8.2.5	摇特征值与特征矢量	(203)
8.2.6	摇线性方程组	(205)
摇8.3	摇张量及其性质	(206)
8.3.1	摇张量的基本概念及定义	(207)
8.3.2	摇张量的运算和主要性质	(209)
8.3.3	摇张量判别定理	(210)
摇8.4	摇矢量分析	(210)
8.4.1	摇矢量概念	(210)
8.4.2	摇矢量代数	(211)
8.4.3	摇标量积 (数量积、点积、内积)	(212)
8.4.4	摇矢量积 (叉积、外积)	(212)
摇8.5	摇场论初步	(213)
8.5.1	摇场论的基本概念	(213)
8.5.2	摇梯度、散度与旋度	(214)
8.5.3	摇场的分类和性质	(215)
8.5.4	摇矢量场的分类	(217)
8.5.5	摇描述场的物理量	(218)
8.5.6	摇场函数的导数和积分	(220)
摇8.6	摇二次型和对称矩阵	(221)
8.6.1	摇实二次型的一般形式	(221)
8.6.2	摇二次型的主要定理	(222)
8.6.3	摇埃尔米特型的一般形式	(223)

8.6.4	对称矩阵和正定矩阵	(224)
8.7	傅里叶变换	(224)
8.7.1	连续傅里叶变换的定义	(224)
8.7.2	连续傅里叶变换的主要性质	(225)
8.7.3	抽样定理	(228)
8.8	诺特方程	(228)
8.8.1	诺特方程	(229)
8.8.2	平面波法线入射时的诺特方程	(231)
8.8.3	平面波倾斜入射时的情况	(232)
8.9	佐谱里兹方程	(232)
	参考文献	(235)

绪 论

地震波理论博大精深^[1,2]。地震波理论从地震波的物理过程考虑可以分为：地震波的天然和人工激发、地震波的传播和接收记录三部分。当然，从其它角度对地震波理论分类，还可以得到多种不同形式的分类结果，例如地震波传播的正演和反演理论等。不管采用何种分类方法，介质模型与地震波传播始终是地震波理论的核心内容之一^[1~5]。

“天然”和“人工”地震波场的地震波传播具有一致性，这里主要关注人工地震场中的“介质模型与地震波传播”，相关的知识可以拓展到天然地震波场。地震波传播理论与其他科学理论一样是一种不断发展的科学理论。因此，人们有必要关注这种理论及应用如何继续发展。这种关注包含对前人重要研究成果和精辟阐述的理解和总结，对现有地震波传播理论成果主体内容的认识，以及对地震波传播理论知识体系不断丰富完善的思考。

鉴于上述情况，作者尽己所能并就自己目前研究内容所涉及的范围，在这里简述地震波传播理论的主要问题。其中包含地震学背景中地震波传播的基本问题，地震波传播动力学的基本问题，地震波传播与介质和界面的关系，孔隙介质与地震波传播，以及均匀弹性各向同性等几种典型介质模型及地震波的传播。这些内容对读者阅读本书以及进一步深入学习这方面的知识肯定会大有益处。

1 摇地震学与地震波传播

地震学是研究地球内部结构与构造的重要手段，与人类资源、能源、环境和社会持续发展紧密相关。地震学涵盖震源、传播、接收、介质成分和介质结构及构造等众多问题。地震学可以分为天然地震学、测震学、核爆地震学、军事地震学、模型地震学和勘探地震学等众多分支领域。地震学研究范围涉及地球层圈结构、天然地震预测防灾、地壳上地幔物质成分结构与构造探测、油气（及水合物）能源勘探、水文环境工程建筑探测等方方面面，已经与人类社会政治、经济和军事密不可分。由此受到国内外地震学界的广泛重视和百余年持续不断的研究，研究成果取得了实测地震数据的验证，并在油气能源勘探和开发中被广泛应用。地震学为 20 世纪人类文明的发展发挥了不甚受人关注，但却不可或缺的乃至功不可没的作用^[1,8,13~22]。

地震学具有三个特点^[1]：①地震学与地球的力学性质和动力学密切相关；②地震学对地球内部的研究能进行到最大的深度，具有高于任何其它地球物理学分支所能达到的分辨力和精度；③地震学提供的是地球内部现状的资料。此外，地震学可以在三维空间按不同尺度范围进行研究，小到不足 1m 乃至更薄的岩层，大到几千公里的板块。

地震波理论是各种门类地震学科的基础和重要内容，地震波传播理论突出强调波的传播与媒介之间的关系，地震波传播理论涵盖了人工地震探测与信息技术等众多门类领域^[9~11]。地震波传播理论研究备受关注的的前沿热点课题主要有以下几点：①地球介质的

非弹性、非单相性和各向异性。例如，介质的非弹性。在专著《地球物理学基础》（傅承义等，1985）中，有两章专门讨论地球介质的非弹性，足见其重要。波在实际物质中传播，波振幅由于各种可在宏观上归纳为“内摩擦”和“散射”的过程而衰减；振幅的衰减或能量的耗散必然使地震波的传播发生频散；衰减介质界面的反射系数、转换系数和透射系数可由弹性介质的结果转换成复弹性常数^[1]。在地球某些介质中，地震波在地震勘探频率范围内振幅衰减呈近抛物线型^[27]。例如，地震波传播速度的各向异性一直是研究的前沿问题，地球层圈结构的认识与波的各向异性密不可分，1999年地核物质成分各向异性的发现，被作为当年的世界十大自然科学新闻，足见介质各向异性研究的重要性。介质的非单相性，如孔隙流体介质与油气能源储层、天然气水合物、水文、环境、工程和地质灾害预测防治等方面都有密切关系，介质的非单相性与波的传播同样是研究的前沿问题。②地震波传播反演问题是地球物理学中一个核心的理论问题（傅承义等，1985）。其中包含地震波反演，层析成像与偏移成像技术。反演地震波速的层析成像技术基本成熟（Dziewonski, 1984; Yanovskaya, 1984; Nataf. 等, 1986）；偏移成像的一个最主要技术是有限差分法，其开创性工作是由美国斯坦福大学 J. Claerbout 教授 1971 年完成的，我国的马在田教授对这一专门技术做出了重要贡献（马在田，1989）。③非线性地震波的传播。在地球介质中传播的地震波是非线性波，由于观测手段的限制以及工业界的要求，需对这种波加以合理的简化。已经对非线性地震波进行了初步研究，包括基本理论、基本性质和正演模拟以及分析技术等（钱祖文，1992；Niwa, 等, 1997；杨宝俊等, 1997；张中杰, 2001）。非线性波研究的难点不仅在观测方面，而且在一系列传播规律的认识如多次波问题、反射能力、衰减等方面。④天然地震预报。天然地震预报和地震灾害防治与人类社会、经济和政治关系密切，它始终是人们致力于解决而又未完全解决好的一个重大理论和应用问题。今后相当长的一段时间，人们仍然需要面对并继续努力攻克天然地震的预报和防治问题。

地震波传播理论与应用涵盖数学、物理学和信息科学等多门学科领域，是一个庞大复杂的系统工程。例如，波动方程求解中涉及到方程的表达种类、域间变换等数学物理方法的多种问题，以及方程的解析、物理、数值求解和正反演方法等众多研究内容^[11~28]。

2 地震波传播动力学的基本问题

地震波传播理论总体可以分为积分型波动传播理论和微分型波动传播理论。积分型波动传播理论是基于惠更斯（Huygens）、菲涅尔（Fresnel）和克希霍夫（Kirchhoff）积分等原理建立起的一套理论体系。微分型波动传播理论则是基于连续介质微分体积元弹性动力学等原理建立起的一套理论体系。两种理论体系具有本质的一致性。

本书阐述以微分波动理论为基础的地震波传播动力学的基本问题^[31~34]。地震波传播动力学的核心是弹性波动方程。波动方程是地震学覆盖或与之交叉相关学科各类分支领域所要研究的核心内容；无论是理论正反演还是实际应用，波动方程的地位至关重要。本书围绕波动方程重点阐述波动方程的建立、波动方程和波动方程的延伸三部分具体内容。

2.1 波动方程的建立

不论何种介质模型，围绕位移变量波动方程的建立都要涉及位移、应力和应变三个场

变量。三个场变量之间可以建立位移与应变、位移与应力和应力与应变三个场变量方程，三个方程阐明了位移、应力和应变三者之间的内在联系。这三个场变量方程是建立波动方程的基础。

位移与应变关系

科西 (Augustin Cauchy) 在 1822 年对胡克 (Robert Hooke) 早期的研究进行了深化，提出了六个独立的应力分量和六个独立的应变分量的概念，并指出了应变与位移之间存在的关系^[1,3,8]。

位移与应变之间关系集中表现在：位移增量方程、位移梯度矩阵的分解方程、位移矢量的散度和旋度方程，以及应变位移方程即科西 (Cauchy) 方程。位移增量方程作用至为重要。其一，它回答了什么是位移，即位移可以用介质的应变状态去描述。其二，该方程引入了位移梯度矩阵。位移与应变最直接的关系是：位移梯度矩阵定义了体积元的应变矩阵，并且通过对称与反对称应变矩阵阐明了应变的类型和性质。其它的方程，例如位移矢量的散度和旋度方程以及对称应变位移方程即科西方程，均是从不同角度描述了位移与应变的关系。这种关系都可以借助于位移梯度矩阵去认识和理解。科西方程是建立矢量弹性波动方程的基础方程之一。

位移与应力关系

奈维尔 (Navier) 在 1821 年开展了弹性介质受力情况下，介质中的动力即弹性力的一般平衡方程和振动方程的研究，对位移与应力之间关系的明确表述奠定了基础。泊松 (Poisson) 在这一问题上也进行了有意义的工作^[1,3,4,8]。

通常称位移与应力关系为运动方程，该方程本质上是弹性动力学中的动态力平衡方程；应用牛顿第二定律可以建立这个方程。运动方程包含平动运动方程即奈维尔方程和转动运动方程即应力张量对称性方程。平动运动方程的建立表明：位移和应力分别蕴含在平动运动方程的惯性力和弹性力之中。应力张量是建立运动方程的基础，力与应力通过体积元表面积紧密地结合在一起；力的矢量性与应力的张量性是一对既有区别又有联系的特性。应力张量的对角线元素即正应力表现了胀缩力，非对角线元素即切应力表现了剪切力，应力张量的对称性表现了旋转力。这三种“力”是矢量弹性介质体波中，存在胀缩型纵波和剪切旋转型横波的基本“力源”。由此可知，位移与应力之关系阐明了“力源”即应力状态及类型与位移的状态及类型之间的因果关系。奈维尔方程也是建立矢量弹性波动方程的基本方程之一。

应力与应变关系

应力与应变关系的研究由来已久^[1~4,8]，这种关系现在称为本构方程即广义胡克 (Hooke) 方程。胡克 (Robert Hooke) 于 1660 年发现了胡克定律。它通过对弹性物体的测量，得出“应力正比于应变”的结论；但是他对这个问题的提法还存在含混不清之处；因为，应力和应变是张量的概念那时还不存在。19 世纪初期，科西 (Augustin Cauchy) 第一个发现了我们现代关于应力的许多概念，特别是他理解用 (包含应力和应变) 张量来阐述问题的方式和表达问题的结果。直到 20 世纪，张量才普遍为人们所接受并应用。把经典的胡克定律推广为现代胡克定律，人们统称为“广义胡克定律”，该定律严格的表述是“应力张量的每个分量是应变张量的所有分量的线性组合”。

本构方程的研究与弹性模量的研究密不可分，许多学者对弹性模量的研究做出过贡

献。杨 (Young) 是第一个对剪切应变即剪切模量开展研究的学者, 他在 18 世纪提出了研究模量的最普遍的数学理论, 并定义了后人称之为“杨氏模量”的弹性模量。泊松 (Poisson) 1828 年发现了现在称之为的纵波和横波, 给出了“泊松比”的定义; 对于他所限定的模型, 纵波速度是横波速度的 $\sqrt{3}$ 倍, 这种模型就是后人所称的“泊松介质”。几乎在同一时期, 学者拉梅 (Lamé) 对弹性模量 λ 和 μ 进行了研究, 后人对这两个弹性模量统称为“拉梅常数”。体积模量则是在稍后的时间, 人们通过数学方法以及实验手段引入的。总之, 至 19 世纪末人们已经比较清楚地认识了均匀弹性各向同性介质的五个弹性模量; 其后的进一步研究表明: 五个弹性模量中只有两个是独立的, 即其中的任何一个模量都可以用另外两个模量解析表达出来。更为一般的即任意非各向同性弹性介质的理论是格林 (Green) 奠定的; 最复杂的各向异性介质可以用 21 个独立的弹性系数即弹性模量给予描述, 最简单的各向同性介质则仅有 2 个弹性系数, 介于最复杂与最简单之间就是其它各向异性介质。

地震波与介质是一对关联体, 作为载波的介质可以被视为系统, 在仅考虑传播过程中, 应变作为输入而应力作为输出时, 系统的响应函数就是“弹性矩阵”; 当把输入与输出交换时, 可以得到胡克方程的另一种表达形式, 对应的系数矩阵则称为“顺度矩阵”。胡克方程的重要性不仅表现在它是建立波动方程的基础方程之一, 同时它还能够通过波动方程描述对应介质的弹性波特点。例如, 均匀弹性各向同性等基本介质模型以及由它们辐射出的其它介质模型, 这些介质模型的波动方程均不一样。弹性矩阵具有正定对称性是物理客观在数学上反映出的重要性质。按照物质结构分类, 弹性矩阵一般可以分为八种情况。最复杂的是极端各向异性弹性介质; 最简单的是均匀弹性各向同性介质。

2.2 波动方程

关于弹性波 (或地震波) 传播的研究与物理光波和声波的研究密不可分^[1~4,8]。泊松在 19 世纪 20 年代首先提出了弹性介质中同时存在纵波和横波的概念, 并建立了“泊松介质”; 泊松还证明了位移运动方程中可以由两个位移分量之和表示; 其中之一是“标量位 (即标量势)”函数的梯度, 它满足纵波速度的波动方程; 另一个是涡旋场 (即旋度场), 它满足横波速度的波动方程。泊松的关于波动方程的通解中没有明确包含涡旋场位移分量的“矢量位”函数。拉梅 (Lamé) 1852 年首先完整地利用标量位和矢量位表述了波动方程的通解, 后人称这样的解为“拉梅解”; 在电磁场理论的研究中亥姆霍兹 (Helmholtz) 对矢量场的分解也做出过同样的贡献。经过半个世纪之后, 1906 年日本的地震学创始人森房吉 (F. Omori) 利用当时世界上最好的地震台网观测到了地壳固体介质中存在的纵波和横波, 用实际观测的地震数据证实了泊松和拉梅等人理论研究成果的正确性。

基于位移与应变、位移与应力和应力与应变三个场变量方程, 可以顺利地得到位移变量的矢量波动方程。波动方程本身可以涵盖众多的理论与应用问题, 能够开展研究的内容也极为广泛。本书仅阐述波动方程本身所揭示的主要内容。

首先是波动方程的表达形式和性态。例如, 三维三分量波动方程、非三维三分量波动方程和射线上的矢量波动方程, 还有矢量弹性波动方程和标量弹性波动方程等。由于理论正反演研究的需要, 目前的计算机技术无论是硬件还是数值计算方法, 还不能够完全支撑仿真的三维三分量矢量波场运算。同时, 实际工作中各种目的的地震波数据采集也不都是

矢量弹性即非三维三分量。例如，测线上的一维单垂向分量、面积上的三维垂向单分量、井中三分量、井中定向激发的四分量、六分量和九分量采集等。因此，波动方程表达形式的多样性是一种需要。这部分工作对弹性波场的正演模拟、反演方法研究、观测系统设计和波场的分析解释有切实作用。需要注意的是，要处理好波动方程的“多样性”与矢量弹性波场客观“唯一性”之间的关系。

其次是矢量弹性波场的纵波和横波波场的分解，换一种说法就是矢量弹性波场是由纵波和横波两种波场合成的。从数学场论角度讲，矢量弹性波场是无旋无散场，波场分解与合成在理论上是成立的^[8,53]。由于介质模型的不同，波场分解的特殊性和分解方法的差异性是在存在的，这个问题是场论和波动方程自身理论需要不断研究的课题。同时，这个问题也是多波多分量地震勘探数据采集和处理的理论基础。矢量波场分解把波场特性研究转换为单一纵波或横波波场的研究，降低了波场研究的复杂程度。此外，波场分解本身能够呈现出地震波传播的若干重要特性。例如，比奥（Biot）孔隙流体介质流相成分尽管存在拖曳旋转矢量，但不存在横波扰动。再如，各向异性介质体积元偏振方向与波的传播方向存在偏差角等。这些重要现象和结论都是通过波场分解后得到的。

最后是波动方程的通解即波函数^[1~4,8]。达朗贝尔（D'Alembert）1750年通过对振动弦的研究，首先讨论了一维波动方程的偏微分方程。斯托克斯（Stokes）1849年首次进行了体力引起的弹性波动的研究，推导出基本的奇异解。洛夫（Love）于1903年利用延迟位解决了类似的问题，它是著名的克希霍夫积分（Kirchhoff, 1882年）的扩展，而克希霍夫积分则是经典的惠更斯（Huygens）和菲涅尔（Fresnel）原理的数学表达形式；这个方程是今天的地震波场积分偏移成像技术的理论基础。1885年纽曼（Neumann）证明了对于有限弹性介质，三个基本的初值_边值问题的解的唯一性。

求解满足波动方程的波函数是一类内容颇多且具有一定难度的问题，这里仅强调波动方程通解的重要性。通解存在于时间-空间域或频率-波数域，并可以直接表明地震波的传播特性。另外，球面波、均匀平面波和非均匀平面波都是波函数的基本表达形式。波的几何扩散效应和波的视速度定理等均是在确定波的通解中得到的地震波传播的基本现象和所遵循的规律。几何地震学的许多结论都可以通过对波动方程的通解处理分析后得到。

2.3 波动方程的延伸

波动方程的延伸是指波动方程仅稍做变化，就可以得到地震波场和地震波传播的某些重要认识和结论。波动方程的直接延伸主要表现在下述三个方面。

波场中能量平衡和能流平衡方程即坡印廷理论（Poynting's theorem）^[1,4]。平衡方程分为考虑震源和体积力以及不考虑震源和体积力两种情况，其中后者通常称为地震波传播的机械能平衡问题。上述平衡方程都是对波动方程稍做变化后得到的。地震波传播的实质是介质内体积元之间的能量传递。因此，波场能量问题的研究不仅是理论体系完备性的要求，同时也能有助于从能量角度深入地认识地震波的传播规律，有益于波场仿真模拟研究。地震波场正问题仿真中的众多数学物理方法，例如有限元方法、边界元方法和积分偏移方法等都是基于波场能量平衡而建立的。在天然地震中，能量和能流问题对研究地震震级、地表面破坏程度以及防灾减灾等都有切实的应用价值。

相速度和群速度及其特征方程即克利斯托菲尔（Christoffel）方程^[1,4]。速度特征方程

也是波动方程稍做变化后得到的。对指定的介质模型，相速度是描述介质性质和波场分析的重要参数之一，相速度的特性决定着介质模型的特性。例如，均匀弹性各向同性介质和均匀弹性各向异性介质名称中，均体现了相速度对介质模型性质的刻画。对于均匀弹性各向同性介质模型，其相速度和群速度是相等的，并且相速度具有球对称性即各向同性。求取相、群速度的基本方法之一是克利斯托菲尔方程即速度特征方程方法，它是普遍适用的。位函数法、待定系数法和平均场方程等方法也是求取相速度的方法^[5]。

波在自由界面和弹性界面的广义散射^[1-4,8]，该问题是波动方程加上界面条件的边值定解问题，它是地震波传播理论中的重要内容。波在自由界面和弹性界面广义散射的边值定解问题不是波动方程自身稍做变化导引出的问题。因此，本书对这部分内容不做阐述和讨论。这里需要简单地提及波在界面的广义散射研究发展的脉络。格林（George Green）于1839年首先针对自由界面试图用弹性波解释光的反射和折射，在细节上类似现代的平面波在界面的广义散射分析；但是，格林没有完成两个半空间不同弹性介质界面上波的反射和透射的进一步研究。波在两个半空间弹性界面的深入研究是诺特（Knott）在1899年和佐普里兹（Zoeppritz）在1901年分别独立完成的，这就是今天大家所熟知的诺特方程和佐普里兹方程。瑞雷（Rayleigh）1887年从理论上推导了面波的存在即现在所称的瑞雷面波，这种面波是一对平面谐波（P波和SV波）在弹性半空间表面平行入射时产生的。兰姆（Horace Lamb）1904年研究了固体半空间自由表面上点脉冲震源定解问题的精确解，这实质上是球面波的反射和折射问题；对分界面上的此类问题，后来人们统称为“兰姆问题”；其后的研究结果表明，自由表面点源发射的球面波可以表示为平面波的叠加（Weyl）和作为柱面波的叠加（Sommerfeld即索莫菲积分）。拉夫（Love）于1911年在研究表层对瑞雷面波传播的影响时，发现了另一种面波；这就是当覆盖层的横波速度小于下伏层的横波速度时，在这两种介质的分界面上可以产生SH型的面波。斯通利（Stoneley）在1924年推导出介质内部弹性分界面附近存在斯通利面波即瑞雷型面波。瑞雷和拉夫面波在天然和人工地震（陆上自由表面）观测中普遍存在，而斯通利面波仅在井中才能观测到。

综上所述，地震波传播动力学的主体内容由波动方程建立、波动方程和波动方程延伸三部分组成。这种表述既适用于均匀弹性各向同性介质模型，也适合于均匀弹性各向异性等复杂介质模型。本书重点关注均匀弹性各向同性介质的波动方程建立、波动方程和波动方程延伸。

3 地震波传播与介质和界面关系

地震波的传播规律和特点与介质因素和界面因素关系密切。介质总体可以分为单相和非单相介质两种情况。界面总体可以考虑自由界面和弹性界面两种情况，并且需要考查界面两侧介质的性质。这里仅就地震波传播理论中的“介质模型与地震波传播正问题”的相关问题进行简述。

3.1 单相介质和孔隙介质与地震波传播

现代地震波传播理论和应用研究表明，介质模型的复杂性越来越趋近实际。介质总体

可以分为单相和非单相介质两种情况。其中非单相的孔隙介质模型及地震波传播的研究始终是需要重点关注并致力于解决的问题^[5~10]。

具有单一弹性性质的介质为单相介质，例如固体介质和流体介质。流体介质又可以分为气体介质和液体介质。多个弹性性质介质组合在一起的介质为多相介质，或称其为非单相介质。孔隙介质就是典型的非单相介质。单相固体介质的典型是均匀弹性各向同性、均匀黏弹性各向同性、均匀弹性各向异性和均匀黏弹性各向异性等几种介质模型。单相固体介质本构方程中的弹性矩阵是六阶矩阵，并且弹性矩阵中不出现孔隙度参数即默认孔隙度为零。单相固体介质及其地震波传播的研究较之孔隙介质成熟，特别是均匀弹性各向同性和均匀黏弹性各向同性介质中地震波的传播，相关的理论和技术在实际中得到了广泛而有成效的应用^[19~30]。

孔隙介质可以用孔隙度 ϕ 以及饱和度 S 参数予以描述。孔隙介质的弹性参数可以用组分形式表达。例如，两相孔隙介质中的密度参数： $\rho^e = (1 - \phi)\rho^m + \phi\rho^f$ ，这是为大家所公认并普遍使用的密度组分公式（即质量守恒方程）。式中 ρ^e 是孔隙介质的密度（即整体介质密度）， ϕ 是孔隙度， ρ^m 和 ρ^f 分别是孔隙介质中骨架和孔隙内介质的密度。孔隙介质中每种不同弹性的介质均称为一种“相”。孔隙介质至少是双相以上的介质。当三相孔隙介质中饱和度 $S = 0$ 时，三相孔隙介质退化为两相孔隙介质。当两相孔隙介质中孔隙度 $\phi = 0$ 时，介质退化为单相固体介质。如果孔隙内填充流体且孔隙度 $\phi = 1$ ，则两相孔隙介质退化为单相流体介质。

由于实际孔隙介质的复杂性和多样性，孔隙介质模型需要考虑的因素也是复杂和多样的。孔隙介质由固体和流体两部分所构成。固体与流体组构在一起即孔隙内填充流体的孔隙介质称为孔隙流体介质，例如孔隙内填充石油的孔隙流体介质。固体与固体组构在一起即孔隙内填充固体的孔隙介质称为孔隙固体介质，例如孔隙内填充水合物的孔隙固体介质。因此，孔隙介质可分为孔隙流体介质和孔隙固体介质。由于固体和流体两种单相介质均需要考虑弹性、黏性和黏弹性。于是，孔隙介质还可以分为弹性孔隙介质和黏弹性孔隙介质。如同单相介质的弹性、黏性和黏弹性是由介质本构方程所描述的一样，孔隙介质的弹性、黏性和黏弹性也可以通过介质的本构方程予以描述。再做进一步的考虑，孔隙介质还可以分为孔隙岩石介质和孔隙岩土介质，以及固结成岩的孔隙介质和未固结成岩的孔隙介质。如果把介质的各向异性考虑进去，孔隙介质的模型将变得更为复杂。

孔隙介质及其地震波传播无论在理论层面还是研究难度上均具有极大的挑战性。比奥（Biot）于1956年首次系统地提出饱和流体多孔隙介质（即双相介质）的弹性波传播理论^[9~10]。近半个世纪以来双相介质理论和应用得到了长足的发展，许多成果已经应用于实际生产。但是，比奥双相介质理论仅是孔隙介质理论中的一种模型。因此，孔隙介质以及复杂孔隙介质地震波传播问题将始终是需要重点关注并致力于研究的内容。

3.2 摇界面与地震波传播

地震波的传播除了与介质因素（即介质模型）有关外，还与介质的结构即界面因素关系密切。界面总体分为自由界面和（介质内部）弹性界面。波在界面的广义散射包含纵波与横波的入射、同类反射与透射和异类反射与透射，波在界面上的全反射和折射，波在自由界面的瑞雷（Rayleigh）和拉夫（Love）面波，以及介质内部弹性界面的斯通利

(Stoneley) 面波等各种现象。因此, 波在界面的散射需要考虑界面的性质即界面上覆和下伏介质的性质。

波在自由界面的广义散射。自由界面下伏介质可以是涵盖介质黏性和各向异性因素的固体、流体和孔隙介质。波在固体和流体自由界面广义散射的研究较为成熟, 其成果也得到广泛的应用。例如, 固体自由界面的纵波与横波的入射、同类反射与透射和异类反射与透射, 波在界面上的全反射和折射, 以及瑞雷 (Rayleigh) 和拉夫 (Love) 面波。波在孔隙介质自由界面的广义散射仍需在继承前人成果基础上努力深入地探索和发展。

波在介质内部弹性界面的广义散射。界面上覆和下伏介质均可以是固体、流体和孔隙介质, 以及这三种介质的组合。例如, 考虑波从上覆介质入射弹性界面时, 可能存在的介质组合是: 固体-固体、固体-孔隙介质、固体-流体、孔隙介质-孔隙介质、孔隙介质-固体、孔隙介质-流体、流体-流体、流体-固体和流体-孔隙介质共计 9 种情况。波在单相介质即固体-固体和流体-流体弹性界面广义散射的研究最为成熟。例如, 固体-固体弹性界面时, 著名的诺特 (Knott) 方程和佐谱里兹 (Zoeppritz) 方程。固体-固体之外多种弹性界面的研究仍然需要补充完善, 并需要在理论上系统化并有效地指导实践, 特别是多层介质中波的反射与透射问题。

波在界面广义散射的研究内容。波在各种类型及性质弹性界面的散射, 需要关注的内容主要有: 满足波动方程的边值 (即弹性边界) 定解方程, 满足边值定解方程的波函数方程, 满足波在弹性界面散射的斯奈尔方程, 波在弹性界面表征能量分配的振幅方程, 或反射与透射系数方程。上述四个或五个方程能够从整体上描述波在弹性界面散射的各种现象, 即地震波在弹性界面散射时应该遵循的规律。

综上所述, 地震波传播与介质因素和界面因素关系密切。介质模型可以用孔隙度和饱和度刻画, 主要分为单相和多相介质两类, 或固体、流体和孔隙介质三类。无论是两类或三类介质, 均可以同时考虑介质的黏性和各向异性因素。地震波在上述各类介质中传播时具有完全不同的特性, 需要进行深入细致的研究。界面因素可以分为自由界面和介质内部弹性界面; 同时还要重点考查界面上覆和下伏介质的性质。需要重点关注地震波传播与孔隙介质相关的介质模型和界面类型的各种问题, 它们均是实际应用亟待需要且理论上应该致力于研究解决的前沿课题。

4 典型介质模型与地震波的传播

介质模型因素包含介质的密度、速度和相态等。密度能够引出介质的均匀性与非均匀性即介质的密度是否与空间位置有关。对同一层位介质, 密度与空间位置有关的介质称为非均匀介质, 反之是均匀介质; 介质的非均匀性会引起波的散射和干涉等复杂现象。速度可以引出介质的各向同性与各向异性, 即地震波在介质中传播的速度是否与传播方向有关; 与方向性有关的介质称为各向异性介质, 反之为各向同性介质。介质的相态涉及到介质的骨架固体、孔隙中流体的成分和性质等。通过密度、速度和相态因素的组合能够在一定程度上描述介质的多样性和复杂性^[32~34]。