L-fuzzy 拓扑空间论

王国俊 著

陕西师范大学出版社出版
(西安市陕西师大 120 信箱)
陕西省新华书店经销
中国科学院印刷厂印刷
开本 850×1168 1/32 印张 13.75 插页 6 字数 308 千字
1988 年 7 月第 1 版 1988 年 7 月第 1 次印刷
印数：1—3000
ISBN 7-5613-0096-4

G · 103 定价：(平)3.00 元
(精)5.50 元

Introduction to the Contents

During recent years, the theory of Fuzzy Topology has been a popular subject among scholars, of whom many are considering the study of related topics known as L–fuzzy Topology, an enlarged version of the former. This book is the first textbook dealing systematically with the theory of L–fuzzy Topological Spaces. The three basic concepts—Molecule, Remote Neighborhood and Order–homomorphism which have been used to establich the theory of Topological Molecular Lattices are used fully in the process of developing the whole theory of this book. Beginning with the most fundamental through an easily understood language, the author brings the reader with sound scholarship to the latest development of this subject. Many of the points in this book are new results of the author's research, which have never been published. This book may be used by graduate students majoring in mathematics or upper class students in colleges as textbook or for self study. There are eight chapters in this book: Chapter 1, Fuzzy Lattices and Related Mappings; Chapter 2, L–fuzzy Topological Spaces; Chapter 3, Connectedness; Chapter 4, Countability; Chapter 5, Separation Properties; Chapter 6, Nice Compactness; Chapter 7, Paracompactness; Chapter 8, Pseudo–quasi–uniformities.

序

Fuzzy 拓扑学(即模糊拓扑学)的历史从 1968 年 C. L. Chang 提出 Fuzzy 拓扑空间概念的第一篇论文[4]算起,至今已整整 20 年了. 在这 20 年中,由于海内外学人的共同努力,使它从起初的模仿性研究逐渐走上了创新的道路. 层次结构的特点使它具有了不同于一般拓扑学的特有风格,与完备格代数结构的紧密联系又赋予了它以新的生命力. 它从幼稚变得成熟,从肤浅走向深刻,作为一门独立的学科,可以说它已经是根深叶茂了.

1968 年, C. L. Chang 以 L. A. Zadeh 的 Fuzzy 集理论[176]为骨架,引入了 Fuzzy 拓扑空间的概念[4],并把诸如开集、闭集、邻域、内部、闭包、连续性以及紧性等基本概念推广到了 Fuzzy 拓扑空间中去. 由于上述概念是模仿一般拓扑学中的相应概念来定义的,加之尚未触及 Fuzzy 拓扑空间的层次结构,所以许多一般拓扑学中的定理都被顺利地推广到了 Fuzzy 拓扑空间. 在作了这些工作之后, Chang 乐观地说:"本文的结果表明,一般拓扑学中的许多基本概念可以容易地推广到 Fuzzy 拓扑空间中去". 然而,人们很快就发现,作为一般拓扑学理论的推广, Fuzzy 拓扑学要比一般拓扑学复杂得多. [4] 中所说的"严格仿照 Kelley 的一般拓扑学中给出的定义、定理和证明去作"往往是行不通的. 比

如，[4] 中关于紧性的定义就是失败的，因为它与 T_1 分离性相矛盾，即，每个 T_1 空间都不可能是 [4] 的意义下的紧空间. 此外，这种紧性还有其它一些弊病(参看例 6.1.11—6.1.13)，因而是不可取的. 事实上，人们是在经过了反复地研究之后，直到 80 年代初期才得出了比较理想的紧性概念的(参看第六章). 仅此一例已表明 Fuzzy 拓扑学有丰富的内涵而决非一般拓扑学的简单推广.

以 C. L. Chang 引入的 Fuzzy 拓扑空间理论为基础，C. K. Wong 在初期的推广性研究中作了许多工作. 正因如此，他也是第一个发现 Fuzzy 拓扑学与一般拓扑学的重大差异的人. 他在几乎每一篇文章中都指出了这种差异. 特别是他是首先在 Fuzzy 拓扑空间中引入 Fuzzy 点及其邻域概念的人 (参看 [160]). 尽管他的 Fuzzy 点概念有一定的缺陷，但正是由此开始才把邻域工具在 Fuzzy 拓扑学中引起的重大矛盾充分地暴露了出来，使人们认识到在 Fuzzy 拓扑学中必须摒弃邻域工具而另谋新的出路.

或许是由于初期推广工作中以 Fuzzy 点的邻域为工具去刻划其它基本概念的尝试没能成功，国外自 1975 年以后的一段时间里发表的文章大都迴避 Fuzzy 点的概念，如 [11]，[32]，[35] 等. 1975 年，B. Hutton 在 [32] 中首先引入了 Fuzzy 正规空间的概念，而涉及到 Fuzzy 点的正则空间等概念则是以后才引入的. 先引入正规性的理由，用 Hutton 的话来说，是因为“正规性是可单纯由开集和闭集(即，不涉及点)的语言加以定义的”. 如果说这种做法在一开始时还不很自觉的话，那么文 [12] 的作者 M. A. Erceg 则已公开宣称“在探讨 Fuzzy 集论时，我们发现在普通集论中的点并不是如所想像的那么重要了”. 这也许是“无点化”

流派已经成熟的一个声明吧. 实际上,从 1975 年以来,无点派确是作了不少漂亮的工作的. 如,Hutton 在极小族、Fuzzy 单位区间和 Fuzzy 一致结构等方面的工作至今在 Fuzzy 拓扑学中仍占有重要的地位. 但是,无点派的工作不涉及点,不可避免地会有许多局限性. 如,对局部性质的讨论,对 Moore-Smith 收敛理论的建立以及对嵌入理论的研究等都会遇到困难. 其实,无点派的工作之所以迴避 Fuzzy 点的概念,未必是对 Fuzzy 点有什么偏见,只不过是因为没有找到 Fuzzy 点的理想的邻近结构从而无法去建立和谐的收敛理论而已.

1977 年,刘应明在分析了 C. K. Wong 的 Fuzzy 点及其邻域系理论的弊病和修改了 Fuzzy 点及其对于一个 Fuzzy 集的从属关系之后,首次打破传统的邻域方法,引入了突破性的"重域"概念,建立起了完整的 Moore-Smith 收敛理论 (参看 [101]),为有点派的工作奠定了基础. 自从重域理论提出后,有点派的工作取得了长足的进展. 如果说 C. K. Wong 的有点化工作遭到了失败的话,那么文 [101] 的诞生就标志着有点派的重新兴起(关于邻域方法为什么会在 Fuzzy 拓扑学中遇到困难,请参看作者的论文 [131]). 此后,有点派的工作可以说迎来了繁荣昌盛的时期. 像良紧性理论的产生 (参看 [132], [98], [183] 和本书第六章),完全正则性的点式刻划的实现 (参看 [70] 及本书第五章), Stone-Čech 紧化理论的建立 (参看 [71], [77] 和本书第六章),仿紧性理论的提出(参看 [92], [13] 和本书第七章)以及 Fuzzy 度量的点式刻划的完成(参看[53]和本书第八章)等使有点化研究在形成完整的理论方面迈出了关键的几步,从而也确立了有点化研究在整个 Fuzzy 拓扑学研究中的核心地位.

Fuzzy 拓扑学一方面比一般拓扑学有更广的框架，而同时又和一般拓扑学一样，都是特殊的拓扑格．关于拓扑格，早在50年代就有了专门的著作（参看[94]）．那么能不能从拓扑格的角度来研究 Fuzzy 拓扑学呢？或者说能不能把 Fuzzy 拓扑学作为一种特例而纳入于拓扑格理论中去研究呢？就已有的拓扑格理论（比如[94]）而言，这一点是困难的．我们知道，一种理论越广泛，它所能概括的学科对象就越多，但同时所能得到的具体结果就越少．旧有的拓扑格理论正是如此．由于它一般不涉及点的概念而素有“无点化拓扑”之称．在这种结构之下自然是无法讨论那些基于点的概念，如局部性质和嵌入理论等．当然，[94]中也曾提到过点，不过那是指“原子”而言，不能把 Fuzzy 点的概念包括进去，同时也没有提出可供 Fuzzy 拓扑学参考的邻近结构．因此我们自然想到，能否建立一种包括点集拓扑学和 Fuzzy 拓扑学为特例的拓扑格理论，使得其中自然地存在着类似于点的元素，而且我们能够象在对待点集拓扑学时那样来研究这种拓扑格呢？1979年，作者提出了这样一种拓扑格的理论，即拓扑分子格理论（参看[128]），随后又较大幅度地拓宽了它的框架，建立了完全分配格上的点式拓扑理论（参看[134]，[141]，[142]）．分子、远域和序同态是这一理论中的三个核心概念．这里的分子概念源于 Fuzzy 点，它是 Fuzzy 点概念的抽象化；远域是重域概念的一般化形式，它可以适用于格上没有逆序对合对应的情形；序同态则是 Zadeh 型函数（或称 Fuzzy 映射）概念的推广，它一方面放弃了 Zadeh 型函数保持 Fuzzy 点的高度不变的过强性质，同时又能保证把分子映为分子．我们以远域系作为分子的邻近结构，在相当广泛的框架下建立了比较完整的 Moore-Smith 收敛理论．点集拓扑学、Fuzzy

拓扑学乃至更一般的 L-fuzzy 拓扑学的最重要的基本理论都可以在这里进行讨论．值得提出的是，闭元概念在拓扑分子格理论中扮演着主要角色，正象开集概念在点集拓扑学中扮演的角色一样，这是闭远域取代了开邻域的地位所带来的必然结果．在本书中我们并不讨论拓扑分子格理论，而是系统地讲解它的特殊情形——L-fuzzy 拓扑空间理论．不过我们使用它的一套方法，基于分子、远域和序同态概念来展开我们的理论．由于这时格上有逆序对合对应存在，自然也可以采用重域方法．这时远域方法与重域方法各有其方便之处，不过我们按照习惯在本书中采用前者，即远域方法．有兴趣的读者不妨用重域方法验证本书的定理，这将是很好的练习．

在第一章中我们从最基本的完备格概念讲起，利用极小集和极大集概念刻划了完全分配格的构造．在此基础上引入了分子格、Fuzzy 格(简称 F 格)以及 F 格间的序同态概念．随后转入对 Fuzzy 集(简称 F 集)、L-fuzzy 集(简称 LF 集)、它们的分解以及 Zadeh 型函数的讨论．

在第二章里我们系统地讲解 L-fuzzy 拓扑空间的一般理论．我们以远域为工具建立了分子的 Moore-Smith 收敛理论，给出了连续序同态与 Fuzzy 同胚理论，研究了子空间、商空间和积空间，介绍了可拓扑生成的 LF 拓扑空间与 L-fuzzy 单位区间，比较细致地讨论了格值下半连续函数．

在第三章中我们讨论了连通性问题．我们把点集拓扑学中著名的樊畿定理推广到了 LF 拓扑空间中来，并且讨论了 Fuzzy 单位区间的连通性．

在第四章中我们引入了 LF 拓扑空间的权、特征和浓度等概

念，着重考虑可数的情形，讨论了第一可数、第二可数与可分空间．在这一章还考虑了所谓准 Lindelöf 性质．我们把从层次结构入手来定义的 Lindelöf 性质放到第七章中与仿紧性一并考虑．

在第五章中我们介绍了几种类型的分离公理．一套是从 T_{-1}，T_0 直到 $T_{3\frac{1}{2}}$ 和 T_4 的分离公理；一套是强化了的 $ST_i(i=1,2,3,4)$ 分离公理；还有一套是含包式的分离公理 $T_i^*(i=3,3\frac{1}{2},4)$．由于层次结构的存在，$LF$ 拓扑空间的分离性是远较一般拓扑空间复杂的．

在第六章中我们详细介绍由作者所引入的良紧性理论以及由刘应明教授和他的学生罗懋康所建立的 Stone-Čech 紧化理论（参看 [71]，[77]），不过我们的讲法和他们的原始论文有很大不同．另外，在本章中我们还讨论了其它几种紧性，如强 F 紧性、F 紧性和超紧性等．

在第七章中我们研究两类仿紧性理论，它们是分别基于局部有限和强局部有限概念而得出的，后者是由范九伦首先引入的．在本章中我们针对所谓 II 型仿紧性把罗懋康在 [92] 中的工作基本上推广到了 LF 拓扑空间的情形．

在第八章中我们讨论拟一致结构、度量化以及近性结构理论．从 1977 年 B. Hutton 的第一篇论文 [33] 起直到 1987 年梁基华的最新成果 [53] 在本章中都得到了反映．

本书的大部分内容都不要求读者有专门的预备知识，但希望他们有较好的数学修养．作者在写本书时力求叙述清楚和推理严谨，并十分注意由浅入深以及本书的自足性．我们是这样来设计本书的内容的：一方面使它具有足够的内容和深度以作为数学专

业的研究生教材，同时又设法使大学高年级的好学生在阅读本书时不致遇到什么大的困难。除了从第六章起要求读者具有一般拓扑学的相应部分的知识外，前五章的内容甚至对于根本没有学过格论和一般拓扑学的读者也是可以接受的。本书各章、节安排有数量不多的练习，一般都比较容易，相信读者是可以完成的。另外，我们还提出了不少的问题，其中大部分是迄今为止没有人去解决过的，我们希望读者不要轻易放过它们。

本书是系统讲解 L-fuzzy 拓扑空间的一般理论的第一本书籍(到目前为止，作者只见到过 R. Lowen 教授的讲解"自然的"、"非拓扑的" Fuzzy 拓扑空间的书 [88])。以作者的水平而论，实不敢担当撰写这第一本书的任务。所以作者曾不止一次地建议 Fuzzy 拓扑学专家刘应明教授为我们写这样一本书，但他正值创作论文的旺盛时期，一直在忙于撰写新的论文，加之又有很多社会工作，总是抽不出空来。另一方面，我又接受了给 85 届研究生开设 L-fuzzy 拓扑空间理论课的任务，同时有助教进修班的一些同志一起听课。既然承担了讲课任务，就得编写讲义，而有了讲义，不少同志就竭力怂恿我把它出版。就这样本书与读者见面了。大家从而可以想见本书的疏漏之处一定不在少数，所以作者恳切希望各位学者多多赐教。特别是本书介绍的理论有许多都正在发展之中，作者非常希望本书能起到抛砖引玉的作用，以期在近年内能见到更好的专著出版。

85 届研究生和助教进修班的同志们在听讲过程中曾对本书提过许多好的建议。特别是赵东升同志仔细地阅读了原稿，他发现了不少问题并代我作了修改。四川大学的刘应明教授、四川师大的刘旺金教授、西安交大的张文修教授和北京师院的郑崇友教

授等各位朋友对本书的编写给予了热情的支持和鼓励．没有他们的敦促和帮助，作者是没有勇气拿起笔来的．我愿借此机会对所有帮助本书出版的朋友们和同志们表示衷心的感谢！

王国俊

1988 年 2 月于陕西师范大学

目　　录

第一章　F 格及有关映射

在本章中我们系统地研究 F 格的代数结构以及贯穿全书的基本映射——序同态的性质．作为特例，本章引入了 F 集（模糊集）与 Zadeh 型函数以及 LF 集与 L 值 Zadeh 型函数等基本理论．本章的内容是自封的，不要求读者具有模糊数学或格论等方面的专门知识．

§1.1　完　备　格

1.1.1 定义　设 X 是非空集，$\leqslant$ 是 X 上的二元关系．如果

(i) $\leqslant$ 是自反的，即 $\forall x \in X$, $x \leqslant x$;

(ii) $\leqslant$ 是传递的，即 $x \leqslant y$, $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$;

(iii) $\leqslant$ 是反对称的，即 $x \leqslant y$, $y \leqslant x \Rightarrow x = y$,

则称 $\leqslant$ 为 X 上的偏序关系，称 $(X, \leqslant)$ 为偏序集．在不致引起混淆的情况下，也把这偏序集简写为 X.

1.1.2 例

(1) 设 X 是实数集 $\mathbf{R}$, $\leqslant$ 是 $\mathbf{R}$ 上通常的小于或等于关系，则 $(X, \leqslant)$ 是偏序集．

(2) 设 X 是单位区间 $I = [0, 1]$ 上的全体连续实函数之集 $C[0, 1]$，对 X 中任二元 f 与 g，规定 $f \leqslant g$ 当且仅当 $\forall t \in [0,1]$,

$f(t) \leqslant g(t)$，则 $(X, \leqslant)$ 是偏序集.

(3) 设 T 是非空集，X 是 T 的幂集 2^T，即 T 的一切子集之集，对 X 的任二元 x 与 y，规定 $x \leqslant y$ 当且仅当 $x \subset y$，则 $(X, \leqslant)$ 是

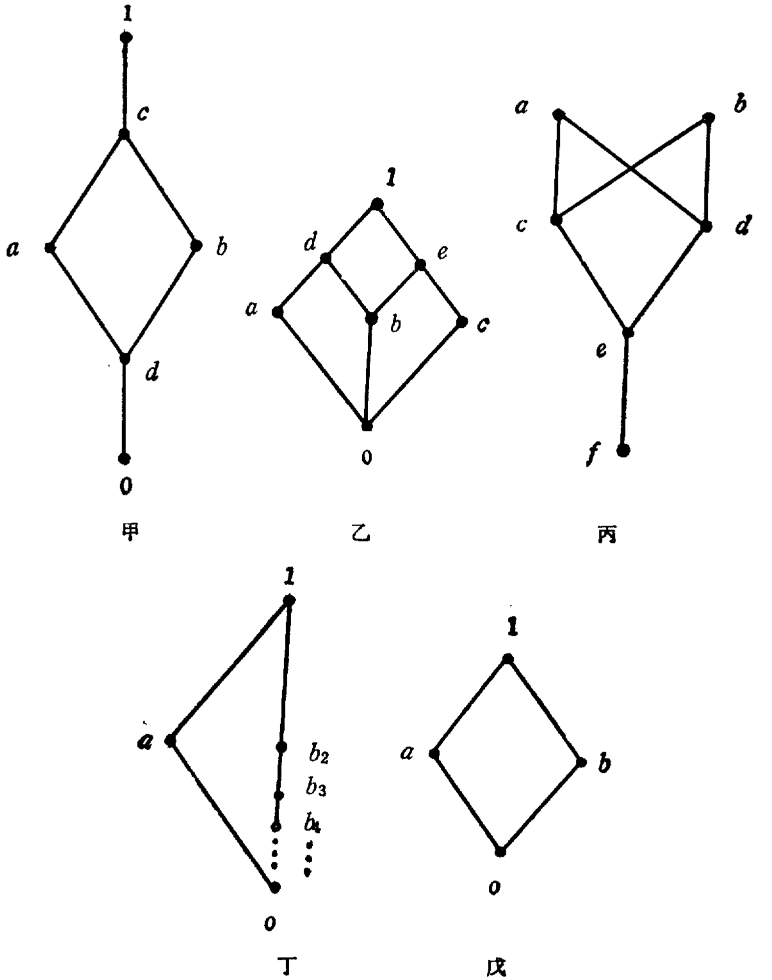

图 1.1

偏序集.

（4）在图(1.1)的各图中，对于两个点 x 与 y，规定 $x \leqslant y$ 当且仅当 x 的水平高度不超过 y 的水平高度且 x 与 y 是用这种折线连结的，从 x 沿此折线到 y 时水平高度不降，则各图都表示偏序集.

1.1.3 定义 设 $(X, \leqslant)$ 是偏序集，$A \subset X$，$a \in X$. a 叫做 A 的上界，若 $\forall x \in A$，$x \leqslant a$. 若 A 有一最小上界 a，即 a 是 A 的上界，且对 A 的任一上界 b 总有 $a \leqslant b$，则称 a 为 A 的上确界，记作 $a = \sup_X A$. 在不致引起混淆时，也把 A 的上确界简记作 $\sup A$ 或 $\vee A$.

对偶地，可以定义 A 的下界与下确界 $\inf_X A$（或 $\inf A$ 或 $\wedge A$）.

1.1.4 注

（1）偏序集 X 的子集 A 不必有上界. 比如，在例 1.1.2(4) 的图 1.1 丙中，令 $A = \{a, b\}$，则 A 无上界. 又，有上界的子集不必有上确界. 比如，在图 1.1 丙中，$A = \{c, d\}$ 有上界 a 和 b，但没有上确界.

（2）按定义 1.1.3，若 A 是空集 $\varnothing$，则 X 的每个元素都是它的上界，也都是它的下界. 这是因为"$x \in \varnothing \Rightarrow x \leqslant a$"与"$x \in \varnothing \Rightarrow a \leqslant x$"总是成立的. 至于 $\varnothing$ 有没有上(下)确界，那就取决于 X 有没有最小(大)元了. 比如，在图 1.1 甲中，$\sup \varnothing = 0$，$\inf \varnothing = 1$.

1.1.5 定义 设 X 是偏序集，若 X 的每个子集 A 都有上确界以及下确界，即 $\forall A \subset X$，$\sup A$ 与 $\inf A$ 恒存在，则称 X 为完备格.

特别是，完备格 X 一定有一最大元与一最小元，即 $\sup X$ 与 $\inf X$，今后把它们分别记为 1_X 与 0_X，或简记为 1 与 0. 那么，在完备格中永远有 $\sup \varnothing = 0$ 和 $\inf \varnothing = 1$. 仅含一个元的完备格

向集的概念.

叫平凡的，今后我们一般不考虑平凡的完备格，从而 $0 \neq 1$. 那么仅含两个元的完备格 $\{0, 1\}$ 就是最简单的完备格了. 按照习惯，一般用 L 表示一个完备格.

例 1.1.2 的(3)以及(4)中的甲、乙、丁和戊都是完备格的例子.

1.1.6 定义 设 X 是偏序集，若对 X 中的任二元 a 与 b，$\sup\{a, b\}$ 与 $\inf\{a, b\}$ 恒存在，则称 X 为格. 这时 $\sup\{a, b\}$ 可简记为 $a \vee b$，$\inf\{a, b\}$ 可简记为 $a \wedge b$.

按习惯，格一般也用字母 L 表示.

例 1.1.2 的 (1) 和 (2) 都是格的例子. 此外，凡完备格都是格.

1.1.7 练习

(1) 设 A, B 是偏序集 X 的任二子集，试证

$$\sup(A \cup B) = \sup\{\sup A, \sup B\},$$

如果上式中出现的上确界都存在的话.

(2) 试证上述命题的对偶命题也成立，即，把上式中的 sup 改为 inf，所得的新等式仍成立，只要各下确界都存在的话.

(3) 试证，若 L 是格，A 是 L 的非空有限子集，则 $\sup A$ 与 $\inf A$ 存在. 又，设 $a, b, c \in L$，则 $a \vee b \vee c = \sup\{a, b, c\}$ 存在，且

$$a \vee b \vee c = (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee c) \vee b.$$

对于下确界也有类似的等式，并且它们可以推广到 n 个元的情形.

(4) 试证，仅含有限多个元的格一定是完备格. 试举一个格的例子，使它不是完备格.

下面我们介绍滲透 (filter，也译作滤子) 与理想 (ideal) 的一般性定义. 首先来看两个简单的概念，即上(下)集与上(下)定