

 文都教育

**2006**

**考研数学历年真题精析(数学一)**

主 编:蔡子华

副主编:曾祥金 樊启斌 董小刚

策 划:文都考研信息中心

现代出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

2006年考研数学历年真题解析/蔡子华编. — 北京:  
现代出版社,2004  
ISBN 7-80188-280-6

I . 2... II . 蔡... III . 数学—研究生—入学考试—解题  
IV . D0-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 026507 号

---

**编 者:**蔡子华

**责任编辑:**张俊国

**出版发行:**现代出版社

**地 址:**北京市安定门外华安里 504 号

**邮政编码:**100011

**电 话:**010-64267325 64240483(传真)

**电子邮箱:**xiandai@cnpitc.com.cn

**印 刷:**北京长阳汇文印刷厂

**开 本:**787×1092 毫米 1/16

**印 张:**14

**版 本:**2004 年 4 月第 1 版 2005 年 3 月修订 2005 年 3 月第 2 次印刷

**印 数:**1—6000 册

**书 号:**ISBN 7-80188-280-6

**套书定价:**66.00 元

---

**版权所有,翻印必究;未经许可,不得转载**

## 2006 年版本前言

毛泽东同志在 1930 年 5 月就提了这样的建议:你对于那个问题不能解决吗?那末,你就去调查那个问题的现状和历史吧!……调查就是解决问题。

同样的道理,如果考生对考研数学的试题和命题规律不了解或者不甚了解的话,那么就应该去接触考研数学历年真题。了解的途径有多种多样,如每年教育部制订的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(以下简称《考试大纲》)、试题、答案、评分标准、名家评析等。

《考试大纲》每年都在修订,其中 1997 年之前与 1997 年之后(含 1997 年)无论从考试规定还是对考生的要求来讲,都有很大的不同。比如 1997 年之前考研数学分为五类,其中数学三是理工类,1997 年之后考研数学改为四类,其中数学三是经济类。另外,即使同样是理工类的数学一,要求也不一样。

1997 年后的试卷之所以具有足够代表性,另外一个原因是它不仅充分揭示了“既要有利于国家对高层次人才的选拔,也要有利于促进高等学校各类数学课程教学质量的提高”的命题原则,且不少题的设计思路非常巧妙。如

[98. 数学一、二. 二(3)] 已知函数  $y = y(x)$  在任意点  $x$  处的增量  $\Delta y = \frac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$ , 且当  $\Delta x \rightarrow 0$  时,  $\alpha$  是  $\Delta x$  的高阶无穷小,  $y(0) = \pi$ , 则  $y(1) = ( )$

- (A)  $2\pi$       (B)  $\pi$       (C)  $e^{\frac{\pi}{4}}$       (D)  $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

这是一道综合题,解题的关键是建立微分方程。

只要掌握函数的微分的定义,去掉高阶无穷小,就能得到微分方程  $dy = \frac{y}{1+x^2} dx$ . 然后求出其特解,再将  $x = 1$  代得  $y(1)$ .

但是微分的定义是考生不太重视的. 那么不知道微分的定义是否能求解呢?其实知道导数和高阶无穷小的定义,亦可建立方程. 其过程为

$$\begin{aligned} \because \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y}{1+x^2} + \frac{\alpha}{\Delta x} \\ \therefore y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{y}{1+x^2} + \frac{\alpha}{\Delta x} \right) = \frac{y}{1+x^2} + 0 \\ \text{即 } \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{1+x^2} \end{aligned}$$

此题妙在既重视基本概念,又不囿于某一特定概念;以一个选择题将微分、导数、高阶无穷小、微分方程的特解等概念及微分方程的求解方法自然集中在一起,更是独具匠心。

好题在试题中还有不少,在此不一一列举。

细读历年真题,不难发现:以 A 表示考察知识点相同,  $A^+$  表示类似题型,

$A^{++}$  表示几乎完全相同的题目,则

2004 年数学一第(5) 题与 2003 年数学二第一大题第(6) 小题( $A^+$ );  
2004 年数学一第(20) 题与 2002 年数学三第九大题( $A^+$ );  
2004 年数学三第(20) 题与 2000 年数学三第九大题( $A^{++}$ );  
2004 年数学三、四第(22) 题与 1999 年数学三第十一大题( $A^+$ );  
2003 年数学一第四大题与 2001 年数学一第五大题( $A^{++}$ );  
2003 年数学二第十一大题与 1999 年数学四第九大题( $A^{++}$ );  
2003 年数学四第十大题与 1999 年数学三第九大题( $A^{++}$ );  
2002 年数学二第十一大题(2) 与 1997 年数学二第三大题(6)( $A^{++}$ );  
2002 年数学三第十一大题(1) 与 1999 年数学三第十一大(1)( $A^{++}$ );  
2001 年数学二第一大题(5) 与 2000 年数学一第一大题(4)( $A^{++}$ );  
2001 年数学三、数学四第三大题与 1997 年数学三第四大题( $A^{++}$ );  
2000 年数学二第二大题(2) 与 1997 年数学二第二大题(3)( $A^{++}$ );  
2000 年数学四第十大题与 1999 年数学四第九大题(A);  
.....

事实上,真题就是最好的模拟题,题不在多贵在精!考生若有最近几年的试题分析并对其作研究,即可对考研数学的规律有较为全面的了解。

因此,我们从题库中节选了 1997 ~ 2005 年的考研数学的全部真题,特聘请全国著名考研辅导专家、连续多年担任研究生入学考试数学阅卷组组长的蔡子华教授担任主编,同时诚邀国内知名高等学府的数学教授参与编写了《考研数学历年真题精析》这套丛书。

这套丛书的主要特点是:

1. 按数学一、数学二、数学三和数学四分类,分册出版;
2. 将历年真题以填空题 / 选择题 / 解答题的顺序安排到考试大纲规定的章节中,便于考生在复习时了解有关知识点的重要程度及其在试题中出现的频率的高低;
3. 将答案解析放在第三部分,并从[考点] → [分析] → [详解] → [讲评] → [得分率] 等五个角度来展开分析与讲评。

本丛书是各位编者、专家从事考研命题研究的结晶. 相信能对考生在掌握命题规律、扩展分析思路、提高解题技巧等诸方面有较大的帮助。

由于时间仓促,错误和疏漏之处难免,恳请广大读者、数学同仁批评指正。

最后,祝 2006 年考生取得满意的成绩!

编者  
2005 年 3 月

# 目 录

## 第一部分 题型集萃

### 第一章 高数部分

第一节 函数、极限、连续 .....	(1)
第二节 一元函数微分学 .....	(2)
第三节 一元函数积分学 .....	(4)
第四节 向量代数和空间解析几何 .....	(6)
第五节 多元函数微分学 .....	(6)
第六节 多元函数积分学 .....	(9)
第七节 无穷级数 .....	(11)
第八节 常微分方程 .....	(14)

### 第二章 线性代数

第一节 行列式 .....	(16)
第二节 矩阵 .....	(16)
第三节 向量 .....	(17)
第四节 线性方程组 .....	(18)
第五节 矩阵的特征值和特征向量 .....	(20)
第六节 二次型 .....	(21)

### 第三章 概率论与数理统计

第一节 事件和概率 .....	(23)
第二节 随机变量及其分布 .....	(23)
第三节 二维随机变量及其分布 .....	(24)
第四节 随机变量的数字特征 .....	(25)
第五节 大数定律和中心极限定理 .....	(26)
第六节 数理统计的基本概念 .....	(27)
第七节 参数估计与假设检验 .....	(27)

## 第二部分 历年试题

1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 .....	(30)
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 .....	(33)
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 .....	(37)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 .....	(41)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 .....	(44)

2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题·····	(47)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题·····	(50)
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题·····	(54)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题·····	(58)

### 第三部分 真题解析

1997 年数学一真题解析·····	(62)
1998 年数学一真题解析·····	(78)
1999 年数学一真题解析·····	(94)
2000 年数学一真题解析·····	(107)
2001 年数学一真题解析·····	(124)
2002 年数学一真题解析·····	(143)
2003 年数学一真题解析·····	(161)
2004 年数学一真题解析·····	(181)
2005 年数学一真题解析·····	(202)

# 第一部分 题型集萃

## 第一章 高数部分

### 第一节 函数、极限、连续

1. 1997 年一(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 1998 年一(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

3. 1999 年一(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

4. 2003 年一(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

5. 2003 年二(2)

设  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  均为非负数列, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ , 则必有 ( )

- (A)  $a_n < b_n$  对任意  $n$  成立                      (B)  $b_n < c_n$  对任意  $n$  成立  
(C) 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$  不存在                      (D) 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$  不存在

6. 2004 年二(7)

把  $x \rightarrow 0^+$  时的无穷小量  $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt, \beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt, \gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin x^3 dt$  排列起来, 使排在

后面的是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列次序是 ( )

- (A)  $\alpha, \beta, \gamma$                       (B)  $\alpha, \gamma, \beta$                       (C)  $\beta, \alpha, \gamma$                       (D)  $\beta, \gamma, \alpha$

7. 1998 年七

$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{\sin \pi}{n+\frac{1}{n}} \right].$$

8. 2000 年三

$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$$

9. 2002 年三

设函数  $f(x)$  在  $x=0$  的某邻域内具有一阶连续导数, 且  $f(0) \neq 0, f'(0) \neq 0$ , 若  $af(h) + bf(2h) - f(0)$  在  $h \rightarrow 0$  时是比  $h$  高阶的无穷小, 试确定  $a, b$  的值.

## 第二节 一元函数微分学

1. 1997 年一(3)

对数螺线  $\rho = e^\theta$  在点  $(\rho, \theta) = \left( e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2} \right)$  处的切线的直角坐标方程为\_\_\_\_\_.

2. 2002 年一(2)

已知函数  $y = y(x)$  由方程  $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$  确定, 则  $y''(0) =$ \_\_\_\_\_.

3. 2004 年一(1)

曲线  $y = \ln x$  上与直线  $x + y = 1$  垂直的切线方程为\_\_\_\_\_.

4. 2005 年一(1)

曲线  $y = \frac{x^2}{2x+1}$  的斜渐近线方程为\_\_\_\_\_.

5. 1998 年二(2)

函数  $f(x) = (x^2 - x - 2) |x^3 - x|$  不可导点的个数是 ( )

- (A) 3                      (B) 2                      (C) 1                      (D) 0

6. 1999 年二(2)

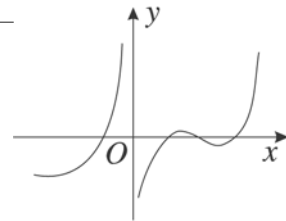
设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ x^2 g(x) & x \leq 0 \end{cases}$ , 其中  $g(x)$  是有界函数, 则  $f(x)$  在  $x = 0$  处 ( )

- (A) 极限不存在                      (B) 极限存在, 但不连续  
(C) 连续, 但不可导                      (D) 可导

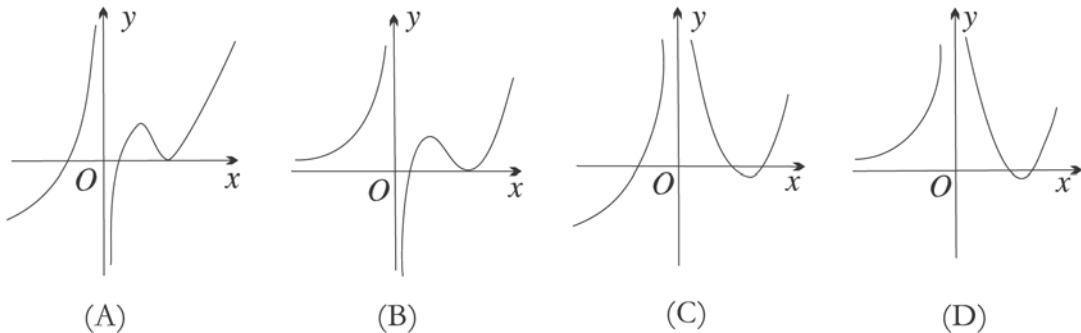
7. 2000 年二(1)

设  $f(x)$ 、 $g(x)$  是恒大于零的可导函数, 且  $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$ , 则当  $a < x < b$  时, 有 ( )

- (A)  $f(x)g(b) > f(b)g(x)$   
(B)  $f(x)g(a) > f(a)g(x)$   
(C)  $f(x)g(x) > f(b)g(b)$   
(D)  $f(x)g(x) > f(a)g(a)$



8. 2001 年二(1)



设函数  $f(x)$  在定义域内可导,  $y = f(x)$  的图形如右上图所示, 则导函数  $y = f'(x)$  的图形为 ( )

9.2001 年二(3)

设  $f(0) = 0$ , 则  $f(x)$  在点  $x = 0$  可导的充要条件为 ( )

- (A)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cosh h)$  存在      (B)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$  存在  
 (C)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sinh h)$  存在      (D)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)]$  存在

10.2002 年二(3)

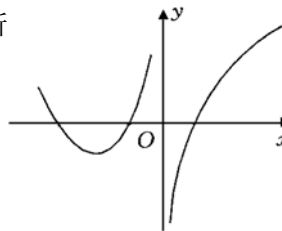
设函数  $y = f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内有界且可导, 则 ( )

- (A) 当  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , 必有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$   
 (B) 当  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  存在时, 必有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$   
 (C) 当  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ , 必有  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$   
 (D) 当  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$  存在时, 必有  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$

11.2003 年二(1)

设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 其导函数的图形如图所示, 则  $f(x)$  有 ( )

- (A) 一个极小值点和两个极大值点  
 (B) 两个极小值点和一个极大值点  
 (C) 两个极小值点和两个极大值点  
 (D) 三个极小值点和一个极大值点



12.2004 年二(8)

设函数  $f(x)$  连续, 且  $f'(0) > 0$ , 则存在  $\delta > 0$ , 使得 ( )

- (A)  $f(x)$  在  $(0, \delta)$  内单调增加  
 (B)  $f(x)$  在  $(-\delta, 0)$  内单调减少  
 (C) 对任意的  $x \in (0, \delta)$  有  $f(x) > f(0)$   
 (D) 对任意的  $x \in (-\delta, 0)$  有  $f(x) > f(0)$

13.2005 年二(7)

设函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}}$ , 则  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内 ( )

- (A) 处处可导      (B) 恰有一个不可导点  
 (C) 恰有两个不可导点      (D) 至少有三个不可导点

14.1998 年九

设  $y = f(x)$  是区间  $[0, 1]$  上的任一非负连续函数.

(1) 试证存在  $x_0 \in (0, 1)$ , 使得在区间  $[0, x_0]$  上以  $f(x_0)$  为高的矩形面积, 等于在区间  $[x_0, 1]$  上以  $y = f(x)$  为曲边的梯形面积.

(2) 又设  $f(x)$  在区间  $(0, 1)$  内可导, 且  $f'(x) > -\frac{2f(x)}{x}$ , 证明(1)中的  $x_0$  是惟一的.

15.1999 年六

试证: 当  $x > 0$  时,  $(x^2 - 1)\ln x \geq (x - 1)^2$ .

16.2000 年九

设函数  $f(x)$  在  $[0, \pi]$  上连续, 且  $\int_0^\pi f(x) dx = 0, \int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$ . 试证: 在  $(0, \pi)$  内至少存在两个不同的点  $\xi_1, \xi_2$ , 使  $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$ .

17.2001 年七

设  $y = f(x)$  在  $(-1, 1)$  内具有二阶连续导数且  $f''(x) \neq 0$ , 试证:

(1) 对于  $(-1, 1)$  内的任一  $x \neq 0$ , 存在惟一的  $\theta(x) \in (0, 1)$ , 使  $f(x) = f(0) + xf'(\theta(x)x)$  成立;

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}$ .

18.2004 年三(15)

设  $e < a < b < e^2$ , 证明  $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e}(b - a)$ .

19.2005 年三(18)

已知函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且  $f(0) = 0, f(1) = 1$ . 证明:

(I) 存在  $\xi \in (0, 1)$  使得  $f(\xi) = 1 - \xi$ ;

(II) 存在两个不同的点  $\eta, \zeta \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$ .

### 第三节 一元函数积分学

1.1999 年一(2)

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \sin(x-t)^2 dt = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2.2000 年一(1)

$$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

3.2002 年一(1)

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

4.2004 年一(2)

已知  $f'(e^x) = xe^{-x}$ , 且  $f(1) = 0$ , 则  $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

5.1997 年二(2)

设在区间  $[a, b]$  上  $f(x) > 0, f'(x) < 0, f''(x) > 0$ , 令  $S_1 = \int_a^b f(x) dx, S_2 = f(b)(b-a), S_3 = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)](b-a)$ , 则 ( )

- (A)  $S_1 < S_2 < S_3$
- (B)  $S_2 < S_1 < S_3$
- (C)  $S_3 < S_1 < S_2$
- (D)  $S_2 < S_3 < S_1$

6.1997 年二(3)

设  $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$ , 则  $F(x)$  ( )

- (A) 为正常数
- (B) 为负常数

- (C) 恒为零 (D) 不为常数

7. 1998 年二(1)

设  $f(x)$  连续, 则  $\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt =$  ( )

- (A)  $xf(x^2)$  (B)  $-xf(x^2)$  (C)  $2xf(x^2)$  (D)  $-2xf(x^2)$

8. 1999 年二(1)

设  $f(x)$  是连续函数,  $F(x)$  是  $f(x)$  的原函数, 则 ( )

- (A) 当  $f(x)$  是奇函数时,  $F(x)$  必是偶函数  
 (B) 当  $f(x)$  是偶函数时,  $F(x)$  必是奇函数  
 (C) 当  $f(x)$  是周期函数时,  $F(x)$  必是周期函数  
 (D) 当  $f(x)$  是单调增函数时,  $F(x)$  必是单调增函数

9. 2004 年二(10)

设  $f(x)$  为连续函数,  $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$ , 则  $F'(2)$  等于 ( )

- (A)  $2f(2)$  (B)  $f(2)$  (C)  $-f(2)$  (D) 0

10. 2005 年二(8)

设  $F(x)$  是连续函数  $f(x)$  的一个原函数, “ $M \Leftrightarrow N$ ” 表示“ $M$  的充分必要条件是  $N$ ”, 则必有 ( )

- (A)  $F(x)$  是偶函数  $\Leftrightarrow f(x)$  是奇函数.  
 (B)  $F(x)$  是奇函数  $\Leftrightarrow f(x)$  是偶函数.  
 (C)  $F(x)$  是周期函数  $\Leftrightarrow f(x)$  是周期函数.  
 (D)  $F(x)$  是单调函数  $\Leftrightarrow f(x)$  是单调函数.

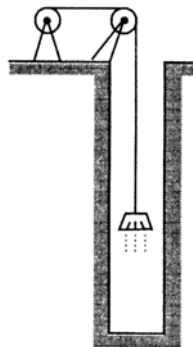
11. 1997 年五

设  $f(x)$  连续,  $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt) dt$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$  ( $A$  为常数), 求  $\varphi'(x)$  并讨论  $\varphi'(x)$

在  $x = 0$  处的连续性.

12. 1999 年七

为清除井底的污泥, 用缆绳将抓斗放入井底, 抓起污泥后提出井口, 已知井深  $30\text{ m}$ , 抓斗自重  $400\text{ N}$ , 缆绳每米重  $500\text{ N}$ , 抓斗抓起的污泥重  $2000\text{ N}$ , 提升速度为  $3\text{ m/s}$ , 在提升过程中, 污泥以  $20\text{ N/s}$  的速度从抓斗缝隙中漏掉. 现将抓起污泥的抓斗提升至井口, 问克服重力需作多少焦耳的功? (说明: ①  $1\text{ N} \times 1\text{ m} = 1\text{ J}$ ;  $m, N, s, J$  分别表示米, 牛顿, 秒, 焦耳, ② 抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)



13. 2001 年三

求  $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx$ .

14. 2002 年四

已知两曲线  $y = f(x)$  与  $y = \int_0^{\arctan x} e^{-t^2} dt$  在点  $(0,0)$  处的切线相同, 写出此切线方程, 并求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{2}{n}\right)$ .

15. 2003 年三

过坐标原点作曲线  $y = \ln x$  的切线, 该切线与曲线  $y = \ln x$  及  $x$  轴围成平面图形  $D$ .

(1) 求  $D$  的面积  $A$ ;

(2) 求  $D$  绕直线  $x = e$  旋转一周所得旋转体的体积  $V$ .

16. 2003 年六

某建筑工程打地基时, 需用汽锤将桩打进土层. 汽锤每次击打, 都将克服土层对桩的阻力而作功. 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比(比例系数为  $k$ ,  $k > 0$ ), 汽锤第一次击打将桩打进地下  $am$ . 根据设计方案, 要求汽锤每次击打桩时所做的功与前一次击打时所做的功之比为常数  $r$  ( $0 < r < 1$ ). 问

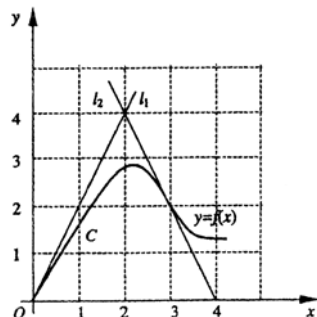
(1) 汽锤击打桩 3 次后, 可将桩打进地下多深?

(2) 若击打次数不限, 汽锤至多能将桩打进地下多深?

(注:  $m$  表示长度单位米.)

17. 2005 年三(17)

如图, 曲线  $C$  的方程为  $y = f(x)$ , 点  $(3,2)$  是它的一个拐点, 直线  $l_1$  与  $l_2$  分别是曲线  $C$  在点  $(0,0)$  与  $(3,2)$  处的切线, 其交点为  $(2,4)$ . 设函数  $f(x)$  具有三阶连续导数, 计算定积分  $\int_0^3 (x^2 + x) f'''(x) dx$ .



第四节 向量代数和空间解析几何

1. 1998 年三

求直线  $l: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$  在平面  $\pi: x - y + 2z - 1 = 0$  上的投影直线  $b$  的方程, 并求  $b$  绕  $y$  轴旋转一周所成曲面的方程.

第五节 多元函数微分学

1. 1998 年一(2)

设  $z = \frac{1}{x} f(xy) + y\varphi(x+y)$ ,  $f, \varphi$  具有二阶连续导数, 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$  \_\_\_\_\_.

2. 2000 年一(2)

曲面  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$  在点  $(1, -2, 2)$  的法线方程为 \_\_\_\_\_.

3. 2003 年一(2)

曲面  $z = x^2 + y^2$  与平面  $2x + 4y - z = 0$  平行的切平面的方程是 \_\_\_\_\_.

4. 2005 年一(3)

设函数  $u(x, y, z) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{18}$ , 单位向量  $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1, 1, 1\}$ , 则  $\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{(1,2,3)} =$  \_\_\_\_\_.

5. 1997 年二(1)

二元函数  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ , 在点  $(0, 0)$  处 ( )

- (A) 连续, 偏导数存在 (B) 连续, 偏导数不存在  
(C) 不连续, 偏导数存在 (D) 不连续, 偏导数不存在

6. 2001 年二(2)

设函数  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  附近有定义, 且  $f'_x(0, 0) = 3, f'_y(0, 0) = 1$ , 则 ( )

- (A)  $dz \Big|_{(0,0)} = 3dx + dy$   
(B) 曲面  $z = f(x, y)$  在点  $(0, 0, f(0, 0))$  的法向量为  $\{3, 1, 1\}$   
(C) 曲线  $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases}$  在点  $(0, 0, f(0, 0))$  的切向量为  $\{1, 0, 3\}$   
(D) 曲线  $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases}$  在点  $(0, 0, f(0, 0))$  的切向量为  $\{3, 0, 1\}$

7. 2002 年二(1)

考虑二元函数  $f(x, y)$  的下面 4 条性质:

- ①  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处连续;  
②  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的两个偏导数连续;  
③  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处可微;  
④  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处的两个偏导数存在.

若用“ $P \Rightarrow Q$ ”表示可由性质  $P$  推出性质  $Q$ , 则有 ( )

- (A) ②  $\Rightarrow$  ③  $\Rightarrow$  ① (B) ③  $\Rightarrow$  ②  $\Rightarrow$  ①  
(C) ③  $\Rightarrow$  ④  $\Rightarrow$  ① (D) ③  $\Rightarrow$  ①  $\Rightarrow$  ④

8. 2003 年二(3)

已知函数  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  的某个邻域内连续, 且  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$ , 则 ( )

- (A) 点  $(0, 0)$  不是  $f(x, y)$  的极值点  
(B) 点  $(0, 0)$  是  $f(x, y)$  的极大值点  
(C) 点  $(0, 0)$  是  $f(x, y)$  的极小值点  
(D) 根据所给条件无法判断点  $(0, 0)$  是否为  $f(x, y)$  的极值点

9. 2005 年二(9)

设函数  $u(x, y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t) dt$ , 其中函数  $\varphi$  具有二阶导数,  $\psi$  具有一阶导数, 则必有 ( )

- (A)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  (B)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$   
(C)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  (D)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

10. 2005 年二(10)

设有三元方程  $xy - z \ln y + e^{xz} = 1$ , 根据隐函数存在定理, 存在点  $(0, 1, 1)$  的一个邻域, 在此邻域内该方程( )

- (A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数  $z = z(x, y)$ .  
 (B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数  $y = y(x, z)$  和  $z = z(x, y)$ .  
 (C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数  $x = x(y, z)$  和  $z = z(x, y)$ .  
 (D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数  $x = x(y, z)$  和  $y = y(x, z)$ .

11. 1997 年四(1)

设直线  $l: \begin{cases} x + y + b = 0 \\ x + ay - z - 3 = 0 \end{cases}$  在平面  $\pi$  上, 而平面  $\pi$  与曲面  $z = x^2 + y^2$  相切于点  $(1, -2, 5)$ , 求  $a, b$  之值.

12. 1997 年四(2)

设函数  $f(u)$  具有二阶连续导数, 而  $z = f(e^x \sin y)$  满足方程  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{2x} z$ , 求  $f(u)$ .

13. 1998 年四

确定常数  $\lambda$ , 使在右半平面  $x > 0$  上的向量  $A(x, y) = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda \mathbf{i} - x^2(x^4 + y^2)^\lambda \mathbf{j}$  为某二元函数  $u(x, y)$  的梯度, 并求  $u(x, y)$ .

14. 1999 年三

设  $y = y(x), z = z(x)$  是由方程  $z = xf(x+y)$  和  $F(x, y, z) = 0$  所确定的函数, 其中  $f$  和  $F$  分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 求  $\frac{dz}{dx}$ .

15. 2000 年四

设  $z = f\left(xy, \frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$ , 其中  $f$  具有二阶连续偏导数,  $g$  具有二阶连续导数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

16. 2001 年四

设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(1, 1)$  处可微, 且  $f(1, 1) = 1, \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,1)} = 2, \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1)} = 3, \varphi(x) = f(x, f(x, x))$ . 求  $\frac{d}{dx} \varphi^3(x) \Big|_{x=1}$ .

17. 2002 年八

设有一小山, 取它的底面所在的平面为  $xOy$  坐标面, 其底部所占的区域为  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - xy \leq 75\}$ , 小山的高度函数为  $h(x, y) = 75 - x^2 - y^2 + xy$ .

- (1) 设  $M(x_0, y_0)$  为区域  $D$  上一点, 问  $h(x, y)$  在该点沿平面上什么方向的方向导数最大? 若记此方向导数的最大值为  $g(x_0, y_0)$ , 试写出  $g(x_0, y_0)$  的表达式.  
 (2) 现欲利用此小山开展攀岩活动, 为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点. 也就是说, 要在  $D$  的边界线  $x^2 + y^2 - xy = 75$  上找出使(1)中的  $g(x,$

$y$ ) 达到最大值的点. 试确定攀登起点的位置.

18. 2004 年三(19)

$z = z(x, y)$  是由  $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$  确定的函数, 求  $z = z(x, y)$  的极值点和极值.

## 第六节 多元函数积分学

1. 1998 年一(3)

设  $l$  为椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ , 其周长记为  $a$ , 则  $\oint_l (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 2001 年一(2)

设  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 则  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r) \Big|_{(1, -2, 2)} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

3. 2001 年一(3)

交换二次积分的积分次序:  $\int_{-1}^0 dy \int_2^{1-y} f(x, y) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

4. 2004 年一(3)

设  $L$  为正向圆周  $x^2 + y^2 = 2$  在第一象限中的部分, 则曲线积分  $\int_L x dy - 2y dx$  的值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 2005 年一(4)

设  $\Omega$  是由锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  与半球面  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  围成的空间区域,  $\Sigma$  是  $\Omega$  的整个边界的外侧, 则  $\iiint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$ .

6. 2000 年二(2)

设  $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$ ,  $S_1$  为  $S$  在第一卦限中的部分, 则有 ( )

- |   |   |
|---|---|
| (A) $\iint_S x dS = 4 \iint_{S_1} x dS$ | (B) $\iint_S y dS = 4 \iint_{S_1} x dS$         |
| (C) $\iint_S z dS = 4 \iint_{S_1} x dS$ | (D) $\iint_S x y z dS = 4 \iint_{S_1} x y z dS$ |

7. 1997 年三(1)

计算  $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$ , 其中  $\Omega$  为平面曲线  $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转一周形成的曲面与平面  $z = 8$  所围成的区域.

8. 1997 年三(2)

计算曲线积分  $\oint_C (z - y) dx + (x - z) dy + (x - y) dz$ , 其中  $C$  是曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$ , 从  $z$  轴正向往  $z$  轴负向看,  $C$  的方向是顺时针的.

9. 1998 年六

计算  $\iint_{\Sigma} \frac{axdydz + (z+a)^2 dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$ , 其中  $\Sigma$  为下半球面  $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  的上侧,  $a$  为大于零的常数.

10. 1999 年四

求  $I = \int_L (e^x \sin y - b(x+y))dx + (e^x \cos y - ax)dy$ , 其中  $a, b$  为正常数,  $L$  为从点  $A(2a, 0)$  沿曲线  $y = \sqrt{2ax - x^2}$  到点  $O(0, 0)$  的弧.

11. 1999 年八

设  $S$  为为椭圆面  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$  的上半部分, 点  $P(x, y, z) \in S$ ,  $\pi$  为  $S$  在点  $P$  处的切平面,  $\rho(x, y, z)$  为点  $O(0, 0, 0)$  到平面  $\pi$  的距离, 求  $\iint_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS$ .

12. 2000 年五

计算曲线积分  $I = \oint_L \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2}$ , 其中  $L$  是以点  $(1, 0)$  为中心,  $R$  为半径的圆周 ( $R > 1$ ) 取逆时针方向.

13. 2000 年六

设对于半空间  $x > 0$  内任意的光滑有向封闭曲面  $S$ , 都有

$$\oint_S x f(x) dy dz - xy f(x) dz dx - e^{2x} z dx dy = 0,$$

其中函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内具有连续的一阶导数, 且  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ . 求  $f(x)$ .

14. 2000 年八

设有一半径为  $R$  的球体,  $P_0$  是此球的表面上一个定点, 球体上任一点的密度与该点到  $P_0$  距离的平方成正比 (比例常数  $k > 0$ ), 求球体的重心位置.

15. 2001 年六

计算  $I = \oint_L (y^2 - z^2) dx + (2z^2 - x^2) dy + (3x^2 - y^2) dz$ , 其中  $L$  是平面  $x + y + z = 2$  与柱面  $|x| + |y| = 1$  的交线, 从  $z$  轴正向看去,  $L$  为逆时针方向.

16. 2001 年八

设有一高度为  $h(t)$  ( $t$  为时间) 的雪堆在融化过程中, 其侧面积满足方程  $z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)}$  (设长度单位为厘米, 时间单位为小时), 已知体积减少的速率与侧面积成正比 (比例系数为 0.9), 问高度为 130 (厘米) 的雪堆全部融化需多少小时?

17. 2002 年五

计算二重积分  $\iint_D e^{\max(x^2, y^2)} dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ .

18. 2002 年六

设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内具有一阶连续导数,  $L$  是上半平面 ( $y > 0$ ) 内的有向分段光滑曲线, 其起点为  $(a, b)$ , 终点为  $(c, d)$ . 记

$$I = \int_L \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy,$$

- (1) 证明曲线积分  $I$  与路径  $L$  无关;  
 (2) 当  $ab = cd$  时, 求  $I$  的值.

### 19. 2003 年五

已知平面区域  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ ,  $L$  为  $D$  的正向边界. 试证:

$$(1) \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx$$

$$(2) \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx \geq 2\pi^2.$$

### 20. 2003 年八

设函数  $f(x)$  连续且恒大于零,

$$F(t) = \frac{\iiint_{\Omega(t)} f(x^2 + y^2 + z^2) dv}{\iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma}, \quad G(t) = \frac{\iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma}{\int_{-t}^t f(x^2) dx},$$

其中  $\Omega(t) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\}$ ,  $D(t) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq t^2\}$ .

- (1) 讨论  $F(t)$  在区间  $(0, +\infty)$  内的单调性.  
 (2) 证明当  $t > 0$  时,  $F(t) > \frac{2}{\pi} G(t)$ .

### 21. 2004 年三(17)

$$\text{计算曲面积分 } I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy,$$

其中  $\Sigma$  是曲面  $z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$  的上侧.

### 22. 2005 年三(15)

设  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$ ,  $[1 + x^2 + y^2]$  表示不超过  $1 + x^2 + y^2$  的最大整数. 计算二重积分  $\iint_D xy[1 + x^2 + y^2] dxdy$ .

### 23. 2005 年三(19)

设函数  $\varphi(y)$  具有连续导数, 在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线  $L$  上, 曲线积分

$$\oint_L \frac{\varphi(y) dx + 2xy dy}{2x^2 + y^4}$$
 的值恒为同一常数.

(I) 证明: 对右半平面  $x > 0$  内的任意分段光滑简单闭曲线  $C$ , 有

$$\oint_C \frac{\varphi(y) dx + 2xy dy}{2x^2 + y^4} = 0;$$

(II) 求函数  $\varphi(y)$  的表达式.