

 文都教育

2006

考研数学历年真题精析(数学四)

主 编:蔡子华

副主编:曾祥金 樊启斌 董小刚

策 划:文都考研信息中心

现代出版社

图书在版编目(CIP)数据

2006年考研数学历年真题解析/蔡子华编. — 北京:
现代出版社,2004
ISBN 7-80188-280-6

I .2... II .蔡... III .数学(四)—研究生—入学考试—解题
IV .D0-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 026507 号

编 者:蔡子华

责任编辑:张俊国

出版发行:现代出版社

地 址:北京市安定门外华安里 504 号

邮政编码:100011

电 话:010-64267325 64240483(传真)

电子邮箱:xiandai@cnpitc.com.cn

印 刷:北京长阳汇文印刷厂

开 本:787×1092 毫米 1/16

印 张:11.875

版 本:2004 年 4 月第 1 版 2005 年 3 月修订 2005 年 3 月第 2 次印刷

印 数:1—6000 册

书 号:ISBN 7-80188-280-6

套书定价:66.00 元

版权所有,翻印必究;未经许可,不得转载

2006 年版本前言

毛泽东同志在 1930 年 5 月就提了这样的建议:你对于那个问题不能解决吗?那末,你就去调查那个问题的现状和历史吧!……调查就是解决问题。

同样的道理,如果考生对考研数学的试题和命题规律不了解或者不甚了解的话,那么就应该去接触考研数学历年真题。了解的途径有多种多样,如每年教育部制订的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(以下简称《考试大纲》)、试题、答案、评分标准、名家评析等。

《考试大纲》每年都在修订,其中 1997 年之前与 1997 年之后(含 1997 年)无论从考试规定还是对考生的要求来讲,都有很大的不同。比如 1997 年之前考研数学分为五类,其中数学三是理工类,1997 年之后考研数学改为四类,其中数学三是经济类。另外,即使同样是理工类的数学一,要求也不一样。

1997 年后的试卷之所以具有足够代表性,另外一个原因是它不仅充分揭示了“既要有利于国家对高层次人才的选拔,也要有利于促进高等学校各类数学课程教学质量的提高”的命题原则,且不少题的设计思路非常巧妙。如

[98. 数学一、二·二(3)] 已知函数 $y = y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \frac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$, 且当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, α 是 Δx 的高阶无穷小, $y(0) = \pi$, 则 $y(1) = ()$

- (A) 2π (B) π (C) $e^{\frac{\pi}{4}}$ (D) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

这是一道综合题,解题的关键是建立微分方程。

只要掌握函数的微分的定义,去掉高阶无穷小,就能得到微分方程 $dy = \frac{y}{1+x^2} dx$. 然后求出其特解,再将 $x = 1$ 代得 $y(1)$.

但是微分的定义是考生不太重视的. 那么不知道微分的定义是否能求解呢?其实知道导数和高阶无穷小的定义,亦可建立方程. 其过程为

$$\begin{aligned} \because \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y}{1+x^2} + \frac{\alpha}{\Delta x} \\ \therefore y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{y}{1+x^2} + \frac{\alpha}{\Delta x} \right) = \frac{y}{1+x^2} + 0 \\ \text{即 } \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{1+x^2} \end{aligned}$$

此题妙在既重视基本概念,又不囿于某一特定概念;以一个选择题将微分、导数、高阶无穷小、微分方程的特解等概念及微分方程的求解方法自然集中在一起,更是独具匠心。

好题在试题中还不少,在此不一一列举。

细读历年真题,不难发现:以 A 表示考察知识点相同, A^+ 表示类似题型,

A^{++} 表示几乎完全相同的题目,则

2004 年数学一第(5)题与 2003 年数学二第一大题第(6)小题(A^+);

2004 年数学一第(20)题与 2002 年数学三第九大题(A^+);

2004 年数学三第(20)题与 2000 年数学三第九大题(A^{++});

2004 年数学三、四第(22)题与 1999 年数学三第十一大题(A^+);

2003 年数学一第四大题与 2001 年数学一第五大题(A^{++});

2003 年数学二第十一大题与 1999 年数学四第九大题(A^{++});

2003 年数学四第十大题与 1999 年数学三第九大题(A^{++});

2002 年数学二第十一大题(2)与 1997 年数学二第三大题(6)(A^{++});

2002 年数学三第十一大题(1)与 1999 年数学三第十一大(1)(A^{++});

2001 年数学二第一大题(5)与 2000 年数学一第一大题(4)(A^{++});

2001 年数学三、数学四第三大题与 1997 年数学三第四大题(A^{++});

2000 年数学二第二大题(2)与 1997 年数学二第二大题(3)(A^{++});

2000 年数学四第十大题与 1999 年数学四第九大题(A);

.....

事实上,真题就是最好的模拟题,题不在多贵在精!考生若有最近几年的试题分析并对其作研究,即可对考研数学的规律有较为全面的了解。

因此,我们从题库中节选了 1997 ~ 2005 年的考研数学的全部真题,特聘请全国著名考研辅导专家、连续多年担任研究生入学考试数学阅卷组组长的蔡子华教授担任主编,同时诚邀国内知名高等学府的数学教授参与编写了《考研数学历年真题精析》这套丛书。

这套丛书的主要特点是:

1. 按数学一、数学二、数学三和数学四分类,分册出版;

2. 将历年真题以填空题 / 选择题 / 解答题的顺序安排到考试大纲规定的章节中,便于考生在复习时了解有关知识点的重要程度及其在试题中出现的频率的高低;

3. 将答案解析放在第三部分,并从[考点]→[分析]→[详解]→[讲评]→[得分率]等五个角度来展开分析与讲评。

本丛书是各位编者、专家从事考研命题研究的结晶,相信能对考生在掌握命题规律、扩展分析思路、提高解题技巧等诸方面有较大的帮助。

由于时间仓促,错误和疏漏之处难免,恳请广大读者、数学同仁批评指正。

最后,祝 2006 年考生取得满意的成绩!

编者
2005 年 3 月

目 录

第一部分 题型集萃

第一章 微积分

- 第一节 函数、极限、连续 (1)
- 第二节 一元函数微分学 (2)
- 第三节 一元函数积分学 (5)
- 第四节 多元函数微积分学 (8)
- 第五节 常微分方程 (11)

第二章 线性代数

- 第一节 行列式 (12)
- 第二节 矩阵 (12)
- 第三节 向量 (14)
- 第四节 线性方程组 (15)
- 第五节 矩阵的特征值和特征向量 (17)

第三章 概率论与数理统计

- 第一节 随机事件和概率 (19)
- 第二节 随机变量及其分布 (20)
- 第三节 多维随机变量及其分布 (21)
- 第四节 随机变量的数字特征 (23)
- 第五节 中心极限定理 (25)

第二部分 历年试题

- 1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 (26)
- 1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 (29)
- 1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 (32)
- 2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 (35)
- 2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 (38)
- 2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 (41)
- 2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 (44)
- 2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 (47)
- 2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题 (51)

第三部分 真题解析

- 1997 年数学四真题解析 (54)

1998 年数学四真题解析	(67)
1999 年数学四真题解析	(82)
2000 年数学四真题解析	(96)
2001 年数学四真题解析	(111)
2002 年数学四真题解析	(124)
2003 年数学四真题解析	(137)
2004 年数学四真题解析	(152)
2005 年数学四真题解析	(167)

第一部分 题型集萃

第一章 微积分

第一节 函数、极限、连续

1. 1999 年一(1)

设函数 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln[f(1)f(2)\cdots f(n)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 2000 年一(2)

若 $a > 0, b > 0$ 均为常数, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{3}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 2002 年一(1)

设常数 $a \neq \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{n - 2na + 1}{n(1 - 2a)} \right]^n = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 2003 年一(1)

极限 $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \ln(1 + x)]^{\frac{2}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 2004 年一(1)

若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 2005 年一(1)

极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2 + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 1998 年二(2)

设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + x}{1 + x^{\frac{1}{2n}}}$, 讨论函数 $f(x)$ 的间断点, 其结论为()

- (A) 不存在间断点
(B) 存在间断点 $x = 1$
(C) 存在间断点 $x = 0$
(D) 存在间断点 $x = -1$

8. 2000 年二(1)

设对任意的 x , 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ()

- (A) 存在且一定等于零
(B) 存在但不一定为零
(C) 一定不存在
(D) 不一定存在

9. 2004 年二(7)

函数 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界().

- (A) $(-1, 0)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(2, 3)$

10. 2004 年二(8)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$,

$$g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ 则()}$$

- (A) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点
 (B) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点
 (C) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的连续点
 (D) $g(x)$ 在点 $x = 0$ 处的连续性与 a 的取值有关

11. 1997 年三

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a}{x} - \left(\frac{1}{x} - a^2 \right) \ln(1 + ax) \right] (a \neq 0).$$

12. 1998 年三

$$\text{求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2} \quad (n \text{ 为自然数}).$$

13. 2003 年三

设 $f(x) = \frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\pi x} - \frac{1}{\pi(1-x)}$, $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, 试补充定义 $f(0)$, 使得 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上连续.

14. 2004 年三(15)

$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right).$$

15. 2005 年三(15)

$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right).$$

第二节 一元函数微分学

1. 1997 年一(1)

设 $y = f(\ln x)e^{f(x)}$, 其中 f 可微, 则 $dy =$ _____.

2. 1998 年一(1)

设曲线 $f(x) = x^n$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n, 0)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) =$ _____.

3. 2001 年一(1)

设生产函数为 $Q = AL^\alpha K^\beta$, 其中 Q 是产出量, L 是劳动投入量, K 是资本投入量, 而 A, α, β 均为大于零的参数, 则当 $Q = 1$ 时, K 关于 L 的弹性为 _____.

4. 2004 年一(2)

$$\text{设 } y = \arctan e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}}, \text{ 则 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = \text{_____}.$$

5. 1997 年二(2)

若 $f(-x) = f(x) (-\infty < x < +\infty)$, 在 $(-\infty, 0)$ 内 $f'(x) > 0, f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有()

- (A) $f'(x) > 0, f''(x) < 0$ (B) $f'(x) > 0, f''(x) > 0$
 (C) $f'(x) < 0, f''(x) < 0$ (D) $f'(x) < 0, f''(x) > 0$

6. 1998 年二(1)

设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 周期为 4, 又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(5, f(5))$ 处的切线的斜率为()

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 0 (C) -1 (D) -2

7. 2000 年二(2)

设函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 处可导, 则函数 $|f(x)|$ 在点 $x = a$ 处不可导的充分条件是()

- (A) $f(a) = 0$ 且 $f'(a) = 0$ (B) $f(a) = 0$ 且 $f'(a) \neq 0$
 (C) $f(a) > 0$ 且 $f'(a) > 0$ (D) $f(a) < 0$ 且 $f'(a) < 0$

8. 2001 年二(1)

设 $f(x)$ 的导数在 $x = a$ 处连续, 又 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x-a} = -1$, 则()

- (A) $x = a$ 是 $f(x)$ 的极小值点
 (B) $x = a$ 是 $f(x)$ 的极大值点
 (C) $(a, f(a))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
 (D) $x = a$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(a, f(a))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

9. 2002 年二(1)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义, 在开区间 (a, b) 内可导, 则()

- (A) 当 $f(a)f(b) < 0$ 时, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$
 (B) 对任何 $\xi \in (a, b)$, 有 $\lim_{x \rightarrow \xi} [f(x) - f(\xi)] = 0$
 (C) 当 $f(a) = f(b)$ 时, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = 0$
 (D) 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

10. 2003 年二(1)

曲线 $y = xe^{1/x^2}$ ()

- (A) 仅有水平渐近线 (B) 仅有铅直渐近线
 (C) 既有铅直又有水平渐近线 (D) 既有铅直又有斜渐近线

11. 2003 年二(2)

设函数 $f(x) = |x^3 - 1| \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, 则 $\varphi(1) = 0$ 是 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导的()

- (A) 充分必要条件 (B) 必要但非充分条件
 (C) 充分但非必要条件 (D) 既非充分也非必要条件

12. 2004 年二(9)

设 $f(x) = |x(1-x)|$, 则()

- (A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, 0)$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
 (B) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, 0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

- (C) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 且 $(0, 0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
 (D) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(0, 0)$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

13. 2004 年二(11)

- 设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f'(a) > 0, f'(b) < 0$, 则下列结论中错误的是()
 (A) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) > f(a)$
 (B) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) > f(b)$
 (C) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f'(x_0) = 0$
 (D) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) = 0$

14. 2005 年二(7)

- 当 a 取下列哪个值时, 函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - a$ 恰有两个不同的零点.()
 (A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 8.

15. 2005 年二(10)

- 设 $f(x) = x \sin x + \cos x$. 下列命题中正确的是()
 (A) $f(0)$ 是极大值, $f(\frac{\pi}{2})$ 是极小值. (B) $f(0)$ 是极小值, $f(\frac{\pi}{2})$ 是极大值.
 (C) $f(0)$ 是极大值, $f(\frac{\pi}{2})$ 也是极大值. (D) $f(0)$ 是极小值, $f(\frac{\pi}{2})$ 也是极小值.

16. 1997 年五

假设某种商品的需求量 Q 是单价 p (单位: 元) 的函数 $Q = 12000 - 80p$, 商品的总成本 C 是需求量 Q 的函数: $C = 25000 + 50Q$; 每单位商品需要纳税 2 元, 试求使销售利润最大的商品单价和最大利润额.

17. 1998 年六

设某酒厂有一批新酿的好酒, 如果现在 (假定 $t = 0$) 就售出, 总收入为 R_0 (元). 如果窖藏起来待来日按陈酒价格出售, t 年末总收入为 $R = R_0 e^{\frac{2}{5}t}$
 假定银行的年利率为 r , 并以连续复利计息, 试求窖藏多少年售出可使总收入的现值最大. 并求 $r = 0.06$ 时的 t 值.

18. 1998 年七

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 1$, 试证存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得 $e^{\eta-\xi} [f(\eta) + f'(\eta)] = 1$.

19. 1999 年三

曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的切线与 x 轴和 y 轴围成一个图形, 记切点的横坐标为 α . 试求切线方程和这个图形的面积. 当切点沿曲线趋于无穷远时, 该面积的变化趋势如何?

20. 1999 年八

证明: 当 $0 < x < \pi$ 时, 有 $\sin \frac{x}{2} > \frac{x}{\pi}$.

21. 2000 年六

求函数 $y = (x - 1)e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x}$ 的单调区间和极值, 并求该函数图形的渐近线.

22. 2001 年四

已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = e, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - f(x-1)], \text{求 } c \text{ 的值.}$$

23. 2001 年六

某商品进价为 a (元/件), 根据以往经验, 当销售价为 b (元/件) 时, 销售量为 c 件 (a, b, c 均为正常数, 且 $b \geq \frac{4}{3}a$), 市场调查表明, 销售价每下降 10%, 销售量可增加 40%, 现决定一次性降价. 试问, 当销售价定为多少时, 可获得最大利润? 并求出最大利润.

24. 2002 年七

设某商品需求量 Q 是价格 p 的单调减少函数: $Q = Q(p)$, 其需求弹性

$$\eta = \frac{2p^2}{192 - p^2} > 0.$$

(1) 设 R 为总收益函数, 证明 $\frac{dR}{dp} = Q(1 - \eta)$.

(2) 求 $p = 6$ 时, 总收益对价格的弹性, 并说明其经济意义.

25. 2003 年六

设 $a > 1$, $f(t) = a^t - at$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的驻点为 $t(a)$. 问 a 为何值时, $t(a)$ 最小? 并求出最小值.

26. 2004 年三(18)

设某商品的需求函数为 $Q = 100 - 5P$, 其中价格 $P \in (0, 20)$, Q 为需求量.

(I) 求需求量对价格的弹性 E_d ($E_d > 0$);

(II) 推导 $\frac{dR}{dP} = Q(1 - E_d)$ (其中 R 为收益), 并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时, 降低价格反而使收益增加.

第三节 一元函数积分学

1. 1997 年一(2)

设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + x^3 \int_0^1 f(x) dx$, 则 $\int_0^1 f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 1998 年一(2)

$$\int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

3. 2000 年一(1)

$$\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

4. 2002 年一(2)

已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$, 则 $\int x f'(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 2003 年一(2)

$$\int_{-1}^1 (|x| + x) e^{-|x|} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

6. 2004 年一(3)

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} xe^{x^2}, & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}, \\ -1, & x \geq \frac{1}{2}, \end{cases} \text{ 则 } \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x-1)dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

7. 1997 年二(1)

设 $f(x), \varphi(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内连续, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的高阶无穷小,

则当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^x f(t) \sin t dt$ 是 $\int_0^x t \varphi(t) dt$ 的()

- (A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小
(C) 同阶但不等价的无穷小 (D) 等价无穷小

8. 1999 年二(1)

设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则()

- (A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必为偶函数
(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必为奇函数
(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必为周期函数
(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必为单调增函数

9. 2001 年二(2)

$$\text{设 } g(x) = \int_0^x f(u)du, \text{ 其中 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2+1), & \text{若 } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3}(x-1), & \text{若 } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}, \text{ 则 } g(x) \text{ 在区间}(0,2) \text{ 内()}$$

- (A) 无界 (B) 递减 (C) 不连续 (D) 连续

10. 2002 年二(2)

设函数 $f(x)$ 连续, 则在下列变上限定积分定义的函数中, 必为偶函数的是()

- (A) $\int_0^x t[f(t) + f(-t)]dt$ (B) $\int_0^x t[f(t) - f(-t)]dt$
(C) $\int_0^x f(t^2)dt$ (D) $\int_0^x f^2(t)dt$

11. 2004 年二(10)

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases} F(x) = \int_0^x f(t)dt, \text{ 则()}$$

- (A) $F(x)$ 在 $x=0$ 点不连续
(B) $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 在 $x=0$ 点不可导
(C) $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且满足 $F'(x) = f(x)$
(D) $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 但不一定满足 $F'(x) = f(x)$

12. 2005 年二(9)

下列结论中正确的是()

- (A) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$ 与 $\int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)}$ 都收敛. (B) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$ 与 $\int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)}$ 都发散.

(C) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$ 发散, $\int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)}$ 收敛. (D) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$ 收敛, $\int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)}$ 发散.

13. 2005 年二(11)

以下四个命题中, 正确的是()

(A) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(B) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(D) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

14. 1997 年七

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $F(x) = \int_0^x (x-2t)f(t)dt$, 试证:

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $F(x)$ 也是偶函数;

(2) 若 $f(x)$ 为单调不减, 则 $F(x)$ 单调不减.

15. 1998 年八

设直线 $y = ax$ 与抛物线 $y = x^2$ 所围成图形的面积为 S_1 , 它们与直线 $x = 1$ 所围成的图形面积为 S_2 , 并且 $a < 1$.

(1) 试确定 a 的值, 使 $S_1 + S_2$ 达到最小, 并求出最小值;

(2) 求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

16. 1999 年六

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x)F(x) = \frac{xe^x}{2(1+x)^2}$.

已知 $F(0) = 1, F(x) > 0$, 试求 $f(x)$.

17. 1999 年七

已知 $f(x)$ 连续, $\int_0^x tf(x-t)dt = 1 - \cos x$, 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ 的值.

18. 2000 年四

计算 $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{1+x} + e^{3-x}}$.

19. 2000 年八

设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $\int_0^\pi f(x)dx = 0, \int_0^\pi f(x)\cos xdx = 0$. 试证明: 在 $(0, \pi)$

内至少存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2 , 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

20. 2001 年七

设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且满足

$$f(1) = 3 \int_0^{\frac{1}{3}} e^{1-x^2} f(x) dx,$$

证明存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$.

21. 2001 年八

设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内连续, $f(1) = \frac{5}{2}$, 且对所有 $x, t \in (0, +\infty)$, 满足条件

$$\int_1^{xt} f(u)du = \int_1^x f(u)du + x \int_1^t f(u)du, \text{求 } f(x).$$

22. 2002 年三

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \left[\int_0^{u^2} \arctan(1+t)dt \right] du}{x(1-\cos x)}.$$

23. 2002 年五

$$\text{设 } f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}, \text{求 } \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx$$

24. 2002 年八

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x) > 0$, 利用闭区间上连续函数性质, 证明存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$.

25. 2003 年八

设某商品从时刻 0 到时刻 t 的销售量为 $x(t) = kt, t \in [0, T], (k > 0)$. 欲在 T 时将数量为 A 的该商品销售完, 试求

(1) t 时的商品剩余量, 并确定 k 的值;

(2) 在时间段 $[0, T]$ 上的平均剩余量.

26. 2004 年三(19)

设 $F(x) = \begin{cases} e^{2x}, & x \leq 0 \\ e^{-2x}, & x > 0 \end{cases}$, S 表示夹在 x 轴与曲线 $y = F(x)$ 之间的面积, 对任何 $t > 0$,

$S_1(t)$ 表示矩形 $-t \leq x \leq t, 0 \leq y \leq F(t)$ 的面积. 求

(I) $S(t) = S - S_1(t)$ 的表达式;

(II) $S(t)$ 的最小值.

27. 2005 年三(19)

设 $f(x), g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的导数连续, 且 $f(0) = 0, f'(x) \geq 0, g'(x) \geq 0$. 证明: 对任何 $a \in [0, 1]$, 有 $\int_0^a g(x)f'(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx \geq f(a)g(1)$.

第四节 多元函数微积分学

1. 1999 年一(2)

设 $f(x, y, z) = e^x y z^2$, 其中 $z = z(x, y)$ 是由 $x + y + z + xyz = 0$ 确定的隐函数, 则 $f'_x(0, 1, -1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 2001 年一(2)

设 $z = e^{-x} - f(x - 2y)$, 且当 $y = 0$ 时, $z = x^2$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 2003 年一(3)

设 $a > 0, f(x) = g(x) = \begin{cases} a, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 而 D 表示全平面, 则 $I = \iint_D f(x)g(y-x)dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 2005 年一(3)

设二元函数 $z = xe^{x+y} + (x+1)\ln(1+y)$, 则 $dz|_{(1,0)} =$ _____.

5. 1999 年二(2)

设 $f(x, y)$ 连续, 且 $f(x, y) = xy + \iint_D f(u, v) du dv$, 其中 D 是由 $y = 0, y = x^2, x = 1$ 所围区域, 则 $f(x, y)$ 等于()

(A) xy (B) $2xy$ (C) $xy + \frac{1}{8}$ (D) $xy + 1$

6. 2003 年二(3)

设可微函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极小值, 则下列结论正确的是()

(A) $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数大于零

(B) $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数等于零

(C) $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数小于零

(D) $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数不存在

7. 2005 年二(8)

设 $I_1 = \iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma, I_2 = \iint_D \cos(x^2 + y^2) d\sigma, I_3 = \iint_D \cos(x^2 + y^2)^2 d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则()

(A) $I_3 > I_2 > I_1$.

(B) $I_1 > I_2 > I_3$.

(C) $I_2 > I_1 > I_3$.

(D) $I_3 > I_1 > I_2$.

8. 1997 年四

设 $u = f(x, y, z)$ 有连续偏导数, $y = y(x)$ 和 $z = z(x)$ 分别由方程 $e^{xy} - y = 0$ 和 $e^z - xz = 0$ 所确定, 求 $\frac{du}{dx}$.

9. 1997 年六

求曲线 $y = x^2 - 2x, y = 0, x = 1, x = 3$ 所围成的平面图形的面积 S , 并求该平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V .

10. 1997 年八

设 D 是以点 $O(0, 0), A(1, 2)$ 和 $B(2, 1)$ 为顶点的三角形区域, 求 $\iint_D x dx dy$.

11. 1998 年四

设 $z = (x^2 + y^2)e^{-\arctan \frac{y}{x}}$, 求 dz 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

12. 1998 年五

设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq x\}$, 求 $\iint_D \sqrt{x} dx dy$.

13. 1999 年四

计算二重积分 $\iint_D y dx dy$, 其中 D 是由直线 $x = -2, y = 0, y = 2$ 以及曲线 $x = -\sqrt{2y - y^2}$ 所围成的平面区域.

14. 1999 年五

设生产某种产品必须投入两种要素, x_1 和 x_2 分别为两要素的投入量, Q 为产出量; 若生产函数为 $Q = 2x_1^\alpha x_2^\beta$, 其中 α, β 为正常数, 且 $\alpha + \beta = 1$. 假设两种要素的价格分别为 p_1 和 p_2 , 试问: 当产出量为 12 时, 两要素各投入多少可以使得投入总费用最小.

15. 2000 年三

已知 $z = u^v$, $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = \arctan \frac{y}{x}$, 求 dz .

16. 2000 年五

假设某企业在两个相互分割的市场上出售同一种产品, 两个市场的需求函数分别是 $p_1 = 18 - 2Q_1$, $p_2 = 12 - Q_2$, 其中 p_1 和 p_2 分别表示该产品在两个市场的价格(单位: 万元/吨), Q_1 和 Q_2 分别表示该产品在两个市场的销售量(即需求量, 单位: 吨), 并且该企业生产这种产品的总成本函数是 $C = 2Q + 5$, 其中 Q 表示该产品在两个市场的销售总量, 即 $Q = Q_1 + Q_2$.

- (1) 如果该企业实行价格差别策略, 试确定两个市场上该产品的销售量和价格, 使该企业获得最大利润;
- (2) 如果该企业实行价格无差别策略, 试确定两个市场上该产品的销售量及其统一的价格, 使该企业的总利润最大化; 并比较两种价格策略下的总利润大小.

17. 2000 年七

设 $f(x, y) = \begin{cases} x^2 y & 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, 求 $\iint_D f(x, y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 2x\}$.

18. 2001 年三

设 $u = f(x, y, z)$ 有连续的一阶偏导数, 又函数 $y = y(x)$ 及 $z = z(x)$ 分别由下列两式确定: $e^{xy} - xy = 2$ 和 $e^x = \int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t} dt$,

求 $\frac{du}{dx}$.

19. 2001 年五

求二重积分 $\iint_D y[1 + xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}] dx dy$ 的值, 其中 D 是由直线 $y = x$, $y = -1$ 及 $x = 1$ 围成的平面区域.

20. 2002 年四

设函数 $u = f(x, y, z)$ 有连续偏导数, 且 $z = z(x, y)$ 由方程 $xe^x - ye^y = ze^z$ 所确定, 求 du .

21. 2002 年六

设闭区域 $D: x^2 + y^2 \leq y, x \geq 0$, $f(x, y)$ 为 D 上的连续函数, 且

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{8}{\pi} \iint_D f(u, v) du dv. \text{ 求 } f(x, y).$$

22. 2003 年四

设 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 1$, 又 $g(x, y) = f\left[xy, \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\right]$, 求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

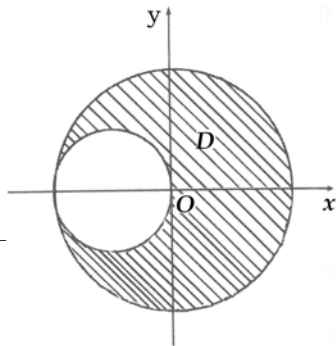
23. 2003 年五

计算二重积分 $I = \iint_D e^{-(x^2+y^2-\pi)} \sin(x^2 + y^2) dx dy$,

其中积分区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \pi\}$.

24. 2004 年三(16)

求 $\iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} + y) d\sigma$, 其中 D 是由圆 $x^2 + y^2 = 4$ 和 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 所围成的平面区域(如图).



25. 2005 年三(16)

设 $f(u)$ 具有二阶连续导数, 且 $g(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right) + yf\left(\frac{x}{y}\right)$, 求 $x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

26. 2005 年三(17)

计算二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

27. 2005 年三(18)

求 $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$ 在椭圆域 $D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$ 上最大值和最小值.

第五节 常微分方程

1. 2005 年一(2)

微分方程 $xy' + y = 0$ 满足初始条件 $y(1) = 2$ 的特解为_____.

2. 2003 年七

设 $y = f(x)$ 是第一象限内连接点 $A(0,1), B(1,0)$ 的一段连续曲线, $M(x, y)$ 为该曲线上任意一点, 点 C 为 M 在 x 轴上的投影, O 为坐标原点. 若梯形 $OCMA$ 的面积与曲边三角形 CBM 的面积之和为 $\frac{x^3}{6} + \frac{1}{3}$, 求 $f(x)$ 的表达式.

3. 2004 年三(17)

设 $f(u, v)$ 具有连续偏导数, 且满足

$$f'_u(u, v) + f'_v(u, v) = uv.$$

求 $y(x) = e^{-2x} f(x, x)$ 所满足的一阶微分方程, 并求其通解.