文都教育

2006

考研数学历年真题精析(数学三)

主　编:蔡子华
副主编:曾祥金　樊启斌　董小刚
策　划:文都考研信息中心

现 代 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

2006年考研数学历年真题解析/蔡子华编. — 北京:
现代出版社,2004

ISBN 7—80188—280—6

Ⅰ.2... Ⅱ.蔡... Ⅲ.数学(四)—研究生—入学考试—解题
Ⅳ. D0—44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第026507号

编　　者:蔡子华
责任编辑:张俊国
出版发行:现代出版社
地　　址:北京市安定门外华安里504号
邮政编码:100011
电　　话:010—64267325　64240483(传真)
电子邮箱:xiandai@cnpitc.com.cn
印　　刷:北京长阳汇文印刷厂
开　　本:787×1092毫米 1/16
印　　张:11.875
版　　本:2004年4月第1版　2005年3月修订　2005年3月第2次印刷
印　　数:1—6000册
书　　号:ISBN 7—80188—280—6
套书定价:66.00元

2006 年版本前言

毛泽东同志在 1930 年 5 月就提了这样的建议：你对于那个问题不能解决吗？那末，你就去调查那个问题的现状和历史吧！…… 调查就是解决问题。

同样的道理，如果考生对考研数学的试题和命题规律不了解或者不甚了解的话，那么就应该去接触考研数学历年真题。了解的途径有多种多样，如每年教育部制订的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》（以下简称《考试大纲》）、试题、答案、评分标准、名家评析等。

《考试大纲》每年都在修订，其中 1997 年之前与 1997 年之后（含 1997 年）无论从考试规定还是对考生的要求来讲，都有很大的不同。比如 1997 年之前考研数学分为五类，其中数学三是理工类，1997 年之后考研数学改为四类，其中数学三是经济类。另外，即使同样是理工类的数学一，要求也不一样。

1997 年后的试卷之所以具有足够代表性，另外一个原因是它不仅充分揭示了"既要有利于国家对高层次人才的选拔，也要有利于促进高等学校各类数学课程教学质量的提高"的命题原则，且不少题的设计思路非常巧妙。如

[98. 数学一、二. 二(3)] 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\triangle y=\frac{y\triangle x}{1+x^2}+\alpha$，且当 $\triangle x\to 0$ 时，α 是 $\triangle x$ 的高阶无穷小，$y(0)=\pi$，则 $y(1)=($　$)$

(A) 2π　　(B) π　　(C) $e^{\frac{\pi}{4}}$　　(D) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

这是一道综合题，解题的关键是建立微分方程。

只要掌握函数的微分的定义，去掉高阶无穷小，就能得到微分方程 $dy=\frac{y}{1+x^2}dx$. 然后求出其特解，再将 $x=1$ 代得 $y(1)$.

但是微分的定义是考生不太重视的. 那么不知道微分的定义是否能求解呢？其实知道导数和高阶无穷小的定义，亦可建立方程. 其过程为

$$\because \frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{y}{1+x^2}+\frac{\alpha}{\triangle x}$$

$$\therefore y'=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\left(\frac{y}{1+x^2}+\frac{\alpha}{\triangle x}\right)=\frac{y}{1+x^2}+0$$

即 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{1+x^2}$

此题妙在既重视基本概念，又不囿于某一特定概念；以一个选择题将微分、导数、高阶无穷小、微分方程的特解等概念及微分方程的求解方法自然集中在一起，更是独具匠心。

好题在试题中还不少，在此不一一列举。

细读历年真题，不难发现：以 A 表示考察知识点相同，A^+ 表示类似题型，

A^{++} 表示几乎完全相同的题目,则

2004 年数学一第(5) 题与 2003 年数学二第一大题第(6) 小题(A^{+});

2004 年数学一第(20) 题与 2002 年数学三第九大题(A^{+});

2004 年数学三第(20) 题与 2000 年数学三第九大题(A^{++});

2004 年数学三、四第(22) 题与 1999 年数学三第十一大题(A^{+});

2003 年数学一第四大题与 2001 年数学一第五大题(A^{++});

2003 年数学二第十一大题与 1999 年数学四第九大题(A^{++});

2003 年数学四第十大题与 1999 年数学三第九大题(A^{++});

2002 年数学二第十一大题(2) 与 1997 年数学二第三大题(6)(A^{++});

2002 年数学三第十一大题(1) 与 1999 年数学三第十一大(1)(A^{++});

2001 年数学二第一大题(5) 与 2000 年数学一第一大题(4)(A^{++});

2001 年数学三、数学四第三大题与 1997 年数学三第四大题(A^{++});

2000 年数学二第二大题(2) 与 1997 年数学二第二大题(3)(A^{++});

2000 年数学四第十大题与 1999 年数学四第九大题(A);

……

事实上,真题就是最好的模拟题,题不在多贵在精 !考生若有最近几年的试题分析并对其作研究,即可对考研数学的规律有较为全面的了解。

因此,我们从题库中节选了 1997 ～ 2005 年的考研数学的全部真题,特聘请全国著名考研辅导专家、连续多年担任研究生入学考试数学阅卷组组长的蔡子华教授担任主编,同时诚邀国内知名高等学府的数学教授参与编写了《考研数学历年真题精析》这套丛书。

这套丛书的主要特点是:

1.按数学一、数学二、数学三和数学四分类,分册出版;

2.将历年真题以填空题/选择题/解答题的顺序安排到考试大纲规定的章节中,便于考生在复习时了解有关知识点的重要程度及其在试题中出现的频率的高低;

3.将答案解析放在第三部分,并从[考点]→[分析]→[详解]→[讲评]→[得分率]等五个角度来展开分析与讲评。

本丛书是各位编者、专家从事考研命题研究的结晶 . 相信能对考生在掌握命题规律、扩展分析思路、提高解题技巧等诸方面有较大的帮助。

由于时间仓促,错误和疏漏之处难免,恳请广大读者、数学同仁批评指正。

最后,祝 2006 年考生取得满意的成绩 !

编者

2005 年 3 月

目　　录

第一部分　题型集萃

第二部分　历年试题

第三部分　真题解析

第一部分　题型集萃

第一章　微积分

第一节　函数、极限、连续

1.2002 年一(1)

设常数 $a \neq \frac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n \to \infty} \ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n =$ ________.

2.2004 年一(1)

若 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{e^x - a}(\cos x - b) = 5$，则 $a =$ ________，$b =$ ________.

3.2005 年一(1)

极限 $\lim\limits_{x \to \infty} x\sin\frac{2x}{x^2+1} =$ ________.

4.1998 年二(2)

设函数 $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点，其结论为(　　)

(A) 不存在间断点　　(B) 存在间断点 $x = 1$

(C) 存在间断点 $x = 0$　　(D) 存在间断点 $x = -1$

5.2000 年二(1)

设对任意的 x，总有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x \to \infty}[g(x) - \varphi(x)] = 0$，则 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$(　　)

(A) 存在且等于零　　(B) 存在但不一定为零

(C) 一定不存在　　(D) 不一定存在

6.2003 年二(1)

设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$(　　)

(A) 在 $x = 0$ 处左极限不存在　　(B) 有跳跃间断点 $x = 0$

(C) 在 $x = 0$ 处右极限不存在　　(D) 有可去间断点 $x = 0$

7.2004 年二(7)

函数 $f(x) = \frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界(　　)

(A)$(-1,0)$　　(B)$(0,1)$　　(C)$(1,2)$　　(D)$(2,3)$

8.2004 年二(8)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = a$，$g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$，则(　　)

(A) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点

(B) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点

(C) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点

(D) $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关

9.1997 **年三**

在经济学中,称函数 $Q(x)=A[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}]^{-\frac{1}{x}}$ 为固定替代弹性生产函数,而称函数 $\overline{Q}=AK^{\delta}L^{1-\delta}$ 为 Cobb－Douglas 生产函数(简称 C－D 生产函数).

试证明:当 $x\to 0$ 时,固定替代弹性生产函数变为 C－D 生产函数,即有 $\lim\limits_{x\to 0}Q(x)=\overline{Q}$.

10.2003 **年三**

设 $f(x)=\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)}$, $x\in[\dfrac{1}{2},1)$.试补充定义 $f(1)$ 使得 $f(x)$ 在$[\dfrac{1}{2},1]$上连续.

11.2004 **年三**(15)

求 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2})$.

12.2005 **年三**(15)

求 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x})$.

第二节　一元函数微分学

1.1997 **年一**(1)

设 $y=f(\ln x)e^{f(x)}$,其中 f 可微,则 $dy=$ ________.

2.1998 **年一**(1)

设曲线 $f(x)=x^n$ 在点(1,1)处的切线与 x 轴的交点为$(\xi_n,0)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$ ________.

3.2001 **年一**(1)

设生产函数为 $Q=AL^{\alpha}K^{\beta}$,其中 Q 是产出量,L 是劳动投入量,K 是资本投入量,而 A, α,β 均为大于零的参数,则当 $Q=1$ 时 K 关于 L 的弹性为________.

4.2003 **年一**(1)

设 $f(x)=\begin{cases} x^{\lambda}\cos\dfrac{1}{x}, & 若\ x\neq 0, \\ 0, & 若\ x=0, \end{cases}$ 其导函数在 $x=0$ 处连续,则 λ 的取值范围是 ________.

5.2003 **年一**(2)

已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴相切,则 b^2 可以通过 a 表示为 $b^2=$ ________.

6.1997 **年二**(2)

若 $f(-x)=f(x)(-\infty<x<+\infty)$,在$(-\infty,0)$内 $f'(x)>0$,且 $f''(x)<0$,则在$(0,+\infty)$内有(　　)

(A) $f'(x)>0, f''(x)<0$　　(B) $f'(x)>0, f''(x)>0$
(C) $f'(x)<0, f''(x)<0$　　(D) $f'(x)<0, f''(x)>0$

7.1998 **年二**(1)

设周期函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内可导,周期为4.又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$,则曲线 $y=f(x)$ 在点$(5,f(5))$处的切线的斜率为(　　)

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) 0　　(C) -1　　(D) -2

8.2000 **年二**(2)

设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导,则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是(　　)

(A) $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$　　(B) $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$
(C) $f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$　　(D) $f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$

9.2001 **年二**(1)

设 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续,又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$,则(　　)

(A) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点
(B) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点
(C) $(a,f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
(D) $x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(a,f(a))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

10.2002 **年二**(1)

设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上有定义,在开区间(a,b)内可导,则(　　)

(A) 当 $f(a)f(b)<0$ 时,存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$
(B) 对任何 $\xi\in(a,b)$,有 $\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$
(C) 当 $f(a)=f(b)$ 时,存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f'(\xi)=0$
(D) 存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

11.2004 **年二**(9)

设 $f(x)=|x(1-x)|$,则(　　)

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,但$(0,0)$不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,但$(0,0)$是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,且$(0,0)$是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(0,0)$也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

12.2004 **年二**(11)

设 $f'(x)$ 在$[a,b]$上连续,且 $f'(a)>0, f'(b)<0$,则下列结论中错误的是(　　)

(A) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使 $f(x_0)>f(a)$
(B) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使 $f(x_0)>f(b)$
(C) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使 $f'(x_0)=0$
(D) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使 $f(x_0)=0$

13.2005 **年二**(7)

当 a 取下列哪个值时,函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 恰有两个不同的零点.(　　)

(A)2.　　(B)4.　　(C)6.　　(D)8.

14.2005 **年二**(10)

设 $f(x)=x\sin x+\cos x$.下列命题中正确的是(　　)

(A) $f(0)$ 是极大值,$f(\frac{\pi}{2})$ 是极小值.　　(B) $f(0)$ 是极小值,$f(\frac{\pi}{2})$ 是极大值.

(C) $f(0)$ 是极大值,$f(\frac{\pi}{2})$ 也是极大值.　　(D) $f(0)$ 是极小值,$f(\frac{\pi}{2})$ 也是极小值.

15.1997 **年五**

一商家销售某种商品的价格满足关系 $p=7-0.2x$(万元/吨),x 为销售量(单位:吨),商品的成本函数是 $C=3x+1$(万元).

(1) 若每销售一吨商品,政府要征税 t(万元),求该商家获最大利润时的销售量;

(2) t 为何值时,政府税收总额最大.

16.1998 **年五**

设某酒厂有一批新酿的好酒,如果现在(假定 $t=0$)就售出,总收入为 R_0(元).如果窖藏起来待来日按陈酒价格出售,t 年末总收入为 $R=R_0e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}}$.假定银行的年利率为 r,并以连续复利计息,试求窖藏多少年售出可使总收入的现值最大.并求 $r=0.06$ 时的 t 值.

17.1998 **年六**

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f'(x)\neq 0$.试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$,使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}.$$

18.1999 **年三**

曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的切线与 x 轴和 y 轴围成一个图形,记切点的横坐标为 a.试求切线方程和这个图形的面积.当切点沿曲线趋于无穷远时,该面积的变化趋势如何?

19.1999 **年八**

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=f(1)=0$,$f(\frac{1}{2})=1$.试证:

(1) 存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$,使 $f(\eta)=\eta$;

(2) 对任意实数 λ,必存在 $\xi\in(0,\eta)$,使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

20.2000 **年六**

求函数 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的单调区间和极值,并求该函数图形的渐近线.

21.2001 **年四**

已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,且

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=e,\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)],$$求 c 的值.

22.2003 年八

设函数 $f(x)$ 在$[0,3]$上连续,在$(0,3)$内可导,且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$,$f(3)=1$.试证必存在 $\xi\in(0,3)$,使 $f'(\xi)=0$.

23.2004 年三(18)

设某商品的需求函数 $Q=100-5P$,其中价格 $P\in(0,20)$,Q 为需求量,

(Ⅰ)求需求量对价格的弹性函数 $E_d(E_d>0)$;

(Ⅱ)推导$\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q(1-E_d)$(其中 R 为收益),并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时,降低价格反而收益增加.

第三节　一元函数积分学

1.1997 年一(2)

若 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,则$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$________.

2.1998 年一(2)

$\int\dfrac{\ln x-1}{x^2}\mathrm{d}x=$________.

3.1999 年一(1)

设 $f(x)$ 有一个原函数$\dfrac{\sin x}{x}$,则$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}xf'(x)\mathrm{d}x=$________.

4.2000 年一(2)

$\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}=$________.

5.2004 年一(3)

设 $f(x)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{x^2}, & -\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{1}{2}\\ -1, & x\geqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}$,则$\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x-1)\mathrm{d}x=$________.

6.1997 年二(1)

设 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,\mathrm{d}t$,$g(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}$,则当 $x\to0$ 时,$f(x)$ 是 $g(x)$ 的(　　)

(A)低阶无穷小　　(B)高阶无穷小

(C)等价无穷小　　(D)同阶但不等价的无穷小

7.1999 年二(1)

设 $f(x)$ 是连续函数,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则(　　)

(A)当 $f(x)$ 是奇函数时,$F(x)$ 必为偶函数

(B)当 $f(x)$ 是偶函数时,$F(x)$ 必为奇函数

(C)当 $f(x)$ 是周期函数时,$F(x)$ 必为周期函数

(D)当 $f(x)$ 是单调增函数时,$F(x)$ 必为单调增函数

8.2001 年二(2)

设 $g(x)=\int_0^x f(u)\,du$，其中 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x^2+1) & 0\leqslant x<1\\ \dfrac{1}{3}(x-1) & 1\leqslant x<2\end{cases}$，则 $g(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内（　　）

(A) 无界　　(B) 递减　　(C) 不连续　　(D) 连续

9.2005 年二(11)

以下四个命题中，正确的是（　　）

(A) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(B) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(D) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

10.1997 年六

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续、单调不减且 $f(0)\geqslant 0$. 试证函数

$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\int_0^x t^n f(t)\,\mathrm{d}t & x>0\\ 0 & x=0\end{cases}$，在 $[0,+\infty)$ 上连续且单调不减（其中 $n>0$）.

11.1998 年七

设有两条抛物线 $y=nx^2+\dfrac{1}{n}$ 和 $y=(n+1)x^2+\dfrac{1}{n+1}$，记它们交点的横坐标的绝对值为 a_n.

(1) 求这两条抛物线所围成的平面图形的面积 S_n；

(2) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{S_n}{a_n}$ 的和.

12.1999 年七

设函数 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(2x-t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\arctan x^2$. 已知 $f(1)=1$，求 $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ 的值.

13.2000 年七

设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos x\,\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\cdots$，求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_n$.

14.2000 年八

设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=0$，$\int_0^{\pi}f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=0$.

试证明：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1、ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

15.2001 年六

已知抛物线 $y=px^2+qx$（其中 $p<0,q>0$）在第一象限内与直线 $x+y=5$ 相切，且此抛物线与 x 轴所围成的平面图形的面积为 S. (1) 问 p 和 q 为何值时，S 达到最大值？(2) 求出此最大值.

16.2001 年七

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} x\mathrm{e}^{1-x}f(x)\mathrm{d}x \quad (k>1),$$

证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

17.2002 **年三**

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$.

18.2002 **年五**

设 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$，求 $\int\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x$.

19.2002 **年六**

设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a,x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域；D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $y=0,x=a$ 所围成的平面区域，其中 $0<a<2$.

(1) 试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1；D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2；

(2) 问当 a 为何值时，V_1+V_2 取得最大值？试求此最大值.

20.2002 **年八**

设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)>0$. 利用闭区间上连续函数性质，证明存在一点 $\xi\in[a,b]$，使 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

21.2004 **年三**(17)

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且满足 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t,\ x\in[a,b]$，$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b g(t)dt$，证明：$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$.

22.2005 **年三**(19)

设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的导数连续，且 $f(0)=0,f'(x)\geqslant 0,g'(x)\geqslant 0$. 证明：对任何 $a\in[0,1]$，有 $\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\geqslant f(a)g(1)$.

第四节　多元函数微积分学

1.2000 **年一**(1)

设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中 f、g 均可微，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ________.

2.2002 **年一**(2)

交换积分次序：$\int_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{1}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x=$ ________.

3.2003 **年一**(3)

设 $a>0$，$f(x)=g(x)=\begin{cases}a, & 若\ 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 而 D 表示全平面，则

$I=\iint\limits_D f(x)g(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

4.2004 年一(2)

函数 $f(u,v)$ 由关系式 $f[xg(y),y]=x+g(y)$ 确定,其中函数 $g(y)$ 可微,且 $g(y)\neq 0$,则 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=$ ________.

5.2005 年一(3)

设二元函数 $z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$,则 $dz\big|_{(1,0)}=$ ____________.

6.1999 年二(2)

设 $f(x,y)$ 连续,且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(u,v)\,du\,dv$,其中 D 是由 $y=0$, $y=x^2$, $x=1$ 所围区域,则 $f(x,y)$ 等于(　　)

(A) xy　　(B) $2xy$　　(C) $xy+\dfrac{1}{8}$　　(D) $xy+1$

7.2003 年二(2)

设可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极小值,则下列结论正确的是(　　)

(A) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零

(B) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数大于零

(C) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数小于零

(D) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数不存在

8.2005 年二(8)

设 $I_1=\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$, $I_2=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)\,d\sigma$, $I_3=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)^2\,d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,则(　　)

(A) $I_3>I_2>I_1$.　　(B) $I_1>I_2>I_3$.

(C) $I_2>I_1>I_3$.　　(D) $I_3>I_1>I_2$.

9.1997 年四

设 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数,$y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 分别由方程 $e^{xy}-y=0$ 和 $e^x-xz=0$ 所确定,求 $\dfrac{du}{dx}$.

10.1997 年八

设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,且满足方程

$$f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy,$$求 $f(t)$.

11.1998 年三

设 $z=(x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$,求 dz 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

12.1998 年四

设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x\}$,求 $\iint\limits_D\sqrt{x}\,dx\,dy$.

13.1999 年四

计算二重积分$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$是由直线$x=-2$,$y=0$,$y=2$以及曲线$x=-\sqrt{2y-y^2}$所围成的平面区域.

14.1999 **年五**

设生产某种产品必须投入两种要素,x_1和x_2分别为两要素的投入量,Q为产出量,若生产函数为$Q=2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$,其中$\alpha$、$\beta$为正常数,且$\alpha+\beta=1$.假设两种要素的价格分别为$p_1$和$p_2$,试问:当产出量为12时,两要素各投入多少可以使得投入总费用最小?

15.2000 **年四**

计算二重积分$\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}d\sigma$,其中$D$是由曲线$y=-a+\sqrt{a^2-x^2}$($a>0$)和直线$y=-x$围成的区域.

16.2000 **年五**

假设某企业在两个相互分割的市场上出售同一种产品,两个市场的需求函数分别是

$p_1=18-2Q_1$,$p_2=12-Q_2$,

其中p_1和p_2分别表示该产品在两个市场的价格(单位:万元/吨),Q_1和Q_2分别表示该产品在两个市场的销售量(即需求量,单位:吨),并且该企业生产这种产品的总成本函数是$C=2Q+5$,

其中Q表示该产品在两个市场的销售总量,即$Q=Q_1+Q_2$.

(1)如果该企业实行价格差别策略,试确定两个市场上该产品的销售量和价格,使该企业获得最大利润;

(2)如果该企业实行价格无差别策略,试确定两个市场上该产品的销售量及其统一的价格,使该企业的总利润最大化;并比较两种价格策略下的总利润大小.

17.2001 **年三**

设$u=f(x,y,z)$有连续的一阶偏导数,又函数$y=y(x)$及$z=z(x)$分别由下列两式确定:

$e^{xy}-xy=2$和$e^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$,求$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

18.2001 **年五**

求二重积分$\iint\limits_D y\left[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$的值,其中$D$是由直线$y=x$,$y=-1$及$x=1$围成的平面区域.

19.2002 **年四**

设函数$u=f(x,y,z)$有连续偏导数,且$z=z(x,y)$由方程$xe^x-ye^y=ze^z$所确定,求$\mathrm{d}u$.

20.2003 **年四**

设$f(u,v)$具有二阶连续偏导数,且满足$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$,又$g(x,y)=f\left[xy,\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]$,求$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

21.2003 **年五**

计算二重积分 $I=\iint_D e^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中积分区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\pi\}$.

22.2004 **年三**(16)

求$\iint_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和$(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域.

23.2005 **年三**(16)

设 $f(u)$ 具有二阶连续导数,且 $g(x,y)=f(\frac{y}{x})+yf(\frac{x}{y})$,求 $x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

24.2005 **年三**(17)

计算二重积分$\iint_D|x^2+y^2-1|d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

第五节　无穷级数

1.1999 **年一**(2)

$\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{1}{2})^{n-1}=$________.

2.2003 **年二**(3)

设 $p_n=\frac{a_n+|a_n|}{2}$,$q_n=\frac{a_n-|a_n|}{2}$,$n=1,2,\cdots$,则下列命题正确的是(　　)

(A)若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛

(B)若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛

(C)若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty}q_n$ 的敛散性都不定

(D)若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty}q_n$ 的敛散性都不定

3.2004 **年二**(10)

设有以下命题

① 若$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

② 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1000}$ 收敛

③ 若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$,则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

④ 若$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛

则以上命题中正确的是(　　)

(A)①② (B)②③ (C)③④ (D)①④

4.2005 **年二**(9)

设 $a_n>0, n=1,2,\cdots$,若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n$ 收敛,则下列结论正确的是( )

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散. (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 发散.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛. (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛.

5.1997 **年七**

从点 $P_1(1,0)$ 作 x 轴的垂线,交抛物线 $y=x^2$ 于点 $Q_1(1,1)$;再从 Q_1 作这条抛物线的切线与 x 轴交于 P_2.然后又从 P_2 作 x 轴的垂线,交抛物线于点 Q,依次重复上述过程得到一系列的点 $P_1, Q_1; P_2, Q_2; \cdots; P_n, Q_n; \cdots$.

(1) 求 $\overline{OP_n}$;

(2) 求级数 $\overline{Q_1P_1}+\overline{Q_2P_2}+\cdots+\overline{Q_nP_n}+\cdots$ 的和.其中 $n(n\geqslant 1)$ 为自然数,而 $\overline{M_1M_2}$ 表示点 M_1 与 M_2 之间的距离.

6.2001 **年八**

已知 $f_n(x)$ 满足 $f'_n(x)=f_n(x)+x^{n-1}e^x$ (n 为正整数)且 $f_n(1)=\dfrac{e}{n}$,求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 之和.

7.2002 **年七**

(1) 验证函数 $y(x)=1+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^6}{6!}+\dfrac{x^9}{9!}+\cdots+\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程 $y''+y'+y=e^x$;

(2) 利用(1)的结果求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

8.2003 **年六**

求幂级数 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2n}(|x|<1)$ 的和函数 $f(x)$ 及其极值.

9.2004 **年三**(19)

设级数 $\dfrac{x^4}{2\cdot 4}+\dfrac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\dfrac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 的和函数为 $S(x)$,

求(Ⅰ) $S(x)$ 所满足的一阶微分方程;

(Ⅱ) $S(x)$ 的表达式.

10.2005 **年三**(18)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)$.

第六节 常微分方程与差分方程

1.1997 **年一**(3)