文都教育

2006

考研数学历年真题精析（数学二）

主　编：蔡子华
副主编：曾祥金　樊启斌　董小刚
策　划：文都考研信息中心

现代出版社

图书在版编目（CIP）数据

200 6 年考研数学历年真题解析/蔡子华编．— 北京：现代出版社，2004

ISBN 7－80188－280－6

Ⅰ．2...　Ⅱ．蔡...　Ⅲ．数学—研究生—入学考试—解题
Ⅳ．D0－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 026507 号

编　　者：蔡子华
责任编辑：张俊国
出版发行：现代出版社
地　　址：北京市安定门外华安里 504 号
邮政编码：100011
电　　话：010－64267325　64240483（传真）
电子邮箱：xiandai@cnpitc．com．cn
印　　刷：北京长阳汇文印刷厂
开　　本：787×1092 毫米 1/16
印　　张：12．625
版　　本：2004 年 4 月第 1 版　2005 年 3 修订　2005 年 3 月第 2 次印刷
印　　数：1—6000 册
书　　号：ISBN 7－80188－280－6
套书定价：66．00 元

2006 年版本前言

毛泽东同志在 1930 年 5 月就提了这样的建议：你对于那个问题不能解决吗？那末，你就去调查那个问题的现状和历史吧！…… 调查就是解决问题。

同样的道理，如果考生对考研数学的试题和命题规律不了解或者不甚了解的话，那么就应该去接触考研数学历年真题。了解的途径有多种多样，如每年教育部制订的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》（以下简称《考试大纲》）、试题、答案、评分标准、名家评析等。

《考试大纲》每年都在修订，其中 1997 年之前与 1997 年之后（含 1997 年）无论从考试规定还是对考生的要求来讲，都有很大的不同。比如 1997 年之前考研数学分为五类，其中数学三是理工类，1997 年之后考研数学改为四类，其中数学三是经济类。另外，即使同样是理工类的数学一，要求也不一样。

1997 年后的试卷之所以具有足够代表性，另外一个原因是它不仅充分揭示了“既要有利于国家对高层次人才的选拔，也要有利于促进高等学校各类数学课程教学质量的提高”的命题原则，且不少题的设计思路非常巧妙。如

[98. 数学一、二. 二(3)] 已知函数 $y = y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\triangle y = \dfrac{y\triangle x}{1+x^2} + \alpha$，且当 $\triangle x \to 0$ 时，α 是 $\triangle x$ 的高阶无穷小，$y(0) = \pi$，则 $y(1) = (\quad)$

(A) 2π (B) π (C) $e^{\frac{\pi}{4}}$ (D) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

这是一道综合题，解题的关键是建立微分方程。

只要掌握函数的微分的定义，去掉高阶无穷小，就能得到微分方程 $dy = \dfrac{y}{1+x^2}dx$. 然后求出其特解，再将 $x = 1$ 代得 $y(1)$.

但是微分的定义是考生不太重视的. 那么不知道微分的定义是否能求解呢？其实知道导数和高阶无穷小的定义，亦可建立方程. 其过程为

$$\because \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y}{1+x^2} + \frac{\alpha}{\triangle x}$$

$$\therefore y' = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0}\left(\frac{y}{1+x^2} + \frac{\alpha}{\triangle x}\right) = \frac{y}{1+x^2} + 0$$

即 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{1+x^2}$

此题妙在既重视基本概念，又不囿于某一特定概念；以一个选择题将微分、导数、高阶无穷小、微分方程的特解等概念及微分方程的求解方法自然集中在一起，更是独具匠心。

好题在试题中还不少，在此不一一列举。

细读历年真题，不难发现：以 A 表示考察知识点相同，A^+ 表示类似题型，

A^{++} 表示几乎完全相同的题目，则

2004 年数学一第(5) 题与 2003 年数学二第一大题第(6) 小题(A^+)；

2004 年数学一第(20) 题与 2002 年数学三第九大题(A^+)；

2004 年数学三第(20) 题与 2000 年数学三第九大题(A^{++})；

2004 年数学三、四第(22) 题与 1999 年数学三第十一大题(A^+)；

2003 年数学一第四大题与 2001 年数学一第五大题(A^{++})；

2003 年数学二第十一大题与 1999 年数学四第九大题(A^{++})；

2003 年数学四第十大题与 1999 年数学三第九大题(A^{++})；

2002 年数学二第十一大题(2) 与 1997 年数学二第三大题(6)(A^{++})；

2002 年数学三第十一大题(1) 与 1999 年数学三第十一大(1)(A^{++})；

2001 年数学二第一大题(5) 与 2000 年数学一第一大题(4)(A^{++})；

2001 年数学三、数学四第三大题与 1997 年数学三第四大题(A^{++})；

2000 年数学二第二大题(2) 与 1997 年数学二第二大题(3)(A^{++})；

2000 年数学四第十大题与 1999 年数学四第九大题(A)；

……

事实上，真题就是最好的模拟题，题不在多贵在精！考生若有最近几年的试题分析并对其作研究，即可对考研数学的规律有较为全面的了解。

因此，我们从题库中节选了 1997 ～ 2005 年的考研数学的全部真题，特聘请全国著名考研辅导专家、连续多年担任研究生入学考试数学阅卷组组长的蔡子华教授担任主编，同时诚邀国内知名高等学府的数学教授参与编写了《考研数学历年真题精析》这套丛书。

这套丛书的主要特点是：

1.按数学一、数学二、数学三和数学四分类，分册出版；

2.将历年真题以填空题／选择题／解答题的顺序安排到考试大纲规定的章节中，便于考生在复习时了解有关知识点的重要程度及其在试题中出现的频率的高低；

3.将答案解析放在第三部分，并从[考点]→[分析]→[详解]→[讲评]→[得分率]等五个角度来展开分析与讲评。

本丛书是各位编者、专家从事考研命题研究的结晶．相信能对考生在掌握命题规律、扩展分析思路、提高解题技巧等诸方面有较大的帮助。

由于时间仓促，错误和疏漏之处难免，恳请广大读者、数学同仁批评指正。

最后，祝 2006 年考生取得满意的成绩！

编者

2005 年 3 月

目　　录

第一部分　题型集萃

第二部分　历年试题

第三部分　真题解析

第一部分　题型集萃

第一章　高数部分

第一节　函数、极限、连续

1.1997 年一(1)

已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ ________.

2.1998 年一(1)

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$ ________.

3.2000 年一(1)

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=$ ________.

4.2001 年一(1)

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$ ________.

5.2002 年一(1)

设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0,\\ ae^{2x}, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ ________.

6.2002 年一(4)

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\dfrac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\dfrac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\dfrac{n\pi}{n}}\right]=$ ________.

7.2003 年一(1)

若 $x\to 0$ 时,$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小,则 $a=$ ________.

8.2004 年一(1)

设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$,则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$ ________

9.2005 年一(5)

当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小,则 $k=$ ________.

10.1997 年二(1)

设 $x\to 0$ 时,$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小,则 n 为(　　)

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

11.1997 年二(5)

设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$, $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\geqslant 0\end{cases}$,则 $g[f(x)]$(　　)

(A)$\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　　(B)$\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

(C)$\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　　(D)$\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

12.1998 **年二**(1)

设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则下列断言正确的是(　　)

(A)若 x_n 发散,则 y_n 必发散　　(B)若 x_n 无界,则 y_n 必有界

(C)若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小(D)若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小,则 y_n 必为无穷小

13.1998 **年二**(3)

已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$,其中 α 是比 $\Delta x(\Delta x\to 0)$ 高阶的无穷小,且 $y(0)=\pi$,则 $y(1)=$(　　)

(A)$\pi e^{\frac{\pi}{4}}$　　(B)2π　　(C)π　　(D)$e^{\frac{\pi}{4}}$

14.1999 **年二**(1)

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2 g(x), & x\leqslant 0\end{cases}$,其中 $g(x)$ 是有界函数,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　)

(A)极限不存在　　(B)极限存在,但不连续

(C)连续,但不可导　　(D)可导

15.1999 **年二**(2)

设 $\alpha(x)=\int_0^{5x}\dfrac{\sin t}{t}dt$, $\beta(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt$,则当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的(　　)

(A)高阶无穷小　　(B)低阶无穷小

(C)同阶但不等价的无穷小　　(D)等价无穷小

16.1999 **年二**(4)

"对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$"是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的(　　)

(A)充分条件但非必要条件　　(B)必要条件但非充分条件

(C)充分必要条件　　(D)既非充分条件又非必要条件

17.2000 **年二**(1)

设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$,则常数 a、b 满足(　　)

(A)$a<0,b<0$　　(B)$a>0,b>0$

(C)$a\leqslant 0,b>0$　　(D)$a\geqslant 0,b<0$

18.2000 **年二**(4)

若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$为(　　)

(A)0　　(B)6　　(C)36　　(D)∞

19.2001 **年二**(1)

(1)设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$,则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于(　　)

(A)0　　(B)1

(C)$\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1,\\ 0 & |x|>1\end{cases}$　　(D)$\begin{cases}0 & |x|\leqslant 1\\ 1 & |x|>1\end{cases}$

20.2001 **年二**(2)

设当 $x\to 0$ 时,$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小,$x\sin x^n$ 是比$(e^{x^2}-1)$高阶的无穷小,则正整数 n 等于(　　)

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

21.2003 **年二**(1)

设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有(　　)

(A)$a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　(B)$b_n<c_n$ 对任意 n 成立

(C)极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　(D)极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

22.2004 **年二**(7)

把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2\,dt$,$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt$,$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt$ 排列起来,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则排列顺序应为(　　)

(A)α,β,γ　　(B)α,γ,β　　(C)β,α,γ　　(D)β,γ,α

23.2005 **年二**(12)

设函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$,则(　　)

(A)$x=0$,$x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点.

(B)$x=0$,$x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(C)$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点,$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(D)$x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点,$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

24.2004 **年二**(9)

$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}=$ ________.

(A)$\int_1^2\ln^2 x\,dx$　　(B)$2\int_1^2\ln x\,dx$　　(C)$2\int_1^2\ln(1+x)\,dx$　　(D)$\int_1^2\ln^2(1+x)\,dx$

25.1997 **年三**(1)

求极限$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

26.1998 **年三**

求函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$ 在区间$(0,2\pi)$内的间断点,并判断其类型.

27.1999 年三

求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$

28.1999 年十

设 $f(x)$是区间$[0,+\infty)$上单调减少且非负的连续函数,$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{a_n\}$的极限存在.

29.2001 年四

求极限$\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$,记此极限为 $f(x)$,求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

30.2002 年五

已知函数 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$内可导,$f(x)>0$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$,且满足$\lim\limits_{h\to0}\left(\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$,求 $f(x)$.

31.2002 年八

设 $0<x_1<3$,$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{x_n\}$的极限存在,并求此极限.

32.2002 年十

设函数 $f(x)$在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数,且 $f(0)\neq0$,$f'(0)\neq0$,$f''(0)\neq0$.证明:存在惟一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,使得当 $h\to0$ 时,$\lambda_1f(h)+\lambda_2f(2h)+\lambda_3f(3h)-f(0)$是比 h^2 高阶的无穷小.

33.2003 年三

设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0,\\ 6, & x=0,\\ \dfrac{\mathrm{e}^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x>0,\end{cases}$问 a为何值时,$f(x)$在 $x=0$ 处连续;a为何值时,$x=0$ 是 $f(x)$的可去间断点?

34.2004 年三(15)

求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$

第二节　一元函数微分

1.1997 年一(2)

设 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$ 则 $y''\big|_{x=0}=$ ________.

2.1998 年一(2)

曲线 $y=-x^3+x^2+2x$ 与 x 轴所围成的图形的面积 $A=$ ________.

3.1998 **年一**(5)

曲线 $y=x\ln(e+\frac{1}{x})(x>0)$ 的渐近线方程为________.

4.1999 **年一**(1)

曲线$\begin{cases}x=e^t\sin 2t\\y=e^t\cos t\end{cases}$在点(0,1)处的法线方程为________.

5.1999 **年一**(2)

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 确定,则$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ ________.

6.2000 **年一**(2)

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 所确定,则 $dy|_{x=0}=$ ________.

7.2000 **年一**(4)

曲线 $y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为________.

8.2001 **年一**(2)

设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定,则曲线 $y=f(x)$ 在点(0,1)处的法线方程为__________.

9.2003 **年一**(2)

设函数 $y=f(x)$ 由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定,则曲线 $y=f(x)$ 在点(1,1)处的切线方程是________.

10.2003 **年一**(3)

$y=2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数是________.

11.2004 **年一**(2)

设函数 $y(x)$ 由参数方程$\begin{cases}x=t^3+3t+1\\y=t^3-3t+1\end{cases}$确定,则曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 取值范围为________

12.2005 **年一**(1)

设 $y=(1+\sin x)^x$,则 $\left.dy\right|_{x=\pi}=$ ________.

13.2005 **年一**(2)

曲线 $y=\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为________.

14.1997 **年二**(3)

已知函数 $y=f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$,若 $f'(x_0)=0(x_0\neq 0)$,则(　　)

(A) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值　　(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,$(x_0,f(x_0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

15.1998 **年二**(2)

函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 的不可导点的个数为(　　)

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

16.1998 **年二**(4)

设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内连续,且 $f(a)$ 为其极大值,则存在 $\delta>0$,当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时,必有(　　)

(A) $(x-a)[f(x)-f(a)]\geqslant 0$　　(B) $(x-a)[f(x)-f(a)]\leqslant 0$

(C) $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\geqslant 0(x\neq a)$　　(D) $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\leqslant 0(x\neq a)$

17.1999 **年二**(3)

设 $f(x)$ 是连续函数,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则(　　)

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时,$F(x)$ 必是偶函数

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时,$F(x)$ 必是奇函数

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时,$F(x)$ 必是周期函数

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时,$F(x)$ 必是单调增函数

18.2000 **年二**(2)

设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$,且 $f'(0)=0$,则(　　)

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值　　(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) 点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

19.2000 **年二**(3)

设函数 $f(x)$、$g(x)$ 是大于零的可导函数,且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$,则当 $a<x<b$ 时,有(　　)

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$　　(B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$　　(D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$

20.2001 **年二**(3)

曲线 $y=(x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为(　　)

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

21.2001 **年二**(4)

(4) 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(1-\delta,1+\delta)$ 内具有二阶导数,$f'(x)$ 严格单调减少,且 $f(1)=f'(1)=1$,则(　　)

(A) 在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)<x$.

(B) 在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)>x$.

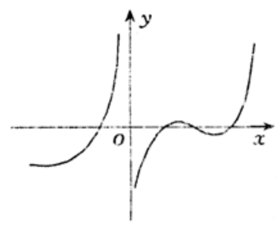
(C) 在 $(1-\delta,1)$ 内,$f(x)<x$,在 $(1,1+\delta)$ 内,$f(x)>x$.

(D) 在 $(1-\delta,1)$ 内,$f(x)>x$,在 $(1,1+\delta)$ 内,$f(x)<x$.

22.2001 **年二**(5)

已知函数 $y=f(x)$ 在其定义域内可导,它的图形如右图所示,则其导函数 $y=f'(x)$ 的图形为(　　)

23.2002 **年二**(1)

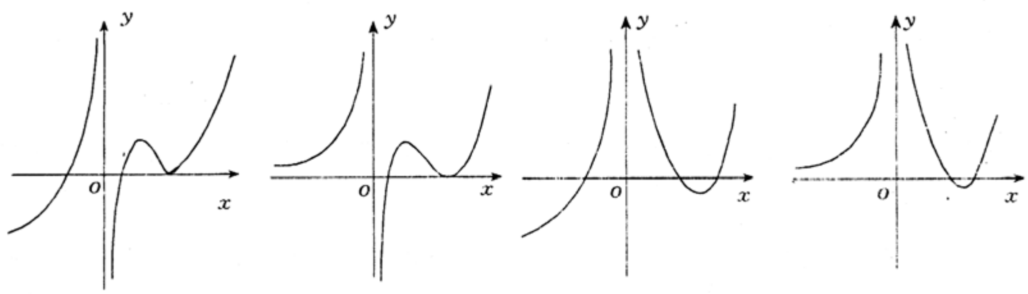


设函数 $f(u)$ 可导，$y = f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x = -1$ 处取得增量 $\Delta x = -0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1，则 $f'(1) = ($　　$)$

$(A)-1$　　　　$(B)0.1$　　　　$(C)1$　　　　$(D)0.5$

24.2002 **年二**(4)

设函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导，则(　　)



(A)　　　　(B)　　　　(C)　　　　(D)

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

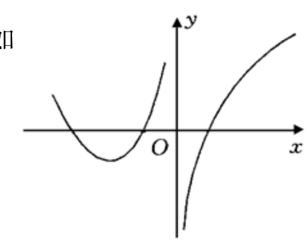
(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

(C) 当 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = 0$.

(D) 当 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = 0$.

25.2003 **年二**(4)

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$ 有(　　)



(A) 一个极小值点和两个极大值点

(B) 两个极小值点和一个极大值点

(C) 两个极小值点和两个极大值点

(D) 三个极小值点和一个极大值点

26.2004 **年二**(8)

设 $f(x) = |x(1-x)|$ 则(　　)

$(A)\ x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 不是 $y = f(x)$ 的拐点

$(B)\ x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 是 $y = f(x)$ 的拐点

$(C)\ x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,0)$ 是 $y = f(x)$ 的拐点

$(D)\ x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 也不是 $y = f(x)$ 的拐点

27.2004 **年二**(10)

设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0) > 0$，则存在 $\delta > 0$，使(　　)

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加　　(B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少

(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$,有 $f(x)>f(0)$　　(D) 对任意 $x\in(-\delta,0)$,有 $f(x)>f(0)$

28.2005 **年二**(7)

设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内(　　)

(A) 处处可导　　(B) 恰有一个不可导点

(C) 恰有两个不可导点　　(D) 至少有三个不可导点

29.2005 **年二**(9)

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^2+2t,\\ y=\ln(1+t)\end{cases}$ 确定,则曲线 $y=y(x)$ 在 $x=3$ 处的法线与 x 轴交点的横坐标是(　　)

(A) $\frac{1}{8}\ln 2+3$.　　(B) $-\frac{1}{8}\ln 2+3$.

(C) $-8\ln 2+3$.　　(D) $8\ln 2+3$.

30.1997 **年三**(2)

(2) 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=\arctan t\\ 2y-ty^2+e^t=5\end{cases}$ 所确定,求 $\frac{dy}{dx}$.

31.1997 **年八**

就 k 的不同取值情况,确定方程 $x-\frac{\pi}{2}\sin x=k$ 在开区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内根的个数,并证明你的结论.

32.1998 **年八**

设 $y=f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的任一非负连续函数.

(1) 试证存在 $x_0\in(0,1)$,使得在区间 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积,等于在 $[x_0,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积.

(2) 又设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导,且 $f'(x)>\frac{-2f(x)}{x}$,证明(1)中的 x_0 是惟一的.

33.1998 **年十一**

设 $x\in(0,1)$,证明:

(1) $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$;　　(2) $\frac{1}{\ln 2}-1<\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$.

34.1999 **年七**

已知函数 $y=\frac{x^3}{(x-1)^2}$,求:

(1) 函数的增减区间及极值;　　(2) 函数图形的凹凸区间及拐点;

(3) 函数图形的渐近线

35.1999 **年八**

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数,且 $f(-1)=0$, $f(1)=1$, $f'(0)=0$,证明:在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ,使 $f'''(\xi)=3$.

36.2000 **年五**

求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)(n\geqslant 3)$.

37.2000 **年八**

设函数 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上连续,且$\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$,$\int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$.试证明:在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点 ξ_1、ξ_2,使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

38.2000 **年九**

已知 $f(x)$ 是周期为5的连续函数,它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 高阶的无穷小,且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,求曲线 $y=f(x)$ 在点$(6,f(6))$处的切线方程.

39.2001 **年十**

设 $f(x)$ 在区间$[-a,a](a>0)$上具有二阶连续导数,$f(0)=0$,

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式;

(2) 证明在$[-a,a]$上至少存在一点 η,使 $a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$.

40.2002 **年三**

已知曲线的极坐标方程是 $r=1-\cos\theta$,求该曲线上对应于 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 处的切线与法线的直角坐标方程.

41.2002 **年九**

设 $0<a<b$,证明不等式$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$.

42.2003 **年四**

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程$\begin{cases}x=1+2t^2\\ y=\int_1^{1+2\ln t}\frac{\mathrm{e}^u}{u}\mathrm{d}u\end{cases}(t>1)$所确定,求$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=9}$.

43.2003 **年七**

讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4 x$ 的交点个数.

44.2003 **年十**

设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,且 $f'(x)>0$.若极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在,证明:

(1) 在(a,b)内 $f(x)>0$;

(2) 在(a,b)内存在点 ξ,使$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f(\xi)}$;

(3) 在(a,b)内存在与(2)中 ξ 相异的点 η,使 $f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

45.2004 **年三(16)**

设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上有定义,在区间$[0,2]$上,$f(x)=x(x^2-4)$.若对任意

的 x 都满足 $f(x)=kf(x+2)$,其中 k 为常数.(Ⅰ)写出 $f(x)$ 在$[-2,0)$上表达式;(Ⅱ)问 k 为何值时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

46.2004 **年三**(19)

设 $e<a<b<e^2$,证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

47.2005 **年三**(19)

已知函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且 $f(0)=0,f(1)=1$. 证明:

(Ⅰ)存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=1-\xi$;

(Ⅱ)存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$,使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

第三节　一元函数积分学

1.1997 **年一**(3)

$\int\frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}=$________.

2.1997 **年一**(4)

$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+8}=$________.

3.1998 **年一**(3)

$\int\frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx=$________.

4.1998 **年一**(4)

设 $f(x)$ 连续,则$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=$________.

5.1999 **年一**(3)

$\int\frac{x+5}{x^2-6x+13}dx=$________.

6.1999 **年一**(4)

函数 $y=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 在区间$[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$上的平均值为________.

7.2000 **年一**(3)

$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}=$________.

8.2001 **年一**(3)

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x dx=$________.

9.2002 **年一**(2)

位于曲线 $y=xe^{-x}(0\leqslant x<+\infty)$ 下方,x 轴上方的无界图形的面积是________.

10.2003 **年一**(4)

设曲线的极坐标方程为 $\rho=e^{a\theta}(a>0)$,则该曲线上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积为________.

11.2004 年一(3)

$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=$ ________

12.2005 年一(3)

$\int_{0}^{1}\frac{x dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=$ ________.

13.1997 年二(2)

设在闭区间$[a,b]$上$f(x)>0, f'(x)<0, f''(x)>0$.记$S_1=\int_a^b f(x)dx$,

$S_2=f(b)(b-a), S_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$,则(　　)

(A) $S_1<S_2<S_3$　　(B) $S_2<S_3<S_1$

(C) $S_3<S_1<S_2$　　(D) $S_2<S_1<S_3$

14.1997 年二(4)

设$F(x)=\int_{x}^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t dt$,则$F(x)$(　　)

(A) 为正常数　　(B) 为负常数　　(C) 恒为零　　(D) 不为常数

15.2002 年二(2)

设函数$f(x)$连续,则下列函数中,必为偶函数的是(　　)

(A) $\int_0^x f(t^2)dt$　　(B) $\int_0^x f^2(t)dt$

(C) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt$　　(D) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$

16.2003 年二(2)

设$a_n=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}dx$,则极限$\lim\limits_{n\to\infty}na_n$等于(　　)

(A) $(1+e)^{\frac{3}{2}}+1$　　(B) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}-1$

(C) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}+1$　　(D) $(1+e)^{\frac{3}{2}}-1$

17.2003 年二(5)

设$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}dx, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}dx$,则(　　)

(A) $I_1>I_2>1$　　(B) $1>I_1>I_2$

(C) $I_2>I_1>1$　　(D) $1>I_2>I_1$

18.2005 年二(8)

设$F(x)$是连续函数$f(x)$的一个原函数,“$M\Leftrightarrow N$”表示“M的充分必要条件是N”,则必有(　　)

(A) $F(x)$是偶函数$\Leftrightarrow f(x)$是奇函数.

(B) $F(x)$是奇函数$\Leftrightarrow f(x)$是偶函数.

(C) $F(x)$是周期函数$\Leftrightarrow f(x)$是周期函数.

(D) $F(x)$是单调函数$\Leftrightarrow f(x)$是单调函数.

19.1997 年三(3)

计算$\int e^{2x}(\tan x+1)^2\,dx$.

20.1997 年六

设函数 $f(x)$ 在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间$(0,1)$内大于零，并满足 $xf'(x)=f(x)+\dfrac{3a}{2}x^2$($a$为常数)，又曲线 $y=f(x)$ 与 $x=1$，$y=0$ 所围的图形 S 的面积值为2，求函数 $y=f(x)$，并问 a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

21.1997 年七

已知函数 $f(x)$ 连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，设 $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\,dt$，求 $\varphi'(x)$，并讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性.

22.1998 年四

确定常数 a、b、c 的值，使$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \dfrac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c\,(c\neq 0)$

23.1998 年六

计算积分$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\dfrac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

24.1998 年九

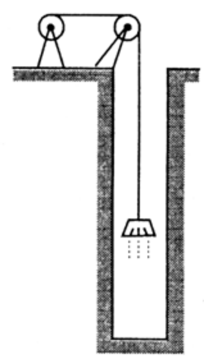
设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求由此曲线、切线及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的表面积.

25.1999 年四

计算$\int_1^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{x^2}dx$.

26.1999 年六

(本题满分 7 分)



为清除井底的污泥，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥后提出井口(见图).已知井深 $30\,m$，抓斗自重 $400\,N$，缆绳每米重 $50\,N$，抓斗抓起的污泥重 $2000\,N$，提升速度为 $3\,m/s$.在提升过程中，污泥以 $20\,N/s$ 的速度从抓斗缝隙中漏掉.现将抓起污泥的抓斗提升至井口，问克服重力需作多少焦耳的功?(说明：①$1\,N\times 1\,m=1\,J$；m，N，s，J分别表示米，牛顿，秒，焦耳.②抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)

27.2000 年三

设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，计算$\int f(x)\,dx$.

28.2000 年四