文都教育

2006

考研数学经典考题解读

主　编：叶盛标

策　划：文都考研信息中心

新 华 出 版 社

需要全本请访问 www.ertongbook.com

书　名：2006年考研数学经典考题解读
丛书名:文都教育考研精品系列
作　者：叶盛标
出版社:新华出版社
出版时间:2005
ISBN 7-5011-7011-8
中国分类法号：G64
定　价：10.00元

前　言

在长期深入研究全国历届考研数学试题（即国题），和1987年全国统考之前和之后的全国各高等院校历届考研数学试题（即校题）之后，编者认为，考生在备考过程中必须进行三个方面的研究：第一，研究考纲；第二，研究国题；第三，研究校题．国题集中体现了全国命题小组各位专家的智慧，校题集中体现了全国各高等院校命题小组各位专家的智慧．国题和校题剔除了题海中的偏题、怪题、难题，是题海中的精品．国题与校题互为题源，相映生辉，必须精心研究，避免在茫茫题海中盲目地探索！

本资料收集的主要是校题中的国题，这些题目最先为各高等院校命题小组的专家所欣赏，遴选为校题；后来又为全国命题小组的专家所欣赏，遴选为国题，是精品中的精品，成为当之无愧的国家级名题．无论从考研角度，还是学习角度，或是教学角度，都值得把它作为数学中的艺术珍品来欣赏，研究，收藏．

编　者

2005年2月8日

于武昌巡司河畔

E-mail：yeshengbiao233@sina.com

一份辛劳一份才

华罗庚

妙算还从拙中来，
愚公智叟两分开．
日久方显愚公智，
发白才知智叟呆．
埋头苦干是第一，
熟能生出百巧来．
勤能补拙是良训，
一份辛劳一份才．

名　题

——研读考研数学的国题、校题有感

名题留芳千万年，
考了一遍又一遍．
熟读名题三百道，
不是神仙也神仙！

需要全本请访问 www.ertongbook.com

目　录

§1　极限…… (1)
§2　导数…… (9)
§3　不定积分 …… (18)
§4　定积分 …… (23)
§5　中值定理 …… (31)
§6　偏导数 …… (43)
§7　二重积分 …… (45)
§8　曲线积分 …… (51)
§9　曲面积分 …… (54)
§10　无穷级数…… (56)
§11　微分方程…… (58)
§12　矩阵…… (66)
§13　线性相关，线性无关，线性方程组…… (67)
§14　特征值与特征向量…… (78)

§1　极限

例 1　(浙江大学 1980,广西大学 1980,成都电讯工程学院 1985,全国 1987 数一)

求正的常数 a 与 b,使等式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{bx-\sin x}\int_0^x \dfrac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt=1$ 成立.

[**考点**]求极限,求积分上限的函数的导数.

[**解答**] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt}{bx-\sin x}$　　$(\frac{0}{0})$

$$\overset{\text{洛必达}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}}{b-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+x^2}}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{b-\cos x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{b-\cos x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}\qquad(\frac{0}{0})$$

$$\overset{\text{洛必达}}{=\!=\!=}\frac{1}{\sqrt{a}}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a}}=1,\therefore a=4,b=1.$$

[**欣赏**]求极限的歌诀为:**强行代入,先定型,后定法**.反复叨念此诀,直至求出极限.本例叨念至 $\dfrac{1}{\sqrt{a}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{b-\cos x}$ 时,b 必为 1.若 $b\neq 1$,则极限为 0,与已知矛盾.

应该说,例 1 就是一道名题.什么是名题?内容与形式结合完美的题谓之名题.一般说来,名题出身于名校、名著、名卷,为读者所欣赏.

例 2　(吉米多维奇 469[①],沈阳机电学院 1979,镇江农机学院 1979,上海化工学院 1979,全国 1990 数二)

已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$,其中 a,b 是常数,则

(A) $a=1,b=1$.　　(B) $a=-1,b=1$.

(C) $a=1,b=-1$.　　(D) $a=-1,b=-1$.

[**考点**]求极限.

① 吉米多维奇 469 是指吉米多维奇编写的《数学分析习题集》上的第 469 题,下同.

[**解答**] $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-1+\dfrac{1}{x+1}-ax-b\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x+1}+(1-a)x-b-1\right)=0$.

根据极限的运算法则,若$1-a\neq 0$,则极限值为∞,而极限值应为零.∴$1-a=0$,$-b-1=0$.∴$a=1$,$b=-1$.选(C).

[**欣赏**]ⅰ)此题实际上是求曲线 $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ 的斜渐近线,斜渐近线为 $y=x-1$.

ⅱ)在现行的参考资料中,几乎全部是这样做的:

由$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}=0$,

应有$\begin{cases}1-a=0,\\ a+b=0,\end{cases}$从而 $a=1$,$b=-1$.

编者以为,$\dfrac{x^2}{x+1}$ 为假分式,应化为真分式,即“假的”变“真的”.在求导数,求积分时,都应“假的”变“真的”,一旦这样,如释重负!

例 3 (一机部出国进修生 1978,中国矿业学院 1979,全国 1987 数二)

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

[**考点**]求极限.

[**解答**] $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$ $(\infty-\infty)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$ $(\frac{0}{0})$

$\overset{\text{洛必达}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}$ $(\frac{0}{0})$

$\overset{\text{洛必达}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{2e^x+xe^x}$

$=\dfrac{1}{2}$.

[**欣赏**]反复叨念求极限歌诀,直至求出极限,轻松愉快!

例 4 (上海化工学院 1979,广西大学 1979,武汉工学院 1979,全国 2000 数四)

若 $a>0$,$b>0$ 均为常数,则$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=$_____.

[**考点**]求极限.

[**解答**]$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=$_____.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}} \qquad (1^\infty)$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}{x}} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{\text{洛必达}} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cdot\frac{1}{a^x+b^x}(a^x\ln a+b^x\ln b)}{1}}$$

$$=e^{\frac{3}{2}\ln(ab)}$$

$$=(ab)^{\frac{3}{2}}.$$

[**欣赏**]一年之内,被三校选中,可见本题的内容与形式为三校的命题专家所欣赏.时至今日,本题早已“下放”当自学考试的题目了!

例 5 (吉米多维奇 525,全国 1989 数三)

求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

[**考点**]求极限.

[**解答**]$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$

$$=\lim_{t\to 0}(\sin t+\cos t)^{\frac{1}{t}} \qquad (1^\infty)$$

$$=\lim_{t\to 0}e^{\ln(\sin t+\cos t)^{\frac{1}{t}}}$$

$$=\lim_{t\to 0}e^{\frac{\ln(\sin t+\cos t)}{t}}$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(\sin t+\cos t)}{t}} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{\text{洛必达}} e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}}{1}}$$

$$=e.$$

例 6 (吉米多维奇 546,北京邮电学院 1979,山东海洋学院 1980,全国 1994 数二)

计算$\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)$.

[**考点**]求极限.

[**解答**]$\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^n$

$\because$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1+\tan\frac{2}{x}}{1-\tan\frac{2}{x}}\right]^x \qquad (1^\infty)$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln\left(\frac{1+\tan\frac{2}{x}}{1-\tan\frac{2}{x}}\right)^x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln\frac{1+\tan\frac{2}{x}}{1-\tan\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{t\to0}\left[\frac{\ln(1+\tan2t)-\ln(1-\tan2t)}{t}\right]}$$

$$= e^{\lim\limits_{t\to0}\left[\frac{\tan2t-(-\tan2t)}{t}\right]} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{4t}{t}} = e^4 . \quad \therefore \text{原式} = e^4 .$$

例 7 （中国科学技术大学 1983，北京邮电学院 1985，全国 1996 数一）

设 $x_1 = 10$，$x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$ （$n = 1,2,\cdots$），试证数列$\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限 .

[**考点**]求数列的极限 .

[**分析**]由 $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$

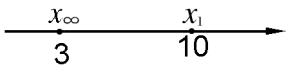
$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6+x_n}$$

$$l = \sqrt{6+l},$$

$$l^2 = 6+l,$$

$$l^2 - l - 6 = 0$$

解得 $l_1 = 3$ $l_2 = -2$(舍去)



例 7 图

$\{x_n\}$ 应为单调下降有界数列 .

[**解答**]先证$\{x_n\}$ 单调下降有下界 .

$x_1 = 10$，$x_2 = \sqrt{6+10} = 4 < x_1$

假 $x_{k-1} > x_k$，

则 $x_k = \sqrt{6+x_{k-1}} > \sqrt{6+x_k} > x_{k+1}$，由数学归纳法知，对一切正整数 n，都有 $x_n > x_{n+1}$.

又 $x_1 = 10 > 3$.

$x_2 = \sqrt{6+10} = 4 > 3$，

假设 $x_k > 3$，

则 $x_{k+1} = \sqrt{6+x_k} > \sqrt{6+3} = 3$.

由数学归纳法知 $x_n > 3$，($n = 1,2,\cdots$).即$\{x_n\}$ 为单调下降有下界的数列，所以有极限，设极限为 l .

由 $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$，

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6+x_n},$$

$$l = \sqrt{6+l},$$

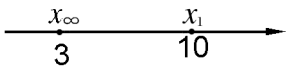
$$l^2 - l - 6 = 0,$$

$l_1 = 3$，$l_2 = -2$(舍去)，

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$.

[**欣赏**]求由递推公式表达的数列的极限的歌诀为:数列极限看两头,看了两头不用愁,单调有界有极限,先求后证两步走.

所谓数列极限看两头,就是看 x_1,看 $x_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.这时$\{x_n\}$的单调性出来了,界出来了,结合本题就是:



$\{x_n\}$ 应单调下降,且以 3 为下界.

若 $x_1 = 2 < 3$.则$\{x_n\}$ 应单调上升,且以 3 为上界.

建议读者,用能进行开方运算的计算器,根据 $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$,由 $x_1 = 10$,计算 $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, \cdots$;由 $x_1 = 2$,计算 $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, \cdots$.用几分钟的时间,极限过程就呈现在计算器的屏幕上,真实,具体,有趣!

例 8 (清华大学 1983,全国 1999 数二)

设 $f(x)$是区间$[0,+\infty)$上单调减少且非负的连续函数.$a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx \quad (n=1,2,\cdots)$

证明数列$\{a_n\}$的极限存在.

[**考点**]单调有界数列有极限(极限存在准则).

[**解答**]由于 $f(x)$在$[0,+\infty)$上单调减少,故有

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k) \qquad (k=1,2,\cdots)$$

因此 $$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left[f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx\right] + f(n) \geqslant 0,$$

即数列$\{a_n\}$有下界,又

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)dx \leqslant 0,$$

即数列$\{a_n\}$单调下降,故由单调有界数列有极限的准则知数列$\{a_n\}$的极限存在.

[**欣赏**]必须将$\int_1^n f(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)dx$,才能与$\sum\limits_{k=1}^{n-1} f(k)$配套,即两个$\sum$配套!

例 9 (全国 1998 数一,北京大学 1999)

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1} + \dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$

[**考点**]两边夹法则,定积分的定义

需要全本请访问 www.ertongbook.com

[**解答**] $\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}<\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{n}\right)$

$=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}$,

而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\dfrac{2}{\pi}$;

另一方面 $\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}>\dfrac{1}{n+1}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{n}\right)$

$=\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}$,

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}\right)=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\dfrac{2}{\pi}$.

所以由两边夹法则,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right]=\frac{2}{\pi}.$$

[**欣赏**] 适当放大,放小,放出定积分的和式!

例 10 (同济大学等八院校 1985,全国 2000 数二)

设函数 $S(x)=\int_0^x|\cos t|\,dt$,

(1) 当 n 为正整数,且 $n\pi\leqslant x\leqslant(n+1)\pi$ 时,证明 $2n\leqslant S(x)<2(n+1)$;

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

[**考点**] 周期函数的定积分性质与两边夹法则.

[**解答**] 由于被积函数 $|\cos t|$ 是周期为 π 的连续函数,所以可将$[0,+\infty)$分为小区间:

$0<\pi<2\pi<3\pi<\cdots<n\pi<(n+1)\pi<\cdots$,

对任意正数 x,一定存在正整数 n 或 0,使得

$n\pi<x<(n+1)\pi$.

(1) 因为 $|\cos x|\geqslant 0$,且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$,所以

$\int_0^{n\pi}|\cos x|\,dx\leqslant S(x)<\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|\,dx$.

又因为 $|\cos x|$ 是以 π 为周期的周期函数,在每个周期上积分值相等,所以

$\int_0^{n\pi}|\cos x|\,dx=n\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx=2n$,

$\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|\,dx=2(n+1)$.

因此当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时,有

$2n\leqslant S(x)<2(n+1)$.

(2)由(1)知,当 $n\pi < x < (n+1)\pi$ 时,有

$$\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}.$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty} \frac{S(x)}{x} = \frac{2}{\pi}.$$

[**欣赏**] $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\cos x|\,dx = 2.$

$$\int_0^{n\pi} |\cos x|\,dx = 2n.$$

由 $n\pi \leqslant x < (n+1)\pi$,

得 $2n \leqslant S(x) < 2(n+1)$.

进而得

$$\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}.$$

再进而使用两边夹法则,环环相扣,生动有趣.但在1985年同济大学等八院校[①]考这道题时,没有出现第(1)题,因而难度很要大一点,因为(1)的结果对(2)是提示,启发.也就是说,这道题目的国题更容易为学生所接受,所理解.

为了让读者更全面地掌握本题,请继续欣赏天津大学1982年的一道考题.

例 11 (天津大学 1982)

设函数 $f(x)$ 是周期为 $T(T>0)$ 的连续函数,证明

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

[**考点**]周期函数的定积分性质与两边夹法则.

[**解答**]因为对任意的 $x>0$,总存在非负整数 n,使

$$nT \leqslant x \leqslant (n+1)T,$$

所以,

(1)当 $f(x)$ 为非负连续函数时,有

$$\frac{1}{(n+1)T}\int_0^{nT} f(t)dt \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \leqslant \frac{1}{nT}\int_0^{(n+1)T} f(t)dt,$$

依 $f(x)$ 的周期性,上面不等式可以写成

$$\frac{n}{(n+1)T}\int_0^T f(t)dt \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \leqslant \frac{n+1}{nT}\int_0^T f(t)dt,$$

而

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{n}{(n+1)T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{n+1}{nT}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt,$$

---

① (同济大学等八院校 1985)

求 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x |\sin t|\,dt}{x}$.

于是有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$$

(2)当 $f(x)$ 为任一连续函数时,若记

$M=\max_{t\in[0,T]}f(t)$,$\varphi(t)=M-f(t)$,

则 $\varphi(t)$ 是以 T 为周期的非负连续函数.对 $\varphi(t)$ 应用(1)的结果,有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x[M-f(t)]\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T[M-f(t)]\,dt.$$

由此推出

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$$

即无论那种情形都有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$$

[**欣赏**]欣赏了上面的两例,实则一例,例10是例11的特例.题史为:天津大学1982⇒同济大学等八院校1985⇒全国2002数二.

应该说例10,例11都是名题.为什么要研究名题?因为:1.国题=普题+名题;2.没有名题的国题是没有水平的国题,而研制一道名题是不容易的,这就必然出现,名题反复考:北大考了清华考,清华考了北大考,北大考了全国考,……;3.数学名题如同文学名著、名诗、名词一样,是一种文化沉淀,是精品,将世代流传.一个人脑子里不装点中外文学名著、名诗、名词,怎么去表现他的文学素质、文学水平?同样地,一个人脑子里不装点中外数学名题,怎么去表现他的数学素质、数学水平呢?因此,收集名题、研究名题、热爱名题就是我们在教学过程中,在考研备考过程中,教师和学生特别要关注的一个重大问题!

§2　导数

例 12　(北京钢铁学院 1981,全国 1987 数二)

设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}$ 等于

$(A)f'(a)$.　　$(B)2f'(a)$.　　$(C)0$.　　$(D)f'(2a)$.

[**考点**]导数的定义.

[**解答**]原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(a+x)-f(a)}{x}+\dfrac{f(a-x)-f(a)}{-x}\right]$

$=f'(a)+f'(a)=2f'(a)$.

所以选(B).

例 13　(西北轻工业学院 1985[①],全国 2003 数三)

设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数,且 $f'(0)$ 存在,则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

(A) 在 $x=0$ 处左极限不存在.　　(B) 有跳跃间断点 $x=0$.

(C) 在 $x=0$ 处右极限不存在.　　(D) 有可去间断点 $x=0$.

[**考点**]函数的极限、导数的定义、间断点.

[**解答**]由 $f(x)$ 奇函数可知,$f(0)=0$.于是,

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}g(x),$$

即 $x\to 0$ 时 $g(x)$ 有极限,但 $x=0$ 时 $g(x)$ 无定义.若补充定义 $g(0)=f'(0)$,则函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 连续.即 $g(x)$ 有可去间断点 $x=0$,故(D)正确,(A),(B),(C) 皆错.

[**欣赏**]已知 $f'(0)$ 存在,一定要用导数的定义,这没有思考的余地.

例 14　(吉米多维奇 960,东北工学院 1979,全国 2004 数四)

设 $y=\operatorname{arc\,tan}e^x-\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$,则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=$ _____.

[**考点**]求复合函数的导数.

[**解答**]$y=\operatorname{arc\,tan}e^x-\dfrac{1}{2}\ln e^{2x}+\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)$

$y=\operatorname{arc\,tan}e^x-x+\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)$.

$y'=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}-1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{e^{2x}\cdot 2}{e^{2x}+1}$

$=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}-1+\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$

---

① (西北轻工业学院 1985)

设不恒为零的奇函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,问 $x=0$ 为函数 $\dfrac{f(x)}{x}$ 的何种间断点?为什么?

$$\therefore y'\Big|_{x=1}=\frac{e}{1+e^2}-1+\frac{e^2}{e^2+1}=\frac{e-1}{e^2+1}$$

[**欣赏**]求导数的歌诀为：

导数定义最重要，
导数公式要记牢，
复函求导要剥皮，
隐函求导直接导.

例 15 （重庆大学 1984，全国 1994 数二）

设 $y=f(x+y)$，其中 f 具有二阶导数，且其一阶导数不等于 1.求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

[**考点**]求隐函数的导数.

[**解答**]应用隐函数求导法则得

$$y'=(1+y')f'$$

所以 $y'=\frac{f'}{1-f'}$.将上式两边对 x 求导得

$$y''=y''\cdot f'+(1+y')^2f'',$$

于是
$$y''=\frac{(1+y')^2f''}{1-f'}=\frac{f''}{(1-f')^3}.$$

[**欣赏**]隐函求导直接导，隐函数的导函数也是隐函数.

例 16 （吉米多维奇 1188[①]，全国 1995 数三）

设 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，则 $f^{(n)}(x)=$ _____.

[**考点**]求高阶导数.

[**分析**]$f(x)$ 为假分式，要化为真分式，即“假的”变“真的”！

[**解答**]$f(x)=\frac{1-x}{1+x}=-1+\frac{2}{1+x}$，

$$f'(x)=2\cdot(-1)(1+x)^{-2},$$
$$f''(x)=2\cdot(-1)(-2)(1+x)^{-3},$$
$$\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(x)=2\cdot(-1)(-2)\cdots(-n)(1+x)^{-(n+1)}$$
$$=\frac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

[**欣赏**]求 y'，y''，…，$y^{(n)}$ 时一定要保留自然的美，发现规律，即可求出 $y^{(n)}$.

例 17 （北京邮电学院 1985，全国 1998 数三，数四）

设曲线 $f(x)=x^n$ 在点(1，1)处的切线与 x 轴的交点为$(\xi_n,0)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$ _____.

---

① （吉米多维奇 1188）

$y=\frac{ax+b}{cx+d}$，求 $y^{(n)}$.

[**考点**]导数的几何意义,数列的极限.

[**解答**]$y=x^n$ 在点(1,1)处的切线为

$$y-1=n(x-1),$$

切线与 x 轴的交点为 $\xi_n=1-\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}f(\xi_n)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e^{-1}.$$

[**欣赏**]此题构思巧妙,把切线与重要极限联系起来.

例 18 (华南农业大学 1985)

如图:AB 平行于 x 轴,与曲线 $y=x^3$ 交点的横坐标为 ξ,试求点 ξ 使曲边三角形的面积之和 S_1+S_2 最小.

[**考点**]面积,一元函数的极值.

[**解答**]$S_1=\int_0^{\xi}(\xi^3-x^3)dx$

$$=\xi^4-\frac{1}{4}\xi^4$$

$$=\frac{3}{4}\xi^4,$$

$$S_2=\int_{\xi}^{3}(x^3-\xi^3)dx$$

$$=\frac{81}{4}-3\xi^3+\frac{3}{4}\xi^4.$$

$$f(\xi)=S_1+S_2=\frac{81}{4}-3\xi^3+\frac{3}{2}\xi^4,$$

$$f'(\xi)=-9\xi^2+6\xi^3=\xi^2(6\xi-9).$$

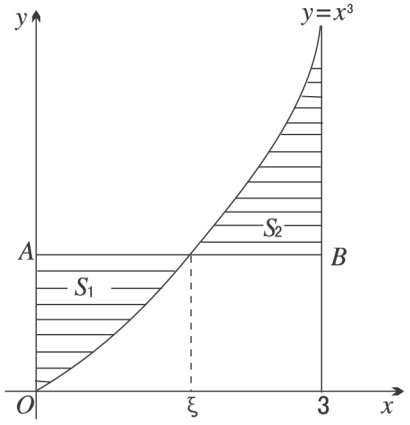
令 $f'(\xi)=0$ 得 $\xi=0$ 或 $\xi=\frac{3}{2}$.

$$f''(\xi)=-18\xi+18\xi^2,$$

$$f''(3/2)=-27+\frac{81}{2}>0$$

$$f(0)=\frac{81}{4}=20.25,\qquad f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{81}{4}-\frac{81}{8}+\frac{243}{32}=17.72,$$

所以当 $\xi=\frac{3}{2}$ 时,S_1+S_2 最小.



例 18 **图**

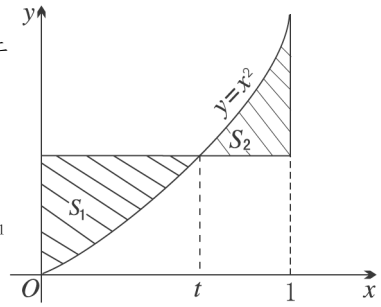
[**欣赏**]此类问题把面积、体积、极值融入一题,简单、直观,易于操作.

例 19 (全国 1987 数四)

设 $y=x^2$,$x\in[0,1]$,问:t 取何值时,图中阴影部分的面积 S_1 与 S_2 之和 S 最小?最大?

[**考点**]面积,一元函数的极值.

[**解答**]$S=S_1(t)+S_2(t)$



例 19 **图**

需要全本请访问 www.ertongbook.com