1985—2006

历年考研数学试题详解

数学（四）

吴振奎　主编

中国财政经济出版社

各年级大学生
最新首选数学辅导书
《北京文登学校辅导系列》简介

北京文登学校是享誉全国的考研辅导学校，自2000年以来全国文理科考研数学状元（满分）连年涌现该校．由中国财经出版社最新出版的《北京文登学校辅导系列》（简称文登系列）丛书，就是北京文登学校校长、中央财经大学享受国务院特殊津贴的陈文灯教授，和其在南开大学数学系同窗吴振奎教授等专家，全面系统总结近40年教学经验和多年考研辅导体会，而编著的最新力作．这无疑是各年级大学生们学好数学，进而在期末考试和考研中得高分的首选辅导书．其中有：

考研数学手册 ……………………………北京文登学校编，定价10元

其特点是：针对不少同学数学考不好的原因在于公式记不住，特意编写了常见的各种公式和一些解题方法．它查阅快捷、携带方便，可帮助同学们记住繁多的公式，节省从厚厚的辅导书或教科书中查阅公式的时间，为各年级同学们数学考高分助上一臂之力．

高等数学解题方法和技巧……………陈文灯、吴振奎、黄惠青编著，定价50元

线性代数解题方法和技巧……………陈文灯、吴振奎、刘舒强编著，定价30元

概率论与数理统计解题方法和技巧…陈文灯、吴振奎、刘舒强编著，定价20元

以上三本“解题方法和技巧”的特点：一是化难为易，广泛使用表格，使有关内容、解题方法和技巧一目了然；二是化繁为简，从题海中归纳、总结出的题型和解法，具有简明的典型指导作用；三是攻克重点、难点，用系列专题分析来讲解教材的重点、难点，对读者掌握有关知识能起到事半功倍的效果；四是同步辅导，可供各年级大学生与课程同步学习和复习使用，不仅能使学习困难的同学受益匪浅，而且能使学习较好的同学更加优秀，以至考研和竞赛能得高分和满分．

高等数学复习纲要 ……………………吴振奎编著，定价10元

其特点是：价格低而质量高，首次构建了本学科的知识网络，可使读者将各知识点融会贯通，提高综合利用已有知识来分析和解决新问题的能力．

经过长期研究考研数学试题和多年文登学校的考研辅导，吴振奎教授又有以下新书问世：

历年考研数学试题详解（全四册）…吴振奎主编，定价60元

全书包括数学一、数学二、数学三、数学四，平均每册仅15元，价格低而质量高，亦深受广大读者欢迎．

其特点是：通过详解历年数学一、二、三、四试题的范例，帮助读者了解重点，突破难点，把握考点，从而有能力解答各种新试题，很好地适应了各年级大学生复习、迎试、竞赛和考研的需要．

目　　录

前　言

为帮助我国大学生学好数学，本书汇编了1987年以来硕士研究生招生全国统考试题及其详解的参考答案.应该申明的是：书中给出的解答，也许不是最简的，但从中可以了解重点，突破难点，把握考点，它至少是很好地适应了同学们复习、迎试、竞赛和考研的需要.

全书按不同专业招生的试题，共分为数学（一）、数学（二）、数学（三）、数学（四）等四个分册.书末还附录了全国硕士生招生统考前两年（即1985年和1986年）部分院校联合命题的试卷及参考答案，从中也可看出考研数学试卷不断演化与完善的历程.

俗说“温故知新”，历史也许不会重复，但考试却不然，几年、十几年前的题目，又会被改头换面地拿出来，甚至原封不动地“克隆”.了解这些看上去也许有些“陈旧”的试题，细细品味，有时仍感新鲜、别致，不信就请查一查近年的考卷，你总会有“似曾相识”之感，因为正如后文所说：数学内容就那么多，好的试题也就那么一些.这恰似时尚的流行，一个周期下来，便是旧时尚的复制与翻版（当然不是简单的重复）.

学好数学除了要“做”题外，还要会“读”题，可以毫不夸张地说：对绝大多数人来讲，做数学只是一种模仿或类比，能有发现、创新者实在廖廖，既便是对于以数学为职业的人士.

这样对考研题乃至竞赛题的了解与赏析，往往会使我们开阔眼界、打通思路，因为这些题目中的匠心、立意、解法、技巧，不仅使我们阅后会有茅塞顿开之感，有时更会让我们恍然大悟，甚至大吃一惊，啊哈！原来如此.

看来，了解历年考研试题中的动向，学会解题方法，掌握必要技巧，对我们的复习应考关系重大.而学会分析、梳理、归类、总结，更是立于不败之地的重要法宝.

从1978年起，国家开始恢复研究生招生工作，这无疑给各路学子们提供了一个继续深造的极好契机.

由于大多数理工类和某些文科类（如经济、管理等）专业对于数学的需求日深，“高等数学”便成为一门重要的考试科目.起初，试卷由各院校自行命题.由于这些试卷水平难易不一，这往往给研究生录取工作带来了一定的困难（标准无法统一），特别是当考生需要进行院校乃至专业调剂时.

1985年，上海交大、天津大学、浙江大学等八院校率先采取联合命题，同时同济大学、上海海运学院、上海工业大学等八校也采用联合命题方式；1986年上海交大、天津大学、浙江大学等联合命题院校扩大到了十所（使用该试卷的院校不止它们），且以此方式联合命题的院校越来越多.

从1987年起，国家教委决定全国高校工学各专业、经济学部分专业硕士研究生招生中，数学考试进行全国统一命题，理、医、农、管各专业，一般亦由招生院校按专业性质，选用相应的试题种类.当时试题共分五套，分别称为数学（一）、数学（二）、数学（三）、数学（四）和数学（五），各类试题包含的数学科目大体如下表所列：

类　型	试卷包含科目
数学(一)	微积分、线性代数;此外概率论与复变函数任选一门
数学(二)	微积分、线性代数
数学(三)	微积分
数学(四)	微积分、线性代数、概率论
数学(五)	微积分、线性代数、概率论

考试题型为填空题、选择题、判断题(仅数学(四)、数学(五)有此题型,且于1990年以后取消)和计算与证明题.

每份试卷填空、选择题各约4～5道,计算、证明题10道左右;1990年以后各试卷填空、选择题各5道,计算、证明题8道或10道(数学(二)、数学(三)8道,数学(一)、(四)、(五)为10道).

下表给出当时五套试题所适用的专业范围:

类　型	适用的招生专业
数学(一)	力学、仪器仪表、动力机械及工程热物理、电工、电子学及通信、计算机科学与技术、自动控制、管理工程、船舶、原子能科学与技术、航空与宇航技术、兵器科学与技术.
数学(二)	机械设计与制造、金属材料、土壤、水利、测绘、非金属材料、化学工程和工业化学、地质勘探、矿业石油、铁道、公路、水运等,以及建筑学、纺织、轻工、林业工程和技术科学史几个学科中对数学要求较高的专业.
数学(三)	建筑学、纺织、轻工、林业工程和技术科学史几个学科中对数学要求较低的某些专业.
数学(四)	国民经济计划和管理(含经济系统分析)、工业经济、运输经济、基本建设经济、技术经济、工业企业管理、统计学、数量经济学.
数学(五)	农业经济、商业经济、物资经济、国际贸易、劳动经济、农业企业管理、商业企业管理、财政学、货币银行学(含保险)、国际金融、会计学.
注　记	政治经济学、世界经济、经济地理学三个专业是否选用统考试题,由招生单位自定.

1997年,国家考试中心据1996年重新修订的全国工学、经济学硕士研究生入学考试《数学考试大纲》,对数学试卷内容和卷种作了调整:

调整前试卷编号	调整后试卷编号	试卷包含的科目
数学(一)、(二)	合并为数学(一)	微积分、线性代数、概率论(含数理统计)
数学(三)	改为数学(二)	微积分、线性代数
数学(四)	改为数学(三)	微积分、线性代数、概率论(含数理统计)
数学(五)	改为数学(四)	微积分、线性代数、概率论

调整后题型仍为三大类:填空题、选择题和计算、证明题(包括综合和应用题).试题总量为21道左右,填空、选择题各5～6道,计算、证明题9～10道.主、客观性试题在试卷中所占分数

比例约为 7∶3.

试卷命题原则为：以考查数学基本概念、基本方法和基本原理为主，在此基础上加强对考生运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想象能力和综合运用所学知识解决实际问题能力的考查.具体地讲，填空题以考查基本概念、基本方法和基本原理为宗旨，一般无大的计算和证明，难度中等；选择题主要考查考生对数学基本概念、性质的理解，能通过简单计算、推理、判断和比较，作出正确选择；计算、证明题（综合题）则是对考生运算、推理、抽象、概括、逻辑思维、综合（各学科分支的有机结合），以及实际应用能力（结合考生报考的具体专业所具有的共性相关背景知识）的全面考查.

另外，各试卷种类中诸学科分支内容所占比例大致为下表：

试卷种类	学科分支所占试卷题目分数比例		
	微积分	线性代数	概率论
数学（一）	60%	20%	20%
数学（二）	80%	20%	0%
数学（三）	50%	25%	25%
数学（四）	50%	25%	25%

由于数学在各学科研究中的重要地位，为增加数学在考试中的权重，从 2003 年起，数学试卷卷面总分为 150 分.填空、选择各 6 道，计算、证明题 10 题；2004 年试卷中，填空、选择题各 6 道，计算、证明题 11 道.

考研辅导专家们曾对报考研究生的考生提出过忠告，且给出了“法宝”（或经验），数学复习应采取的方法是：一是认真领会掌握基本概念；二是看、做考研真题；三是多动手训练（做题）.

对于如何看、做考研试题我们想说几句，之前，除了复习好必要的基础知识外，还要了解、掌握一些解题思想与方法.数学解题中有一个重要的思想即化归与转化.其实说穿了，解数学题就是将未知（或要求、要证）的结论，转化为（或利用）已知结论的过程，这种转化不仅贯穿数学解题过程的始终，也贯穿数学自身发展的始终.在演算数学问题时，如果你能从中找出这种转化关系，乃至能将一类问题之间的联系看清、摸透，你的解题能力和技巧将会大有提高，因为你此时至少已经掌握了这一类问题（而非一道问题）的解法.要做到这一点，重要的是要对各类试卷去做综合、分析、比较，看看能否找到规律性的东西.各种数学试卷难免会有交叉、重复，再者也要注意问题的演化规律.

这里想以下面一道行列式计算为例，看看近年来这类问题在考研试题中的演化及变形.

1997 年数学（四）中（以下简记如（1997④），余类同）有问题（填空题）：

问题★　（1997④）设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{A}|=$______.

其实它是行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & \cdots & b & b \\ b & b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a & b \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix} \tag{*}$$

或它的推广

$$\tilde{D}=\begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_{n-1} & b \\ c & c & c & \cdots & c & a_n \end{vmatrix} \tag{**}$$

或其他变形的特例.

该行列式及它的衍生或变形是线性代数中较典型的一类,其计算方法有四五种之多.此前或尔后的试题中与该行列式计算有关的命题很多,比如:

1.涉及矩阵运算的问题

问题1:(1993④)已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,试求其伴随矩阵的逆.

它的变形或引申问题是:

问题2:(2003③)设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$,若 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵的秩为1,则必有　　(　　)

(A) $a=b$ 或 $a+2b=0$　　(B) $a=b$ 或 $a+2b\neq0$

(C) $a\neq b$ 且 $a+2b=0$　　(D) $a\neq b$ 且 $a+2b\neq0$

问题再推广或引申:

问题3:(2001①)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$,且秩 $r(\boldsymbol{A})=3$.则 $k=$______.

该命题的又一次引申或推广形式为(从3阶、4阶,终于推广到了 n 阶的情形,如果从命题年份上看,前者例是后者的特例):

问题4:(1998③)设 n $(n\geqslant3)$ 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a & a \\ a & 1 & a & \cdots & a & a \\ a & a & 1 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 & a \\ a & a & a & \cdots & a & 1 \end{pmatrix},$$

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$，则 a 必为　(　)

(A) 1　(B) $\dfrac{1}{1-n}$　(C) -1　(D) $\dfrac{1}{n-1}$

2. 涉及方程组的问题

问题 5：(1989③) 齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0.\end{cases}$$

仅有零解，则 λ 应满足的条件是______.

显然，该方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$.

而下面的问题则与问题 5 几乎无异，只不过由齐次方程组改变成非齐次方程组而已.

问题 6：(1997②) 设方程组 $\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$ 有无穷多组解，则 $a=$______.

问题 7：(1995④) 对于线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2.\end{cases}$$

讨论 λ 取何值时，方程组无解、有惟一解和无穷多组解. 在方程组有无穷多组解时，试用其导出组的基础解系表示全部解.

此问题是前面问题的再度引申或推广（变形），下面的问题终于将方程组从 3 元推广到了 n 元（相应的行列式或矩阵也由 3 阶推广到 n 阶）.

问题 8：(2002③) 设齐次线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n=0,\\ bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_n=0.\end{cases}$$

其中 $a\neq0$，$b\neq0$，$n\geqslant2$. 试讨论 a，b 为何值时，方程组仅有零解、有无穷多组解？在有无穷多组解时，求出其全部解，并用基础解系表示全部解.

显然方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b & b & \cdots & b\\ b & a & b & \cdots & b\\ b & b & a & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & b & \cdots & a\end{pmatrix}$，问题的实质是将它可化为计算 $|\boldsymbol{A}|$ 即计算前面行列式 (*) 的问题.

问题再次引申即为下面的试题：

问题 9：(2003③) 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0.\end{cases}$$

其中$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq 0$.试讨论$a_1,a_2,\cdots,a_n$和$b$满足何种关系时：

(1)方程组仅有零解；

(2)方程组有非零解.在有非零解时,求此方程组的一个基础解系.

显然它是问题8的变形,容易看出,这个问题虽是求解线性方程组,但其关键仍是要计算行列式(它们是行列式(**)的引申)

$$|A|=\begin{vmatrix}a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b\end{vmatrix}=b^{n-1}\left(b+\sum_{i=1}^{n}a_i\right).$$

接下来的问题几乎与上面的问题无异(或者视为它的特例).

问题10：(2004①)设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0.\end{cases}$$

$(n\geqslant 2)$试问a取何值时,该方程组有非零解,并求出其通解.

显然,这也是要考虑方程组系数矩阵或其行列式

$$A=\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{pmatrix},$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ 3 & 3 & 3+a & 3\vdots & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{vmatrix}=\left[a+\frac{n(n+1)}{2}\right]a^{n-1}.$$

注意该问题只是问题9的特例或变形而已(注意它们的系数矩阵间转置关系).

显然2004年数学(二)中的问题只是上面问题10的特例情形(对于数学(二)和数学(四)试卷而言,常有与之类同的情形,比如同年份试卷中,数学(二)、(四)中的某些题目往往是数学(一)、(三)中某些问题的简化或特例情形,但其解题思想是类同的).

问题　(2004②)设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+2x_3+2x_4=0,\\ 3x_1+3x_2+(3+a)x_3+3x_4=0,\\ 4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0.\end{cases}$$

试问 a 取何值时,该方程组有非零解,并求出其通解.

3.涉及矩阵特征问题

问题 11:(1992④)矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ 的非零特征值是______.

注意到 $|A-\lambda\boldsymbol{I}|=\det\begin{pmatrix}1-\lambda&1&1&1\\1&1-\lambda&1&1\\1&1&1-\lambda&1\\1&1&1&1-\lambda\end{pmatrix}$,它亦化为前述行列式(*)的计算.

这个问题稍稍推广又出现在了 1999 年数学(一)试题中.请看:

问题 12:(1999①)设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素全为 1,则 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值是______.

显然该问题是问题 11 的推广(由 4 阶推广至 n 阶),当然关键还是计算行列式(*).

五年之后,同样的问题(只是稍加推广与引申)又出现在了 2004 年数学(三)试卷中.

问题 13:(2004③)设 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&b&\cdots&b\\b&1&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(Ⅱ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

其实它的解答无非还是计算行列式(*)而已.我们简单回顾或复述一下这个问题的解法.讨论 b 的取值:

(1)当 $b\neq0$ 时,考虑

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-b&\cdots&-b\\-b&\lambda-1&\cdots&-b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-b&-b&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix}=[\lambda-1-(n-1)b][\lambda-(1-b)]^{n-1},$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1+(n-1)b$,$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1-b$.然后再解线性方程组求解特征向量.

(2)当 $b=0$ 时,则由

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda-1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^n,$$

知 A 的特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=1$,此时任意非零向量均为其特征向量.

4.涉及二次型问题

熟悉了上面诸问题,下面的问题你当然不会感到陌生.

问题 14:(2001①)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$　　(　　)

(A)合同且相似　　(B)合同但相似

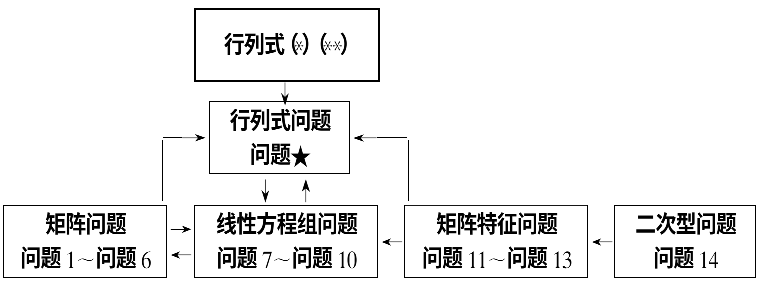
(C)不合同但相似　　(D)不合同且不相似

问题显然是要讨论它们的特征值情况,因而最终还是化归计算.

$$|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix},$$

进而解 $|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}|=0$ 的问题.

至此我们已经看到了上述诸问题与我们介绍的行列式(*)与(**)间的关系,这也可从下图中看得更为清晰(这里→表示转化关系):



这样一来,如果再遇到这类问题,不管它以何形式或面目出现,你总不会感到陌生、感到无从下手了,这对于各种考试(不仅仅是考研)来讲,还有何愁?

我们再从另一角度看看一道考研不等式问题演化的历程.

全国硕士研究生入学考试 1993 年数学(二)试卷中有这样一道题目:

问题1:设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上有连续导数,且 $f(0)=0$.试证 $\left|\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\dfrac{Ma^2}{2}$,这里 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}|f'(x)|$.(1993②)

它的证明不很难,比如有下面证法:

证 1:　任取 $x\in(0,a]$,由微分中值定理

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)x,\ \xi\in(0,x).$$

又由 $f(0)=0$,则 $f(x)=f'(\xi)x$,$x\in(0,x)$.故

$$\left|\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^a f'(\xi)\,x\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^a |f'(\xi)|\,x\,\mathrm{d}x \leqslant M\int_0^a x\,\mathrm{d}x = \frac{M}{2}a^2.$$

证 2： 设 $x\in(0,a]$，由 $f(0)=0$，知

$$\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(0) = f(x).$$

令 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}|f'(x)|$，由积分性质及题设有

$$|f(x)| = \left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M\int_0^x M\mathrm{d}t = Mt,$$

故
$$|f(x)| = \left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^a Mx\,\mathrm{d}x = \frac{M}{2}a^2.$$

该问题其实只是下面一个较为经典问题的特例而已，这个问题是：

问题 2：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=0$. 试证

$$\frac{2}{(b-a)^2}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \max_{x\in[a,b]}|f'(x)|.$$

仿照上面的解法不难证得该问题. 下面再给出一个较为新颖的证法：

证： 由积分性质且注意到 $f(a)=0$ 有 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$，$a\leqslant x\leqslant b$.

故
$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b\int_a^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&\leqslant \max_{x\in[a,b]}|f'(x)|\left|\int_a^b (x-a)\,\mathrm{d}x\right. \\
&= \max_{x\in[a,b]}|f'(x)|\cdot\left.\frac{(x-a)^2}{2}\right|_a^b \\
&= \max_{x\in[a,b]}|f'(x)|\cdot\frac{(b-a)^2}{2}.
\end{aligned}$$

即要证不等式成立. 与题 2 类似的问题还有：

问题 3：设 $f(x)$ 的一阶导数在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)=0$，则

$$\max_{x\in[a,b]}|f'(x)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

这里题目的条件中多了一个 $f(b)=0$ 的条件，如此一来它的结论稍有加强.

证： 若 $x\in(a,b)$，在 $[a,x]$ 及 $[x,b]$ 上对 $f(x)$ 应用 Lagrange 中值定理有

$$f(x)-f(a)=f'(\xi_1)(x-a),\quad a<\xi_1<x, \qquad ①$$

$$f(x)-f(b)=f'(\xi_2)(x-b),\quad a<\xi_2<b, \qquad ②$$

又 $f(a)=f(b)=0$，由 $f'(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，故 $|f'(x)|$ 在 $[a,b]$ 上亦连续，则 $|f'(x)|$ 必有最大值 M，即

$$|f'(x)| \leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)| = M.$$

再由式 ①，② 有 $|f'(x)|\leqslant M(x-a)$，$|f'(x)|\leqslant M(b-x)$.

故
$$\begin{aligned}
\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x &= \frac{4}{(b-a)^4}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\right] \\
&\leqslant \frac{4}{(b-a)^2}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)\,\mathrm{d}x\right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{4M}{(b-a)^2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2+\frac{1}{2}\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]$$
$$= M = \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|.$$

当然它（问题3）的特例情形是：

问题4：设函数 $f(x)$ 的一阶导数在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)=0$. 试证明

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{4}\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|.$$

证： 对于积分计算可先凑微分，再用分部积分，这样可有

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\right]_0^1-\int_0^1 f'(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=-\int_0^1 f'(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x,$$

而

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x$$
$$=\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|,$$

故

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{4}\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|.$$

问题3的另外变形是一道原苏联大学生数学竞赛题：

问题5：函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，又 $f'(a)=f'(b)=0$. 试证在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 满足 $|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

证： 由 $f(x)$ 在 $c=\frac{a+b}{2}$ 点 Taylor 展开且注意到 $f'(a)=0$，可有

$$f(c)=f(a)+f'(a)\cdot(c-a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(c-a)^2$$
$$=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{8}(b-a)^2\quad(a<\xi_1<c),$$

又

$$f(c)=f(b)+f'(b)\cdot(c-b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(b-a)^2$$
$$=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{8}(b-a)^2\quad(c<\xi_2<b),$$

故

$$|f(b)-f(a)|=\frac{1}{2}(b-a)^2|f''(\xi_2)-f''(\xi_1)|$$
$$\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2[|f''(\xi_2)|+|f''(\xi_1)|]$$
$$\leqslant\frac{1}{4}(b-a)^2|f''(\xi)|,$$

即

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

其中 $|f''(\xi)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$.

问题6：设函数 $f(x)$ 的二阶导数连续，且 $f(0)=f(1)=0$，又 $\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1$，试证

$\max\limits_{x\in[0,1]} f''(x) \geqslant 8.$

证：设 $f(x)$ 在 a 处取得最小值，显然 $a\in(0,1)$.

则　$f'(a)=0$，$f(a)=-1$. 依 Taylor 公式有（式中 ξ 在 x, a 之间）

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-a)^2=-1+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-a)^2.$$

因　$f(0)=f(1)=0$，　故　当 $x=0, x=1$ 时：

$$0=-1+f''(\xi_1)\cdot\frac{a^2}{2}, \Rightarrow f''(\xi_1)=\frac{2}{a^2}.$$

$$0=-1+f''(\xi_2)\cdot\frac{1}{2}(1-a)^2, \Rightarrow f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-a)^2}.$$

故　$a<\frac{1}{2}$ 时，$f''(\xi_1)>8$；$a\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$f''(\xi_2)\geqslant 8$. 即知 $\max\limits_{x\in[0,1]} f''(x)\geqslant 8.$

注：下面的问题是本例的变形或对偶问题：

设函数 $f(x)$ 的二阶导数连续，且 $f(0)=f(1)=0$，又 $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)=2$. 试证 $\min\limits_{x\in[0,1]} f''(x)\leqslant -16.$

问题 3 的另外变形或引申可见（它曾作为北方交通大学 1994 年大学生数学竞赛题）：

问题 7：若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$. 又 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)\neq 0$. 试证 $\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geqslant 4.$

证：记 $M=|f(x_0)|=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$，在区间 $[0,x_0]$ 和 $[x_0,1]$ 上分别对 $f(x)$ 使用微分中值定理，有

$$f(x_0)=f'(\xi_1)x_0,\quad 0<\xi_1<x_0,$$

及

$$-f(x_0)=f'(\xi_2)(1-x_0),\quad x_0<\xi_2<1.$$

则

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{M}\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{|M|}\left[\int_0^{x_0}|f''(x)|\mathrm{d}x+\int_{x_0}^1|f''(x)|\mathrm{d}x\right]$$

$$\geqslant\frac{1}{|M|}\left|\int_{2\xi_1}^{\xi_2}f''(x)\mathrm{d}x\right|=4.$$

作为 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|$ 下界的对偶问题可有（它是上海交通大学 1991 年大学生数学竞赛题）：

问题 8：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，试证 $\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x\geqslant\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|.$

证：由设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也连续，从而有 $x_0\in[a,b]$，使 $|f(x_0)|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|.$

又由积分中值定理有　$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)$，　$\xi\in[a,b]$，故

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x=|f(\xi)|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x$$

$$\geqslant|f(\xi)|+\left|\int_\xi^{x_0}f'(x)\mathrm{d}x\right|=|f(\xi)|+|f(x_0)-f(\xi)|$$

$$\geqslant|f(\xi)-f(x_0)-f(\xi)|=|f(x_0)|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|.$$

当然问题还可写如：

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|\leqslant\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|+\int_a^b|f'(x)|\,\mathrm{d}x,$$

只须注意到 $\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$ 即可.

这样与题 2 结合可有不等式（注意到 $f(a)=0$）：

$$\frac{2}{(b-a)^2}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|\leqslant\left|\frac{f(b)}{b-a}\right|+\int_a^b|f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

作为题 8 的特例或引申便是研究生入学考试 1996 数学（一）的题目：

问题 9：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且满足条件 $|f(x)|\leqslant a$，$|f''(x)|\leqslant b$，其中 a，b 都是非负常数，c 是 $(0,1)$ 内任意一点. 证明 $|f'(c)|\leqslant 2a+\frac{b}{2}$.（1996①）

证： 由上面一阶泰勒公式，分别令 $x=0$ 和 $x=1$，则有

$$f(0)=f(c)-f'(c)c+\frac{f''(\xi_1)}{2!}c^2,\quad 0<\xi_1<c<1,$$

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2,\quad 0<c<\xi_2<1.$$

两式相减得

$$f(1)-f(0)=f'(c)+\frac{1}{2!}[f''(\xi_2)(1-c)^2+f''(\xi_1)c^2].$$

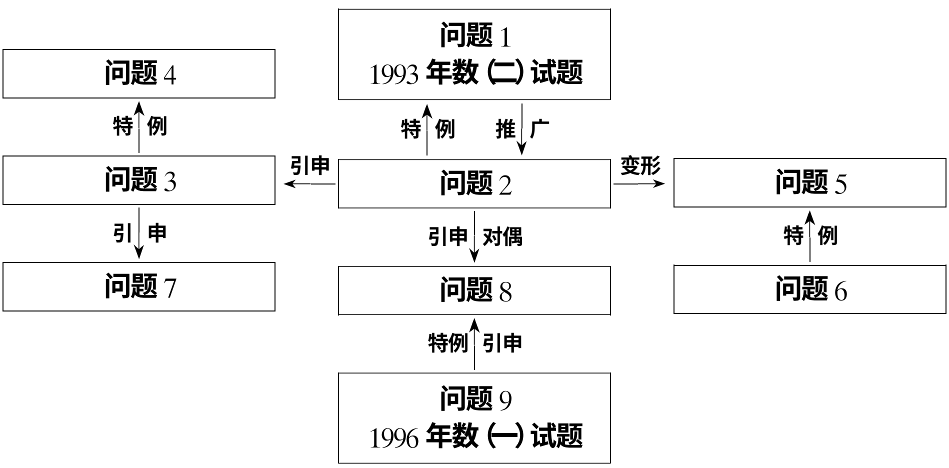
因此

$$|f'(c)|\leqslant|f(1)|+|f(0)|+\frac{1}{2}|f''(\xi_2)|(1-c)^2+\frac{1}{2}|f''(\xi_1)|c^2$$

$$\leqslant a+a+\frac{b}{2}[(1-c)^2+c^2].$$

又因 $c\in(0,1)$，有 $(1-c)^2+c^2\leqslant 1$，故 $|f'(c)|\leqslant 2a+\frac{b}{2}$.

由上我们已经看出这些问题间的内在联系：



搞清这些问题之间的关联，从中不仅可以学会掌握解这类问题的方法，更重要的可以看清这些问题彼此间是如何联系及转化的，如前所言解数学问题就是将未知转化为已知的过程. 此外弄清这些关系，也可看透拟题者的匠心与立意，因为特例、推广、引申和对偶也是拟造数学命题的重要手段和方法.

本书由《历年考研数学试题详解》编写组专家编写，执笔为吴振奎教授。在全书的编写过程中，北京文登学校提供了极为宝贵的资料，中国财政经济出版社给予了大力支持，谨在此一并表示诚挚的谢意.

编　者

于 2006 年 4 月