21 世纪高等学校数学辅导教材

概 率 论 与 数 理 统 计

全程 学·练·考

(浙江大学·概率论与数理统计第三版)

赵衡秀　编著

东北大学出版社

沈　阳

赵衡秀 2003

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计全程学·练·考 / 赵衡秀编著 .— 沈阳 : 东北大学出版社，2003.3

(21 世纪高等学校数学辅导教材)

ISBN 7-81054-837-9

Ⅰ. 概… Ⅱ. 赵… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 004605 号

出 版 者：东北大学出版社

地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编：110004

电话：024—83687331（市场部） 83680267（社务室）

传真：024—83680180（市场部） 83680265（社务室）

E-mail: neuph @ neupress.com

http: //www.neupress.com

印 刷 者：沈阳市昌通彩色印刷厂

发 行 者：新华书店总店北京发行所

幅面尺寸：140mm×203mm

印　　张：13.25

字　　数：429 千字

出版时间：2003 年 3 月第 1 版

印刷时间：2003 年 3 月第 1 次印刷

印　　数：1～5000 册

责任编辑：郭爱民　张德喜　　　责任校对：文　韬

封面设计：唐敏智　　　责任出版：秦　力

定　　价：16.00 元

前　言

《概率论与数理统计（浙大·第三版）全程学·练·考》是一本学习与复习大学数学中“概率论与数理统计”的辅导教材．主要是为大学非数学专业本科生与全国硕士研究生入学统一考试应试者系统地复习“概率论与数理统计”内容，以求巩固提高所学知识，取得良好的考试成绩而编写的．在选材原则与教学要求上，该书是根据原国家教委组织制定的《全国普通高等学校工科本科专业教学计划》中的“概率论与数理统计课程教学基本要求”以及由教育部制定的2003年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲中“概率论与数理统计”部分的考试要求而编写的．

本书是编著者根据数十年的教学经验，依据对课程内容的研究和理解，并在综合分析学生认识规律的基础上而编写的．

本书的结构特点是，首先指出各章节教学要求、考研要求以及各章节内容的重要知识点、难点和考点，然后就概率论与数理统计的基本概念和基本方法，向读者提供大量有价值的具有典型意义的例题、练习题以及考场模拟题．

本书从国内外多种有关概率论与数理统计的教材及参考书中选取了众多具有代表性的典型例题，并精选了十几年来全国硕士研究生入学统考试题（包括数学一和数学三）．对这些典型例题进行详尽的解题思路分析和方法技巧上的指导．这对于读者深刻理解有关的基本概念，灵活运用基本方法，培养和提高综合分析问题和解决问题的能力等诸多方面定会有极大的裨益．

练习题部分是对教材（浙大·第三版）各章节后面的习题的全部解答，包括最后的部分选作习题，便于读者学习教材时分析、对照和检查．

全书集各部分章节的典型例题、练习题、全真模拟题共计约650道题．

本书的编写工作得到了东北大学出版社有关同志的大力支持，他们为本书的编写提出了许多好的建议，并为全书的编审作出了大量出色的工作，这里向他们表示衷心的感谢．

限于编者水平及撰稿时间仓促，对书中的疏漏及错误，敬请读者批评指正．

赵衡秀

2002年12月

于清华园

目　　录

第一章　概率论的基本概念

● 一　教学要求·考研要求 ●

(一) 大学本科教学基本要求

1．理解随机事件的概念，了解样本空间的概念，掌握事件之间的关系与运算．

2．理解事件频率的概念，了解概率的统计定义．

3．理解概率的古典定义，会计算简单的古典概率．

4．了解概率的公理化定义．

5．掌握概率的基本性质及概率加法定理．

6．理解条件概率的概念，掌握概率的乘法定理，了解全概率公式和贝叶斯(Bayes)公式．

7．理解事件的独立性概念，掌握伯努利(Bernoulli)概型和二项概率的计算方法．

(二) 全国硕士研究生入学统一考试数学中概率论与数理统计部分(数学一，数学三) 的考试要求

1．了解样本空间(基本事件空间)的概念，理解随机事件的概念，掌握事件的关系与运算．

2．理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质，会计算古典型概率和几何型概率，掌握概率的加法公式、乘法公式、减法公式、全概率公式，以

及贝叶斯公式.

3.理解事件的独立性的概念,掌握用事件独立性进行概率计算;理解独立重复试验的概念,掌握计算有关事件概率的方法.

● 二 知识点·难点·考点 ●

(一) 知识点

1.随机试验、样本空间、随机事件

(1) 随机试验

满足下列三个特点的试验称为随机试验,用 E 表示.并可简称为试验.

① 试验可以在相同条件下重复地进行;

② 每次试验的可能结果不止一个,并且事先可以明确试验的所有可能结果;

③ 在进行一次试验之前不能确定会出现哪一个结果.

(2) 样本空间

试验的所有可能结果所构成的集合,称为该试验的样本空间,记作 Ω.样本空间上的每个元素,即 E 的每个结果,称为样本点(或基本事件).

(3) 随机事件

在一次试验中可能发生也可能不发生,而在大量的重复试验中具有某种规律性的试验结果,称为随机事件,简称事件.

通常,事件是样本空间的一个子集.在试验中,当且仅当事件 A 所包含的某个样本点出现时,事件 A 才发生.

(4) 事件间的关系和运算

① 事件之间的四种关系,见表1-1.

② 事件之间的三种运算,见表1-2.

③ 事件的运算法则.

交换律:$A\cup B=B\cup A$,$AB=BA$.

结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(AB)C=A(BC)$.

分配律:$A(B+C)=AB+AC$,$AB\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$.

德·摩根律(对偶律):$\overline{A\cup B}=AB$,$\overline{AB}=A\cup B$.

表 1-1　　事件之间的四种关系

关　系	符　号	概率论	集合论
包含关系	$A \quad B$	事件 A 发生必有事件 B 发生	A 是 B 的子集
相等关系	$A = B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
互斥(或互不相容)关系	$AB =$ ě	事件 A 与事件 B 不能同时发生	A 与 B 无公共元素
对立关系	A	事件 $A = \{A$ 不发生$\}$是 A 的对立事件	A 的余集

表 1-2　　事件之间的三种运算

运　算	符　号	概率论	集合论
事件的和(并)	$A \cup B$(或 $A + B$)	事件“A 与 B 至少有一个发生”	A 与 B 的并集
	$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$	事件“$A_1, \cdots, A_n$ 至少有一个发生”	$A_1, \cdots, A_n$ 的并集
事件的和(交)	$A \cap B$(或 AB)	事件“A 与 B 同时发生”	A 与 B 的交集
	$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$	事件“$A_1, \cdots, A_n$ 同时发生”	$A_1, \cdots, A_n$ 的交集
事件的差	$A - B$(或 AB)	事件“A 发生而 B 不发生”	A 与 B 的差集

2. 事件的概率

(1) 概率的定义

① 概率的统计定义.

在不变的一组条件 S 下，把试验 E 重复 n 次，记 n_A 为 n 次试验中事件 A 发生的次数. 当试验次数 n 很大时，如果频率 n_A/n 稳定地在某一数值 p 的附近摆动，而且一般说来随着试验次数的增多，这种摆动的幅度越来越小，则称 A 为随机事件，并称数值 p 为事件 A 在条件组 S 下发生的概率，记作 $P(A) = p$.

② 概率的古典定义.

古典概型试验　设试验只有有限个可能结果，且每个结果出现的可能性都相同，具有这两个特点的试验称为古典概型试验，简称古典概型.

古典概率的定义　设一个试验 E 有 N 个等可能的结果，而事件 A 恰包含其中的 M 个结果，则事件 A 的概率记为 $P(A)$，定义为

$$P(A) = \frac{M}{N}.$$

③ 概率的几何定义.

几何概型试验　具有如下特点的试验称为几何概型试验：样本空间 Ω 是一个几何区域；每个试验结果出现的可能性是相同的(即试验结果落在 Ω 中任一区域的可能性与该区域的几何测度成正比，其中几何测度可以是长度、面积或体积).

几何概率定义　若试验 E 的样本空间 Ω 为区域 G，G 的长度(或面积等)为 D，事件 A 为"随机点落入区域 g 内"，g 的长度(或面积等)为 d，则定义事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{d}{D}.$$

④ 概率的公理化定义.

设 E 是一个随机试验，Ω 为其样本空间，以 E 中所有事件组成的集合为定义域，对于其中的任一事件 A，规定一个实数 $P(A)$，如果 $P(A)$ 满足下列三个公理：

(i) 对任一事件 A，有 $0\leq P(A)\leq 1$；

(ii) $P(\Omega)=1$，$P($ě$)=0$；

(iii) 如果事件 A_1，A_2，…两两互斥，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

则称 $P(A)$ 是事件 A 的概率.

【注】概率的前三个定义，均可理解为概率的公理化定义的特例.

⑤ 条件概率的定义.

设 A 与 B 是两个随机事件，而 $P(B)>0$，则"在给定 B 发生的条件下 A 发生的条件概率"，记为 $P(A|B)$，定义为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

在同一条件下，条件概率具有概率的一切性质.

(2) 概率的基本性质

① 概率的有限可加性.

若事件 A_1，A_2，…，A_n 两两互斥，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

② 求逆公式.

以 A 表示 A 的对立事件，则

$$P(A)=1-P(A).$$

③ **求差公式**.

若 $A \quad B$, **则** $P(A-B)=P(A)-P(B)$, **且** $P(A)\geq P(B)$.

若 A, B **是任意两事件**, **则** $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

④ **加法公式**.

设 A, B **为任意二事件**, **则**

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

一般地, **设** A_1, A_2, $\cdots$, A_n **是** n **个事件**, **则**

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leq i<j\leq n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leq i<j<k\leq n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

3. **概率的计算**

(1) **乘法公式**

$$\begin{aligned}P(AB)&=P(B)P(A|B) \quad (\text{若 } P(B)>0)\\&=P(A)P(B|A) \quad (\text{若 } P(A)>0)\end{aligned}$$

一般地, **若** n **个事件** A_1, A_2, $\cdots$, A_n **满足** $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$, **则有**

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

(2) **全概率公式**

若 A_1, A_2, $\cdots$, A_n **是一个完备事件组(即** A_1, A_2, $\cdots$, A_n **两两互斥**, **且** $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$), $P(A_i)>0$, $i=1,2,\cdots,n$, **则对任一事件** B, **有**

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i).$$

(3) **贝叶斯公式**

若 A_1, A_2, $\cdots$, A_n **是一个完备事件组**, **且** $P(A_i)>0$, $i=1,2,\cdots,n$, **则当** $P(B)>0$ **时**, **有**

$$P(A_k|B)=\frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)} \qquad k=1,2,\cdots,n.$$

4. **事件的独立性、独立试验序列概型**

(1) **事件的独立性定义**

若 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$, **则称事件** A **和** B **相互独立**.

若对任意的 $k(1\leq k\leq n)$, **任意** $1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n$, **有**

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n **相互独立**, **简称独立**.

(2) 有关定理

① 设 A, B 是二事件, 且 $P(A) > 0$, 若 A, B 独立, 则 $P(B|A) = P(B)$. 反之亦然.

② 若事件 A 和 B 相互独立, 则 A 与 B, A 与 B, A 与 B 各对事件也相互独立.

③ 若干个独立事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 之积的概率, 等于各事件概率的乘积:

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2) \cdots P(A_n).$$

④ 独立事件的任一部分也独立. 因此, 事件 A_1, $\cdots$, A_n 独立一定两两独立, 而两两独立不一定相互独立.

⑤ 若一列事件 A_1, A_2, $\cdots$ 相互独立, 则将其中任一部分改为对立事件时, 所得事件列仍为独立.

(3) 独立试验序列概型

① 在相同条件下重复进行的一系列完全相同的试验称为独立试验序列, 即各次试验之间是相互独立的.

② 伯努利试验.

如果试验结果是 A 或 A, 且 $P(A) = p$, 称为伯努利试验. 将一伯努利试验独立地重复 n 次所得的独立试验序列, 称为 n 重伯努利试验.

在 n 重伯努利试验中, 事件 A 发生 k 次的概率为

$$P_n(k) = \mathrm{C}_n^k p^k (1 - p)^{n - k}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

独立重复地进行一伯努利试验, 直到第 k 次试验时事件 A 才首次发生的概率为

$$P_k = (1 - p)^{k - 1} p, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

(二) 难　点

1. 随机事件的关系和运算

一个复杂的事件 B, 它通过种种关系与一些简单事件联系起来, 这时我们会设法利用这种联系, 以便从这些简单事件的概率去算出事件 B 的概率. 通过对事件的运算得出新的事件.

对事件引进了和差积等运算, 借用了算术中的名词, 但算术的法则不一定能用于事件运算. 有些规则是成立的, 如和与积的交换律、结合律等. 但有些关系则必须用逻辑思维的方式去理解, 去验证. 如 $A + A = A$ 而非 $2A$($2A$ 无意义)。由 $A - B =$ ě, 推不出 $A = B$, 而只能推出 A　B, 等等. 这些不同之

点是应该搞清楚的.

另外,对于事件的交、并、余可用几何图形表示为“文氏图”,当事件关系比较复杂时,要善于利用“文氏图”进行剖析,以便找出解题的便捷途径.

2.古典概型的概率计算

按古典概率的定义,要求得事件 A 的概率,必须正确地计算出样本空间的基本事件总数 N 和事件 A 所含的基本事件个数 M.然而这两个数有时并不好算,尤其是 M,这就要把试验的过程和所求事件 A 分析清楚.

计算个数时,会涉及到排列、组合问题,什么情况下用排列,何时用组合,常是困扰读者的难点.首先要确定结果是否与排序有关,在计算 N 和 M 时要用同一思维方式,即分子与分母同用排列考虑或分子与分母同用组合考虑,因为事实上解题有时用组合,排列均可.关键在于如何设置相应的随机试验.我们要寻求最为简便的样本空间,以便于问题的解决.

3.概率计算公式的正确运用

在概率计算中,概率的加法公式、乘法公式、求逆公式、差的公式以及一些运算律的应用,这些公式的正确运用是解决问题的关键.当遇到和事件的概率计算时,应判断事件间是否互不相容;当遇到积事件的概率计算时,应判断事件间是否相互独立,以便正确地选择公式.求余法则及德.摩根法则的灵活运用会简化概率计算.

全概率公式和 Bayes 公式是用来计算复杂事件概率的常用方法.其关键是恰当地确定样本空间的一个划分,并确定出相关的事件的概率.

4.利用事件的独立性和独立试验序列进行概率计算

利用事件的独立性可把积事件的概率计算转化为简单事件概率的乘积.如下公式经常会用到.设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立,则

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}) \\ &= 1 - P(A_1 A_2 \cdots A_n) \\ &= 1 - P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n). \end{aligned}$$

事件的独立性和随机试验的独立性一般是从直观具体问题予以判断,而后按照独立性的概率运算规则处理.伯努利试验序列的两种概型在概率问题计算中经常遇到.

(三) 考　点

事件的关系和运算

概率的性质

古典概率，几何概率

条件概率、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式

事件的独立性

独立重复试验

● 三 全程典型例题精析 ●

本章内容是概率论的一些基本概念. 以下通过对随机事件的概率计算来进一步加深理解和切实掌握.

(一) 事件的关系和运算

【例 1-1】(2000(三)3 分) 在电炉上安装了 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的. 在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉就断电. 以 E 表示事件“电炉断电”，而 $T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq T_{(3)} \leq T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增序列排列温度值，则事件 E 等于

(A) $\{T_{(1)} \geq t_0\}$. (B) $\{T_{(2)} \geq t_0\}$. (C) $\{T_{(3)} \geq t_0\}$. (D) $\{T_{(4)} \geq t_0\}$.

【 】

【分析】 由已知条件，$\{T_{(i)} \geq t_0\}$表示 4 个温控器中有 $4-(i-1)$个温控器温度不低于临界值 t_0，因为只要有两个温控器温度不低于 t_0，电炉就断电，即事件 E 发生，所以事件 E 等价于事件$\{T_{(3)} \geq t_0\}$，故应选(C).

【例 1-2】(1989(三)3 分) 以 A 表示事件“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，则其对立事件 A 为.

(A)“甲种产品滞销，乙种产品畅销”.

(B)“甲、乙两种产品均畅销”.

(C)“甲种产品滞销”.

(D)“甲种产品滞销或乙种产品畅销”. 【 】

【解】 因为 $A=\{$甲种产品畅销，同时乙种产品滞销$\}$，设 B 表示“甲种产品畅销”，C 表示“乙种产品畅销”，所以

$$A = BC.$$

于是
$$A = \overline{BC} = B + C.$$

即 A 的对立事件表示“甲种产品滞销或乙种产品畅销”，故应选(D).

由文氏图(图 1-1)易见：$A = BC$，$A = B \cup C$.

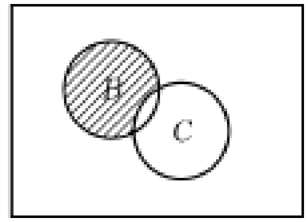

图 1-1

【例 1-3】(1988(三)3 分)　若事件 A，B，C 满足等式 $A \cup C = B \cup C$，则 $A = B$.　　(　)

【解】　因为

$$A \cup C = B \cup C,$$

而 A，B，C 是任意三事件(图 1-2)，事件 $A \cup C$ 可表示为二互斥事件的和，即

$$A \cup C = C + AC，其中\ C\ 与\ AC\ 互斥 .$$

同理　$B \cup C = C + BC$，其中 C 与 BC 互斥 .

因此可得出 $AC = BC$，即 $A - C = B - C$，两个差事件相等，而不是 A 与 B 相等 . 故此题所给答案是错误的 .

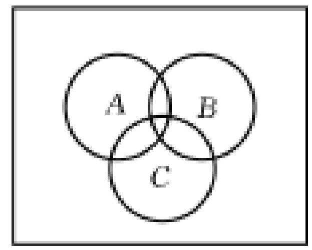

图 1-2

【例 1-4】　对任意二事件 A 和 B，与 $A \cup B = B$ 不等价的是

(A) A　B.　　(B) B　A.

(C) AB = ě .　　(D) AB = ě .

【　】

【分析】　$A \cup B = B$，这等价于 B　A，A　B，以及 AB = ě .

这由文氏图易见 . 如图 1-3，$AB \neq$ ě，而是 $AB = B - A$. 所以(D)与 $A \cup B = B$ 不等价 . 故应选(D) .

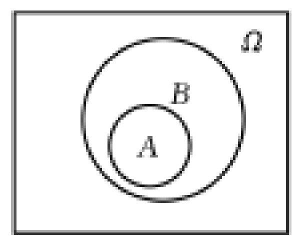

图 1-3

【例 1-5】　设 A，B，C 为 E 的任意事件，下列关系式哪个是正确的，哪个成立是有条件的？

(1) $(A + B) - B = A$.

(2) $A(B - C) = AB - AC$.

(3) $AB + C = (A + C)(B + C)$.

【解】　(1) $(A + B) - B = (A + B)B = AB +$ ě $= AB = A - AB$　A .

当 A，B 互斥时，等式成立 .

(2) 右边 $= AB\,\overline{AC} = AB(A + C)$

　　= ě + $ABC = A(BC) = A(B - C)$ = 左边

以上等式关系是可逆的，所以又可以证明左边 = 右边 . 因此 $A(B - C) = AB - AC$ 是正确的 .

(3) 证明 $AB + C = (A + C)(B + C)$，这是乘法第二分配律 .

右边 $= (A + C)B + (A + C)C$