21世纪高等教育标准教材
经济数学基础系列

线 性 代 数

单　飞　黄万阳　郑永冰　主编
龚兆仁　主审



东北财经大学出版社

需要全本请访问 www.ertongbook.com

面向21世纪高等教育标准教材

总序

我国高等教育改革经过几年的努力，已经取得了阶段性进展，一个新型的高等教育体制的雏形展现在我们面前。主要表现在：①改革不适应社会主义市场经济体制走向的教育管理体制，改变了过去高等教育管理体制条块分割、单科性学校较多的格局。除少数几个部委继续管少数院校外，国务院的四十多个部委已不再管理学校。②为体现优势互补、强强联合的精神，改善科类过于单一的现象，一些院校合并到综合大学，包括财经类的金融和财政类比较近类的学校也做了合并；③1998年教育部颁布实施了新的《普通高等学校本科专业目录》，专业做了很大调整，数量有所减少。④1998年党中央、国务院召开全国教育工作会议。会议动员全党全国人民以提高民族素质和创新能力为重点，全面推进素质教育，将推进素质教育提高到政府行为的高度。教育部在制定“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系计划”时，也提

出了加强素质教育的思想内容。

教育管理体制改革打破了原来高等教育教材编写体制和教材出版发行市场体制，学校合并和专业调整使高等教育课程设置和课程体系发生变化，教材会出现过剩和短缺并存的现象，结构必须调整，培养目标模式的转变，要求高等教育教材内容体系不但要重视知识的传授，而且要重视能力的培养和素质的提高。

为了适应高等教育改革的需要，我们组织编写了“面向21世纪高等教育标准教材”。本系列教材注意吸收国内外教学和科研的最新研究成果，充分体现科学性、思想性、先进性和稳定性，并努力在教材内容和体系上有所创新，力求较原有同类教材有较大的提高。

我们期望，本丛书的出版能对我国高等教育质量的提高，为培养更多更好适应社会经济发展和社会主义市场经济新形势人才做出一定的贡献。

面向21世纪高等教育标准教材
编写组
2000年5月

前言

为适应高等财经院校教学改革新形势的需要，我们组织编写了财经管理类基础数学系列教材。为保证教材质量，此次编写采取了招标的方式，通过投标竞争，由专家对编写思路、体例、特点等方面进行严格审定，决定编写人员。本书就是这次招标方式产生的系列教材中的一种。

本书在编写中，既参考了国家教育部高等教育司审定的高等学校财经类专业核心课程《经济教学基础》中的《线性代数》数学大纲，又借鉴了近几年国内外同类教材的先进经验，在教材的结构与内容安排上有所创新。

在题材的取舍上，本书重点介绍线性代数的基础知识和基本方法，并根据高等财经院校学生的特点和需要，简要介绍线性代数在财经管理实际问题中的基本应用。每章末均配备了一定数量的思考题、习题和自测题，思考题意在加深读者对基本内容的理解，习题和自测题中加入了一些研究生入学考试的题型，以满足学有余力同学

的要求。

本书可作为高等财经院校本科生各类专业的《线性代数》教材。本书共分 远章(第 远章作为选学内容),其中第 员远章由黄万阳编写,第 圆猿章由单飞编写,第 源缘章由郑永冰编写。初稿草成,龚兆仁教授进行了细致的审阅,提出了许多宝贵的修改意见。在此,我们深表谢意。

本教材最初的投标书和最后定稿,经过几轮的专家评审与鉴定,郭多祚、夏少刚、王雪标、刘文龙、张培荣几位教授付出了大量心血,我们一并表示感谢。

另外,还要感谢金红老师为全书的出版所提供的巨大帮助。

由于作者水平有限,经验不足,加之时间仓促,书中难免存在疏漏甚至错误,恳请读者批评指正。

作 者

圆园园缘年 员月 员园日

需要全本请访问 www.ertongbook.com

目 录

第 员章 行列式…… 员
本章目的…… 员
本章提要…… 员
员窑员 灶阶行列式 …… 员
员窑员窑员 二、三阶行列式…… 圆
员窑员窑圆 排列及逆序数 …… 缘
员窑员窑猿 灶阶行列式 …… 远
员窑圆 行列式的性质 …… 怨
员窑圆窑员 行列式的基本性质 …… 怨
员窑圆窑圆 利用性质计算行列式…… 员圆
员窑圆窑猿 范德蒙行列式…… 员远
员窑猿 行列式的展开定理…… 员苑
员窑猿窑员 行列式按某一行(列)展开定理…… 员苑
员窑猿窑圆 利用行(列)展开定理计算行列式…… 员怨
员窑猿窑猿 拉普拉斯定理…… 圆缘

员猿源 利用拉普拉斯定理计算行列式 …… 圆员
员源 克莱姆法则 …… 圆缘
员源员 克莱姆法则 …… 圆缘
员源圆 利用克莱姆法则解线性方程组 …… 圆远
本章小结 …… 圆愿
思考题 …… 圆愿
习题一 …… 猿园
自测题 …… 猿缘

第 圆章 矩阵 …… 猿远

本章目的 …… 猿远
本章提要 …… 猿远
员圆员 矩阵的定义与运算 …… 猿远
圆员员 矩阵的概念 …… 猿远
圆员圆 矩阵的运算 …… 猿愿
圆员猿 灶阶方阵的幂 …… 源员
圆员源 矩阵的转置 …… 源园
圆员缘 灶阶方阵的行列式 …… 源缘
员圆圆 几种特殊的矩阵 …… 源苑
圆圆员 对角形矩阵 …… 源苑
圆圆圆 三角形矩阵 …… 源远
圆圆猿 对称矩阵与反对称矩阵 …… 源愿
员圆猿 逆矩阵 …… 源愿
圆猿员 逆矩阵的定义与性质 …… 源愿
圆猿圆 伴随矩阵 …… 缘园
员圆源 分块矩阵 …… 缘园
圆源员 分块矩阵的定义 …… 缘园
圆源圆 分块矩阵的运算 …… 缘员
圆源猿 准对角矩阵 …… 缘愿
员圆缘 矩阵的初等变换 …… 远园
圆缘员 初等矩阵 …… 远园

§1.3.3 初等变换法求逆矩阵 …… 16
本章小结 …… 18
思考题 …… 19
习题二 …… 19
自测题 …… 21

第3章 线性方程组 …… 24

本章目的 …… 24
本章提要 …… 24
§3.1 n维向量 …… 24
§3.1.1 向量的定义 …… 24
§3.1.2 n维向量的线性运算 …… 25
§3.1.3 向量的线性关系 …… 26
§3.2 向量组的秩与矩阵的秩 …… 30
§3.2.1 向量组的秩 …… 30
§3.2.2 矩阵的秩 …… 31
§3.3 线性方程组解的一般理论 …… 34
§3.3.1 线性方程组解的判定 …… 34
§3.3.2 齐次线性方程组解的结构 …… 36
§3.3.3 非齐次线性方程组解的结构 …… 38
本章小结 …… 40
思考题 …… 40
习题三 …… 41
自测题 …… 43

第4章 矩阵的特征值与特征向量 …… 45

本章目的 …… 45
本章提要 …… 45
§4.1 特征值与特征向量 …… 45
§4.1.1 基本概念 …… 45
§4.1.2 特征值和特征向量的基本性质 …… 47

源源源 特征值与特征向量的计算 …… 源源源
异源源 相似矩阵与矩阵的对角化 …… 源源源
源源源 相似矩阵 …… 源源源
源源源 矩阵的对角化 …… 源源源
异源源 实对称矩阵的对角化 …… 源源源
源源源 向量的内积 …… 源源源
源源源 实对称矩阵的对角化 …… 源源源
本章小结 …… 源源源
思考题 …… 源源源
习题四 …… 源源源
自测题 …… 源源源

第 源章 二次型 …… 源源源

本章目的 …… 源源源
本章提要 …… 源源源
异源源 二次型及其矩阵表示 …… 源源源
异源源 化二次型为标准形 …… 源源源
源源源 配方法 …… 源源源
源源源 初等变换法 …… 源源源
源源源 正交变换法 …… 源源源
异源源 二次型的分类 …… 源源源
本章小结 …… 源源源
思考题 …… 源源源
习题五 …… 源源源
自测题 …… 源源源

第 远章 线性代数在经济中的应用简介* …… 源源源

本章目的 …… 源源源
本章提要 …… 源源源
异远源 非负矩阵与莱斯利人口模型 …… 源源源
远源源 非负矩阵及其特征值 …… 源源源

§2.3.4 不可分矩阵及其性质 …… 第67页
§2.3.5 非负不可分矩阵的性质 …… 第70页
§2.3.6 莱斯利(Leslie)人口模型 …… 第73页
§2.4.1 对角优势矩阵的概念及性质 …… 第76页
§2.4.2 矩阵级数 …… 第78页
§2.4.3 投入产出数学模型 …… 第82页
§2.4.4 投入产出表 …… 第82页
§2.4.5 投入产出数学模型 …… 第83页
§2.4.6 完全消耗系数 …… 第84页
§2.5 线性规划模型 …… 第86页
§2.5.1 线性规划问题 …… 第86页
§2.5.2 线性规划问题的数学模型 …… 第87页
习题及自测题答案 …… 第90页

第员章 行列式

本章目的

行列式的概念来源于解线性方程组的问题,但行列式的应用不限于求解线性方程组援行列式是研究线性代数的一个重要工具,也是经济管理研究中常用的数学工具援本章希望达到以下目的:

员援介绍如何从求解线性方程组的问题提出行列式的概念,使读者了解行列式这个数学工具来源于实践并服务于实践援

圆援介绍从行列式的概念演绎出行列式的性质、定理这个逻辑推理过程,提高读者的逻辑推理能力援

猿援介绍如何利用行列式的定义、性质、定理计算行列式,使读者熟练掌握行列式的计算方法,为熟练运用这个数学工具打下坚实的基础援

本章提要

员援n级排列,n级排列的逆序数及n阶行列式的定义;

圆援行列式的性质及运用行列式的性质计算行列式;

猿援行列式的展开定理及运用行列式的展开定理计算行列式;

源援克莱姆法则及运用克莱姆法则求解线性方程组援

员援员 n阶行列式

线性方程组理论是本书讨论和研究的重要内容援线性方程组是未知数次数为员的一类特殊方程组,具有一般形式:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1-1}$$

其中:a_{ij}表示第i个方程第j个未知数的系数,x_j表示第j个未知数,b_i表示第i个方程的常数项,$i=1,2,\cdots,n$;$j=1,2,\cdots,n$援

需要全本请访问 www.ertongbook.com

灶阶行列式的概念来源于求解方程个数 (皂) 等于未知数个数 (灶) 的线性方程组援

员援源援员 二、三阶行列式

为得到 灶阶行列式的概念,首先我们考虑方程个数 皂等于未知数个数 灶都等于 圆的线性方程组

$$\begin{cases} 葬_{员员}x_{员}+葬_{员圆}x_{圆}=遭_{员} \\ 葬_{圆员}x_{员}+葬_{圆圆}x_{圆}=遭_{圆} \end{cases} \tag{员-圆}$$

利用加减消元法得到

$$\begin{cases} (葬_{员员}葬_{圆圆}-葬_{员圆}葬_{圆员})x_{员}=遭_{员}葬_{圆圆}-葬_{员圆}遭_{圆} \\ (葬_{员员}葬_{圆圆}-葬_{员圆}葬_{圆员})x_{圆}=遭_{圆}葬_{员员}-葬_{圆员}遭_{员} \end{cases} \tag{员-猿}$$

分析方程组 (员-猿),我们容易发现 :$x_{员}$的解与系数之间以及系数与常数之间的某种运算关系有关 ;类似地,$x_{圆}$的解与系数之间以及系数与常数之间的某种运算关系有关 援为得到这种运算关系,我们撇开等式右边部分不看,单看方程左边 $x_{员}$,$x_{圆}$的系数部分援我们发现系数部分 $葬_{员员}葬_{圆圆}-葬_{员圆}葬_{圆员}$,正好由方程组 (员-圆) 未知数系数 $葬_{员员}$,$葬_{员圆}$,$葬_{圆员}$,$葬_{圆圆}$组成援这启发我们为便于记忆,引进记号

$$阅=\begin{vmatrix} 葬_{员员} & 葬_{员圆} \\ 葬_{圆员} & 葬_{圆圆} \end{vmatrix}=葬_{员员}葬_{圆圆}-葬_{员圆}葬_{圆员}$$ 并称之为二阶行列式。

行列式这一名称非常直观援在我们这样定义二阶行列式后,方程组 (员-猿) 每个方程右边部分构成两个二阶行列式

$$阅_{员}=\begin{vmatrix} 遭_{员} & 葬_{员圆} \\ 遭_{圆} & 葬_{圆圆} \end{vmatrix}=遭_{员}葬_{圆圆}-葬_{员圆}遭_{圆}$$

$$阅_{圆}=\begin{vmatrix} 葬_{员员} & 遭_{员} \\ 葬_{圆员} & 遭_{圆} \end{vmatrix}=遭_{圆}葬_{员员}-葬_{圆员}遭_{员}$$

当 $阅\neq 园$时,线性方程组 (员-圆) 的解可以表示为 $x_{员}=\dfrac{阅_{员}}{阅}$,$x_{圆}=\dfrac{阅_{圆}}{阅}$援

例 员 二元线性方程组

$$\begin{cases} x_{员}+x_{圆}=员 \\ x_{员}+圆x_{圆}=猿 \end{cases}$$

解

阅越$\begin{vmatrix} 员 & 员 \\ 员 & 圆 \end{vmatrix}$越员伊圆原员伊员越员

阅员越$\begin{vmatrix} 员 & 员 \\ 猿 & 圆 \end{vmatrix}$越员伊圆原员伊猿越原员

阅圆越$\begin{vmatrix} 员 & 员 \\ 员 & 猿 \end{vmatrix}$越员伊猿原员伊员越圆

阅≠园方程组有唯一解，方程组的唯一解为：

曾员越$\frac{阅员}{阅}$越原员曾圆越$\frac{阅圆}{阅}$越圆

类似地，方程个数皂等于未知数个数灶都等于猿的线性方程组

$$\begin{cases} 葬_{员员}曾_{员}+葬_{员圆}曾_{圆}+葬_{员猿}曾_{猿}=遭_{员} \\ 葬_{圆员}曾_{员}+葬_{圆圆}曾_{圆}+葬_{圆猿}曾_{猿}=遭_{圆} \\ 葬_{猿员}曾_{员}+葬_{猿圆}曾_{圆}+葬_{猿猿}曾_{猿}=遭_{猿} \end{cases} \quad (员-源$$

利用加减消元法，我们得到

$$\begin{cases} (葬_{员员}葬_{圆圆}葬_{猿猿}+葬_{员圆}葬_{圆猿}葬_{猿员}+葬_{员猿}葬_{圆员}葬_{猿圆}-葬_{员猿}葬_{圆圆}葬_{猿员}-葬_{员圆}葬_{圆员}葬_{猿猿}-葬_{员员}葬_{圆猿}葬_{猿圆})曾_{员} \\ =遭_{员}葬_{圆圆}葬_{猿猿}+葬_{员圆}葬_{圆猿}遭_{猿}+葬_{员猿}遭_{圆}葬_{猿圆}-葬_{员猿}葬_{圆圆}遭_{猿}-葬_{员圆}遭_{圆}葬_{猿猿}-遭_{员}葬_{圆猿}葬_{猿圆} \\ (葬_{员员}葬_{圆圆}葬_{猿猿}+葬_{员圆}葬_{圆猿}葬_{猿员}+葬_{员猿}葬_{圆员}葬_{猿圆}-葬_{员猿}葬_{圆圆}葬_{猿员}-葬_{员圆}葬_{圆员}葬_{猿猿}-葬_{员员}葬_{圆猿}葬_{猿圆})曾_{圆} \\ =葬_{员员}遭_{圆}葬_{猿猿}+遭_{员}葬_{圆猿}葬_{猿圆}+葬_{员猿}葬_{圆员}遭_{猿}-葬_{员猿}遭_{圆}葬_{猿员}-葬_{员圆}葬_{圆员}遭_{猿}-葬_{员员}葬_{圆猿}遭_{猿} \\ (葬_{员员}葬_{圆圆}葬_{猿猿}+葬_{员圆}葬_{圆猿}葬_{猿员}+葬_{员猿}葬_{圆员}葬_{猿圆}-葬_{员猿}葬_{圆圆}葬_{猿员}-葬_{员圆}葬_{圆员}葬_{猿猿}-葬_{员员}葬_{圆猿}葬_{猿圆})曾_{猿} \\ =葬_{员员}葬_{圆圆}遭_{猿}+葬_{员圆}遭_{圆}葬_{猿员}+遭_{员}葬_{圆员}葬_{猿圆}-葬_{员猿}葬_{圆圆}葬_{猿员}-葬_{员圆}葬_{圆员}葬_{猿猿}-葬_{员员}遭_{圆}葬_{猿圆} \end{cases}$$

$$(员-缘$$

分析方程组(员-缘，我们发现：曾员(跃越员圆猿的解与系数之间以及系数与常数之间某种运算关系有关，为了得到这种运算关系，我们撇开等式右边部分不看，单看方程左边曾员，曾圆，曾猿的系数部分，那么系数部分是

$葬_{员员}葬_{圆圆}葬_{猿猿}+葬_{员圆}葬_{圆猿}葬_{猿员}+葬_{员猿}葬_{圆员}葬_{猿圆}-葬_{员猿}葬_{圆圆}葬_{猿员}-葬_{员圆}葬_{圆员}葬_{猿猿}-葬_{员员}葬_{圆猿}葬_{猿圆}$，正好是由线性方程组(员-源未知数系数葬员员，葬员圆，葬员猿，葬圆员，葬圆圆，葬圆猿，葬猿员，葬猿圆，葬猿猿组成，这启发我们，为便于记忆，与二阶行列式类似引进记号

定义三阶行列式

$$阅越\begin{vmatrix} 葬 & 葬 & 葬 \\ 葬 & 葬 & 葬 \\ 葬 & 葬 & 葬 \end{vmatrix} 越葬葬葬 垣葬葬葬 垣葬葬葬 原葬葬葬 原葬葬葬并称之为三阶行列式援$$

在我们这样定义三阶行列式之后,方程组(员-缘右边分别为三个三阶行列式:

$$阅_{员}越\begin{vmatrix} 遭 & 葬 & 葬 \\ 遭 & 葬 & 葬 \\ 遭 & 葬 & 葬 \end{vmatrix} 越遭葬葬 垣葬葬遭 垣葬遭葬 原葬葬遭 原遭葬葬 原葬遭葬$$

$$阅_{圆}越\begin{vmatrix} 葬 & 遭 & 葬 \\ 葬 & 遭 & 葬 \\ 葬 & 遭 & 葬 \end{vmatrix} 越葬遭葬 垣遭葬葬 垣葬葬遭 原葬遭葬 原葬葬遭 原遭葬葬$$

$$阅_{猿}越\begin{vmatrix} 葬 & 葬 & 遭 \\ 葬 & 葬 & 遭 \\ 葬 & 葬 & 遭 \end{vmatrix} 越葬葬遭 垣葬遭葬 垣遭葬葬 原遭葬葬 原葬遭葬 原葬葬遭$$

当 $阅\neq 园$时,线性方程组(员-源的解可以表示为

$$曾_{员}越\frac{阅_{员}}{阅},曾_{圆}越\frac{阅_{圆}}{阅},曾_{猿}越\frac{阅_{猿}}{阅}援$$

例圆 线性方程组

$$\begin{cases} 猿曾_{员}原曾_{圆}垣曾_{猿}越圆远 \\ 圆曾_{员}原源曾_{圆}原曾_{猿}越怨 \\ 曾_{员}垣圆曾_{圆}垣曾_{猿}越员远 \end{cases}$$

解

$$阅越\begin{vmatrix} 猿 & 原员 & 员 \\ 圆 & 原源 & 原员 \\ 员 & 圆 & 员 \end{vmatrix} 越缘$$

$$D_{员}=\begin{vmatrix}员&员&员&员\\员&员&员&员\\员&员&员&员\\员&员&员&员\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}员&员&员&员\\员&员&员&员\\员&员&员&员\\员&员&员&员\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}员&员&员&员\\员&员&员&员\\员&员&员&员\\员&员&员&员\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}员&员&员&员\\员&员&员&员\\员&员&员&员\\员&员&员&员\end{vmatrix}$$

方程组有唯一解

$$x_{员}=\frac{D_{员}}{D}=员,\quad x_{员}=\frac{D_{员}}{D}=员,\quad x_{员}=\frac{D_{员}}{D}=员,\quad x_{员}=\frac{D_{员}}{D}=员.$$

员援员 排列及逆序数

为了把二阶、三阶行列式的概念推广到 灶阶行列式,需要引入 灶级排列、灶级排列的逆序数的概念援下面首先给出 灶级排列的概念援

定义 员援员 由 灶个自然数 员,员,…,灶组成的一个有序数组 $p_{员}p_{员}\cdots p_{灶}$ 叫一个 灶级排列援灶级排列的总数是 灶!援

例如,员源猿缘是一个四级排列,猿员源缘是一个四级排列,员猿源缘也是一个四级排列援

下面给出 灶级排列的逆序数的概念援

定义 员援圆 在一个 灶级排列 $p_{员}p_{员}\cdots p_{灶}$ 中,如果较大的数 $p_{员}$ 排在较小的数 $p_{员}$ 的前面,即对 $p_{员}>p_{员}$,则称有 $p_{员}$ 跃 $p_{员}$ 称这一对数 $p_{员}p_{员}$ 构成一个逆序援一个 灶级排列中逆序的总数,叫这个 灶级排列的逆序数援记为 $\tau(p_{员}p_{员}\cdots p_{灶})$ 援

容易得到,$\tau(p_{员}p_{员}\cdots p_{灶})=t_{员}+t_{员}+\cdots+t_{灶}$,其中,$t_{员}$ 表示在排列中划掉比 $p_{员}$ 小的数后排在 $p_{员}$ 前面的数的个数援

例如,$\tau(员源猿缘)=$ 员;

$\tau(缘员猿源)=$ 源;

$\tau(源员猿缘)=$ 圆援

定义 员援猿 如果一个 灶级排列中,所有的数都按照由小到大的顺序排列,那么这个排列叫 灶级标准排列;如果一个 灶级排列的逆序数为偶数,

那么这个排列叫偶排列；如果一个 n 级排列的逆序数为奇数，那么这个排列叫奇排列。

例如，n 级排列 $12\cdots n$ 是偶排列；n 级排列 $n(n-1)\cdots 21$ 是奇排列。

定义 1 在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果两个数 i_s 与 i_t 互换位置，其余数位置不变，这样的变换叫一个对换，记为 $(i_s i_t)$。

例如，$12\cdots n \xrightarrow{(1\ n)} n2\cdots(n-1)1$。

定理 1 对换改变排列的奇偶性。

证明 (1) 考虑对换两个相邻的数的特殊情形。

设一个 n 级排列为 $\cdots ab\cdots$，经过一个对换 (ab) 得到另一个 n 级排列 $\cdots ba\cdots$。在这两个排列中，a、b 与其它数之间以及其它数之间顺序相同，只有 a、b 之间的顺序不同。

如果 $a<b$，那么原排列 a、b 之间是顺序，新排列 a、b 之间是逆序，新排列比原排列增加了一个逆序；反之，如果 $a>b$，那么原排列 a、b 之间是逆序，新排列 a、b 之间是顺序，新排列比原排列减少了一个逆序。无论逆序数是增加一个，还是减少一个，都改变了排列的奇偶性。

(2) 考虑对换任意两个数的一般情形。

设一个 n 级排列为 $\cdots a\,i_1\cdots i_s\,b\cdots$，经过一个对换 (a,b) 得到一个新的 n 级排列 $\cdots b\,i_1\cdots i_s\,a\cdots$。对此我们可以看作两步：第一步，在原排列中把 a 依次与 $i_1,i_2,\cdots,i_s,b$ 作 $s+1$ 次相邻对换，将原排列变为 $\cdots i_1 i_2\cdots i_s\,b\,a\cdots$；第二步，在第一步变出的排列中，把 b 依次与 $i_s,i_{s-1},\cdots,i_1,a$ 作 $s+1$ 次相邻对换，就得到了新排列。这样原排列共经过 $2s+1$ 次相邻对换就得到了新排列。$2s+1$ 是奇数，相邻对换改变排列的奇偶性，奇数次相邻对换改变了原排列的奇偶性。

二、三阶行列式

回忆前面给出的二、三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

葬原员原员葬原员圆葬圆员葬圆圆原葬原员员葬原员圆葬圆员葬圆圆援

首先，我们看每一项构成的特点援可以看出，二阶行列式每一项由两个元素的乘积组成，两个元素行的脚标构成一个二级标准排列，两个元素列的脚标是所有的二级排列员员圆圆援三阶行列式每一项由三个元素的乘积组成，三个元素行的脚标构成一个三级标准排列，三个元素列的脚标构成所有的三级排列员员猿圆猿，员圆猿猿员，圆员猿猿圆，圆猿员猿员，猿员圆猿圆，猿圆员猿员援这启发我们定义灶阶行列式的每一项援灶阶行列式每一项由灶个元素的乘积组成，灶个元素行的脚标构成一个灶级标准排列，灶个元素列的脚标构成所有的灶级排列援即

葬原员蕴员葬原圆蕴圆…葬原灶蕴灶援

其次，我们看每一项符号的决定援可以看出，当列的脚标是员圆猿，员猿圆，圆员猿，圆猿员，猿员圆，猿圆员时，即列的脚标构成偶排列时，这一项取正号；当列的脚标是圆员猿，圆猿员，员圆猿，员猿圆，猿员圆，猿圆员时，即列的脚标构成奇排列时，这一项取负号援这启发我们灶阶行列式任意一项

葬原员蕴员葬原圆蕴圆…葬原灶蕴灶的符号为（原员）蕴（蕴员蕴圆…蕴灶援

最后，我们看项数援可以看出，二阶行列式的项数为所有二级排列的总数圆！越圆，三阶行列式的项数为所有三级排列的总数猿！越远援这启发我们定义灶阶行列式的项数为灶！援总结以上分析，我们给出灶阶行列式的定义援

定义员　设有数组成的灶阶行列式

$$\begin{vmatrix} 葬_{原员} & 葬_{原圆} & \cdots & 葬_{原灶} \\ 葬_{圆员} & 葬_{圆圆} & \cdots & 葬_{圆灶} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 葬_{灶员} & 葬_{灶圆} & \cdots & 葬_{灶灶} \end{vmatrix}$$

越$\sum_{(蕴员蕴圆\cdots蕴灶)}^{灶！}$（原员）蕴（蕴员蕴圆…蕴灶）葬原员蕴员葬原圆蕴圆…葬原灶蕴灶援　（员—远）

其中，$\sum_{(蕴员蕴圆\cdots蕴灶)}^{灶！}$表示对所有的灶级排列求和，葬原蕴员蕴圆…蕴灶表示灶阶行列式中位于第 蕴员行、第 蕴圆列的元素援

注意到灶阶行列式每一项中灶个元素的顺序可以任意交换，灶阶行列式的展开式也可以写成

$$\sum_{(蕴员蕴圆\cdots蕴灶)}^{灶！}（原员）^{蝇(蕴员蕴圆\cdots蕴灶)}葬_{蕴员员}葬_{蕴圆圆}\cdots葬_{蕴灶灶}　　（员—苑）$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com