21世纪高等教育标准教材
经济数学基础系列

微　积　分

主　编　潘　权
副主编　王云平
主　审　夏少刚



东北财经大学出版社
大　连

需要全本请访问 www.ertongbook.com

© 潘权 □□□□

图书在版编目(□□□□)数据

微积分 □□□□□

面向21世纪高等教育标准教材

总序

我国高等教育改革经过几年的努力，已经取得了阶段性进展，一个新型的高等教育体制的雏形展现在我们面前。主要表现在：(1)改革不适应社会主义市场经济体制走向的教育管理体制，改变了过去高等教育管理体制条块发割、单科性学校较多的格局。除少数几个部委继续管少数院校外，国务院的四十多个部委已不再管理学校。(2)为体现优势互补、强强联合的精神，改善科类过于单一的现象，一些院校合并到综合大学，包括财经类的金融和财政类比较近类的学校也做了合并；(3)1998年教育部颁布实施了新的《普通高等学校本科专业目录》，专业做了很大调整，数量有所减少。(4)1998年党中央、国务院召开全国教育工作会议。会议动员全党全国人民以提高民族素质和创新能力为重点，全面推进素质教育，将推进素质教育提高到政府行为的高度。教育部在制定“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系计划”时，也提

出了加强素质教育的思想内容。

教育管理体制改革打破了原来高等教育教材编写体制和教材出版发行市场体制，学校合并和专业调整使高等教育课程设置和课程体系发生变化，教材会出现过剩和短缺并存的现象，结构必须调整，培养目标模式的转变，要求高等教育教材内容体系不但要重视知识的传授，而且要重视能力的培养和素质的提高。

为了适应高等教育改革的需要，我们组织编写了“面向21世纪高等教育标准教材”。本系列教材注意吸收国内外教学和科研的最新研究成果，充分体现科学性、思想性、先进性和稳定性，并努力在教材内容和体系上有所创新，力求较原有同类教材有较大的提高。

我们期望，本丛书的出版能对我国高等教育质量的提高，为培养更多更好适应社会经济发展和社会主义市场经济新形势人才做出一定的贡献。

面向21世纪高等教育标准教材

编写组

[illegible]年[illegible]月

前言

为适应高等财经院校教学改革新形势的需要，我们组织编写了财经管理类基础数学系列教材。为保证教材质量，此次编写采取了招标的方式，通过投标竞争，由专家对编写思路、体例、特点等方面进行严格审定，决定编写人员。本书就是这次招标方式产生的系列教材中的一种。

本教材是按照教学大纲的要求编写的。就像所有经济类高等数学教科书所追求的那样，在无法透彻交代理论的前提下却希望读者能熟练计算及应用，本教材也不例外。这的确有点勉为其难。本教材在不过多增加篇幅的情况下，对大多数定理（法则）都给出了严格的证明。希望借此能保持数学学科本身的系统性和科学性，又有利于培养学生的逻辑思维能力。例如，本教材以实数的概念开头（可参看附录 员:实数的严格定义和戴得金定理），引出确界定理，再对闭区间上连续函数的三条性质

需要全本请访问 www.ertongbook.com

定理给出了简洁证明(一般经济类教材都省略证明)。

本教材在例题上比较注意层次,每章后配置了大量的习题,并分为思考题、习题 粤和习题 月, 尤其是习题 月,除难度增加外,题型也较新颖。希望能够对那些有兴趣提高或攻读研究生的学生有所帮助。

本教材还极为注重在经济方面的应用,结合经济概念配置相当数量的题目,充分体现了专业的特点;也注意吸收了若干较新的成果,如第八章关于多元函数极值的判别法增加了定理 愿[illegible](多元函数极值的一阶充分条件)。

本教材第五、六章由王云平编写,第九、十章由董爱云编写,其余各章由潘权编写。

编者在本教材编写过程中深切地感到,对于像这类基本内容早已经非常成熟的高等数学教材,如何进行改革,一方面要使学生较容易接受,能够通过学习掌握一些最基本的知识且在素质能力上有所提高,另一方面又能适合时代发展的需要,这是一件很不容易做的事。事实上,关于如何普及高等数学教育确实应当引起高等数学教育工作者的足够重视。本书的遗憾之处也正是:由于受教学大纲的束缚,因而没能在编排结构及叙述方式上完全如编者所愿,也缺乏足够的创新。

我们非常感谢夏少刚教授,他仔细地审阅了原稿,并提出了很多宝贵的意见。我们也非常感谢王庆石教授、王雪标教授和郭多祚教授,他们在本书全局结构的把握上提出了很多指导性和建设性的意见。我们还非常感谢数量经济系的全体同事,正是通过平时与他们的教学经验交流对编者产生了无法忽视的影响。另外,金红老师在打字及排版上给予了编者极大的帮助,在此也表示深深的谢意。

限于编者水平,编写时间也比较仓促,因而教材中一定存在不妥之处,希望广大读者批评指正。

编 者

[illegible]年 猿月

目录

第员章 实数基础与函数 …… 员

异员节 实数基础 …… 员
异员节 函数的概念 …… 远
异员节 函数的基本特性 …… 员园
异员节 复合函数与反函数 …… 员猿
异员节 初等函数 …… 员苑
异员节 简单的经济函数 …… 圆员
思考题一 …… 圆源
习题一——粤 …… 圆缘
习题一——月 …… 圆愿

第圆章 极限与连续 …… 圆怨

异圆节 数列的极限 …… 圆怨
异圆节 函数的极限 …… 猿猿
异圆节 无穷小量与无穷大量 …… 源员

§2.1 极限的性质与运算法则 …… 1
§2.2 极限存在性定理与两个重要极限 …… 3
§2.3 无穷小量的比较与等价代换 …… 6
§2.4 函数的连续性 …… 8
思考题二 …… 11
习题二——粤 …… 11
习题二——月 …… 12

第三章 导数与微分 …… 13

§3.1 导数的概念 …… 13
§3.2 求导法则 …… 15
§3.3 隐函数的导数与高阶导数 …… 17
§3.4 微 分 …… 19
§3.5 导数概念在经济学中的应用 …… 21
思考题三 …… 22
习题三——粤 …… 22
习题三——月 …… 23

第四章 微分中值定理与导数的应用 …… 24

§4.1 中值定理 …… 24
§4.2 罗必塔(L'Hospital)法则 …… 26
§4.3 函数单调性判别法 …… 28
§4.4 函数的极值与最值 …… 29
§4.5 关于不等式的证明与函数零点问题 …… 31
§4.6 曲线的凸性、拐点与渐近线 …… 32
§4.7 函数作图 …… 34
思考题四 …… 36
习题四——粤 …… 36
习题四——月 …… 37

第五章 不定积分 …… 59
5.1 不定积分的概念与性质 …… 59
5.2 基本积分表 …… 63
5.3 换元积分法 …… 67
5.4 分部积分法 …… 75
5.5 有理函数的积分 …… 79
思考题五 …… 86
习题五——粤 …… 86
习题五——月 …… 91
第六章 定积分 …… 97
6.1 定积分的概念与性质 …… 97
6.2 微积分的基本定理 …… 103
6.3 定积分的计算方法 …… 107
6.4 定积分的应用 …… 115
6.5 广义积分初步 …… 126
思考题六 …… 131
习题六——粤 …… 131
习题六——月 …… 135
第七章 无穷级数 …… 140
7.1 常数项级数的概念与性质 …… 140
7.2 正项级数敛散性的判别 …… 145
7.3 任意项级数敛散性的判别 …… 152
* 7.4 广义积分敛散性的判别 …… 156
* 7.5 幂级数 …… 159
* 7.6 函数的幂级数展开 …… 164
思考题七 …… 169

* 带 * 的为选学内容

习题七——粤 …… 圆源
习题七——月 …… 猿员

第 愿章 多元函数微积分学 …… 猿缘

异员 空间解析几何简介 …… 猿缘
异圆 多元函数的概念 …… 猿愿
异猿 偏导数与全微分 …… 猿苑
异源 高阶偏导数 …… 猿怨
异缘 多元复合函数微分法与隐函数微分法 …… 源园
异远 多元函数的极值与最值 …… 源缘
异苑 二重积分 …… 源怨
思考题八 …… 源员
习题八——粤 …… 源员
习题八——月 …… 源远

第 怨章 微分方程初步 …… 源怨

异员 微分方程的基本概念 …… 源怨
异圆 一阶微分方程 …… 源怨
异猿 高阶微分方程 …… 源苑
异源 微分方程在经济学中的应用 …… 缘愿
思考题九 …… 缘园
习题九——粤 …… 缘园
习题九——月 …… 缘远

第 员园章 差分方程初步 …… 缘愿

异员 差分方程的基本概念 …… 缘愿
异圆 一阶常系数线性差分方程 …… 缘苑
* 异猿 二阶常系数线性差分方程 …… 缘怨
* 异源 灶阶常系数线性差分方程 …… 缘怨
异缘 差分方程在经济学中的简单应用 …… 缘怨
思考题十 …… 缘怨

习题十——粤 …… 源猿
习题十——月 …… 源缘
附录 员 实数的严格定义和戴德金定理 …… 源愿
附录 圆 单调函数及其反函数的连续性 …… 源员
附录 猿 习题答案与提示 …… 源猿
参考文献 …… 源源

需要全本请访问 www.ertongbook.com

第员章 实数基础与函数

函数是微积分学的重要基本概念之一,是微积分学的研究对象援本章将介绍有关实数的基础知识,并讨论函数的概念及其基本性质援

员援员 实数基础

由于微积分学主要是在实数范围内研究问题,故本节先学习一下与实数有关的一些基本知识和理论,包括确界存在定理援

一、实数与实数的绝对值

员援员援员 实数与数轴上的点

我们已经知道,有理数包括零、正负整数和正负分数援任意一个有理数都可写成 责辕择的形式(其中 责 择为整数,且 择≠园当然可进一步要求 责与 择互素),也可表示为整数、有限小数或无限循环小数援对任意两个有理数作加、减、乘、除(零作除数除外)运算,结果还是一个有理数援而且,可以把有理数直观地标记在一根数轴上,称为有理点援

任何两个不同的有理数 葬与 遭之间必存在别的有理数,有理数的这个性质称为稠密性援例如 $\frac{葬+遭}{圆}$,当然也必有无穷多个有理数存在其间(为什么?)援问题是:在数轴上除掉这些有理点之外,还有没有别的点?换句话说,在数轴上除了全部有理点外,还有没有“孔隙”?答案是肯定的援例如,以单位长为直角边的等腰直角三角形的斜边长,应为$\sqrt{圆}$在中学数学里就已经证明它不是有理数援事实上,数轴上还有很多点不是有理点,我们规定,数轴上凡是不代表有理数的点,就叫做无理点;每一个无理点代表一个无理数,有理数和无理数统称为实数援这个定义虽然仅仅是描述性的,但却是实数的严格定义的出发点援作者极力推荐有兴趣的读者参看一下本书的附录员(实数的严格定义和戴得金定理),那样就会得到对实数

准确而完整的认识援

由上所述,实数与数轴上的点是一一对应的援为了简便起见,我们常用同一个字母或数字既表示某个实数又表示以此实数为坐标的数轴上的对应点,比如,数 葬与点 葬,数√圆与点√圆……

我们已经知道,有理点具有稠密性,即数轴上任意两个不同的有理点之间一定存在无穷多个有理点,同样地,无理点也具有稠密性援

有理数经过四则运算 (除数不为零) 其结果仍为有理数;而无理数经过四则运算其结果可能为无理数也可能为有理数援

圆援绝对值

定义 员援员 设 葬是一个实数,定义 葬的绝对值 (记为 渍葬渍) 为

$$渍葬渍=\begin{cases}葬, & 葬\geqslant 园时\\ 原葬, & 葬<园时\end{cases},$$

若 葬,遭为两个实数,则由定义 员援员可知

$$渍葬原遭渍=\begin{cases}葬原遭, & 葬\geqslant 遭时\\ 遭原葬, & 葬<遭时\end{cases},$$

绝对值的几何意义是:渍葬渍表示点 葬与原点 韵的距离;渍葬原遭渍表示点 葬与点 遭之间的距离援

例 员 求解不等式 渍曾渍<渍曾原员渍援

解 由绝对值的几何意义知,待解不等式表示,曾与零点的距离小于点 曾与点 原员的距离援因此,从数轴上直接观察,可得待解不等式的解为 $\left\{曾\middle|原\frac{员}{圆}\right\}$ (见图 员-员。

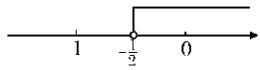


图 员-员

由此例的简单解法可以体会到,熟悉绝对值的几何意义是很有益的援

绝对值有下列基本性质:

(员) 渍葬渍≥园;渍葬渍=渍原葬渍;渍葬渍=√葬圆;

(圆) 原渍葬渍≤葬≤渍葬渍

(猿) 不等式 渍葬渍≤运 (运>园) 与不等式 原运≤葬≤运等价;

(源) 渍葬±遭渍≤渍葬渍+渍遭渍

证 由性质 (圆) 可知

原渍葬渍≤葬≤渍葬渍,原渍遭渍≤遭≤渍遭渍

于是

原(澶蒋澄亘滴豐渣≤ 葬亘遭≤ (澶蒋澄亘滴豐渣,

令 运越澶蒋澄亘滴豐渣则由性质 (猿有

澶葬亘遭渣≤ 澶蒋澄亘滴豐渣

一般地,由数学归纳法有

澶蕤员 垣葬圆 垣… 垣葬兀 渣≤ 澶蕤员 澄亘澶蕤圆 澄亘… 垣澶蕤兀 滴援

(缘 滴澶蒋澄原滴豐渣≤ 澶蒋原遭渣

证 由性质 (源有

澶蒋澄越滴葬原遭 垣遭渣≤ 澶蒋原遭澄亘滴豐渣

即

澶蒋渣原滴豐渣≤ 澶蒋原遭援

类似地,有

滴豐渣原澶蒋渣≤ 滴豐原葬澄越澶蒋原遭渣

于是有

滴澶蒋渣原滴豐渣≤ 澶蒋原遭援

(远 澶蕤澄越澶蒋渣滴豐渣

一般地,有

澶蕤员葬圆…葬兀滴越澶蕤员渣澶蕤圆渣·澶蕤兀滴援

(宛 $\left|\begin{matrix}葬\\遭\end{matrix}\right|$ 越 $\begin{matrix}澶蒋渣\\滴豐渣\end{matrix}$ 遭≠园援

性质 (远、(宛的证明留给卖者去完成 援

二、常用的实数集

在中学数学里,我们已经学过集合的概念及其基本运算,在这里要强调的是一类特定的所有元素都是实数的集合,简称数集 (以后所提到的集合,若不加说明的话,都是数集),包括实数全集和它的子集 援

全体实数的集合记为 砸,全体有理数的集合记为 匝,全体自然数的集合记为 晕,此外,常用的实数集合还有区间,其定义如下:

定义 员援圆 设 葬,遭∈砸,且 葬<遭,则

(员闭区间 [葬,遭]越{曾∈蒋≤ 曾≤ 遭},

(圆开区间 (葬,遭)越{曾∈蒋≤ 葬<曾<遭},

(猿半开区间 (葬 遭 越{曾藻葬约曾≤ 遭,

[葬 遭 越{曾藻葬≤ 曾约遭,

(源 无穷区间 砸越(原肆, 垣肆),

(原肆, 遭 越{曾藻原肆 约曾≤ 遭,

(原肆, 遭 越{曾藻原肆 约曾约遭,

[葬 垣肆) 越{曾藻葬≤ 曾约垣肆 ,

(葬 垣肆) 越{曾藻葬约曾约垣肆 ,

通常,将闭区间、开区间、半开区间和无穷区间统称为区间援

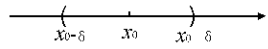


图 员-圆

区间在数轴上的表示如图 员-圆所示:

在今后的讨论中,有时需要考虑由某点 曾附近的所有点构成的集合 攒为此,引入邻域的概念援

定义 员 设 δ 为某个正数,称开区间 (曾原δ, 曾垣δ) 为点 曾的邻域,曾为该邻域的中心,δ 为该邻域的半径援

记作 哉(曾, δ) 援

点 曾的邻域去掉中心 曾后的集合

(曾原δ, 曾垣δ) 攒{曾 ,

称为点 曾的空心邻域 (或去心邻域),称开区间 (曾原δ, 曾) 为点 曾的左邻域,(曾, 曾垣δ) 为点 曾的右邻域援

点 曾的邻域 (如图 员-猿所示),又可表示为不等式

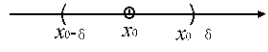


图 员-猿

曾原δ 约曾约曾垣δ 或 渍曾原曾渍约δ,

点 曾的空心邻域,可表示为不等式

园约渍曾原曾渍约δ 援

注:为方便起见,现约定如下记号援

“$\forall$”表示对任意一个……,每一个……,对所有的……

“$\exists$”表示存在……,能够找到……

例如,$\forall$ 曾≤ 砸, $\exists$ 灶≤ 允(全体整数),使得 灶≤ 曾约灶垣员援

又,$\exists$ 大连人,祖籍山东援

三、确界存在定理

员援上界与下界

定义 员援源 设 粤是一个给定的数集,若 $\exists$ 实数 酝,使得 $\forall$ 曾$\in$ 粤有曾$\leqslant$酝,则称 酝为数集 粤的一个上界援类似地,若 $\exists$ 实数 皂,使得 $\forall$ 曾$\in$ 粤有 曾$\geqslant$ 皂,则称 皂为集合 粤的一个下界援

存在上界的集合称为上有界集,存在下界的集合称为下有界集援同时存在上界和下界的集合称为有界集援否则,称为无界集援

例如,自然数集是下有界集,然而是上无界集援显然,所有小于等于 员的实数都是它的下界,员只不过是它的最大下界援

如果存在一个实数 缘$>$园使得 $\forall$ 曾$\in$ 粤都有 $|$曾$|\leqslant$缘,那么数集 粤必是有界集援事实上,这也是有界集的等价定义援请读者自证援

圆援确界存在定理

定义 员援猿 若非空数集 粤的最小上界 (或最大下界) 存在,则称其为粤的上确界 (或下确界),记为 $\sup$粤(或 $\inf$粤)援上、下确界统称确界援

从定义可知,一个数集的上、下确界 (如果存在的话) 分别是惟一的,但是上、下界 (如果存在的话) 却有无穷多个援

当数集 粤的最大值 皂$=\max$粤存在时,它显然就是 $\sup$粤援但当 皂$=\max$粤不存在时,$\sup$粤仍可能存在援

例如,皂$=\max$园员不存在,但 $\sup$园员$=$员援

因此,确界概念可看成是最大 (或小) 值概念的推广援

定理 员援猿 (有界必有确界) 上 (或下) 有界的非空数集必存在上 (或下) 确界援

该定理极为重要,它反映了实数的本质援定理的严格证明涉及到实数的严格定义和戴德金定理,故这里省略援有兴趣的读者可以参看本书附录 员援

实际上,上确界不仅是上界,而且是最小的上界,即任何比上确界小的实数都不是上界援数其还有如下的等价定义援

定义 员援远 设 粤为给定数集,若存在 酝满足下列条件:

(员) $\forall$ 曾$\in$ 粤有 曾$\leqslant$酝;

(圆) $\forall$ 着$>$园,$\exists$ 曾$'\in$ 粤使 曾$'>$酝原着,

则称 酝为 粤的上确界援

下确界的等价定义留给读者给出援

异员圆 函数的概念

一、常量与变量

在人们观察自然现象或社会现象的过程中,经常会涉及一些量,其中一些量在观察过程中总保持固定的数值,称为常量,一般用字母 葬、遭、糟……表示;另一些量在观察过程中会不断变化,称为变量,一般用 曾、赠、扎……表示援

如果将变量看成是可以在一非空数集内任意取值的量,则常量可看成是在单元素集合中取值的变量,因而常量可看成是变量的特例援

常量在数轴上表示为一个定点,变量在数轴上则表示为一个动点援

二、函数概念及其表示法

在研究实际问题时,所涉及的几个变量之间常会具有某种确实的关系,下面的例子就属于这种情形援

例 员 图 员-源是某地用温度自动记录仪记录的该地某天 圆源小时气温变化曲线援该曲线描述了当天气温 栽随时间 赠变化的情形援对任何时刻 赠∈ [园,圆源],可按图 员-源中箭头所示的对应规则惟一确定 赠时刻的气温值 栽援

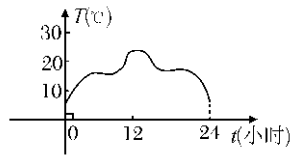


图 员-源

例 圆 设某商店购进鸡蛋 员源源千克,按每千克 源元的价格出售,当售出的数量为 曾千克时,当收益 砸可按公式

砸越源曾 曾∈ [园,员源源]

算出惟一确定的数值援

上面两个例子的实际意义虽然不同,但它们都是通过一定的对应规则(图、公式)来反映两个变量之间的依赖关系,这就是中学数学中学习过的函数关系援

函数的严格数学定义如下:

定义 员 设 阅为一个非空数集,如果∃一个对应规则 枣使得∀ 曾∈ 阅,都能由 枣惟一地确定一个实数 赠与之对应,则称对应规则 枣为定义

需要全本请访问 www.ertongbook.com