

第一章

现代数学的开始
(1900~1918)

引 言

19~20 世纪之交，欧洲是世界的政治和经济中心，第一次世界大战在这里爆发。同时，欧洲也是世界的数学中心。1900 年，D. 希尔伯特的演说提出了“23 个数学问题”，1905 年和 1912 年爱因斯坦先后发表狭义和广义相对论，表明德国正在领导数理科学的新潮流。

庞加莱之后的法国数学，渐渐缩为“函数论王国”；英国则以硬分析著称；印度数学天才拉马努金像流星掠过天空。

数学哲学论战和数理统计学的诞生，影响整个 20 世纪。

1918 年，德国在第一次世界大战中战败，但是她的数学传统仍然在世界称雄。

1

19世纪末年的世界数学

数学历史发展的后浪推前浪，不停地向前奔去。17世纪的英国资产阶级革命把查理一世国王送上了断头台，牛顿 Isaac Newton, 1642~1727) 的微积分思想随即诞生在英伦三岛上。资本主义的生产方式带来了18世纪法国大革命，数学的中心也移到了法国。拉格朗日(Joseph Louis Comte de Lagrange, 1736~1813) 、拉普拉斯(Pierre-Simon Marquis de Laplace, 1749~1827) 、勒让德(Adrien-Marie Legendre, 1752~1833)、蒙日(Gaspard Monge, 1746~1818) 都是一代数学权威。1794年诞生的法国综合技术学校成为19世纪初的世界数学中心。傅里叶(Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768~1830) 的调和分析和柯西(Augustin-Louis Cauchy, 1789~1857) 的分析学是其中的代表。他们的影响一直持续到今天。进入19世纪中叶，德国的格丁根大学崛起，数学王子高斯(Carl Friedrich Gauss, 1777~1855) 称雄世界。只活了40岁的黎曼(Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826~1866) 为人类留下了无数的数学珍品。法国、德国在数学上争雄的局面贯穿了整个19世纪。清代学者赵翼(1721~1814) 有“江山代有才人出，各领风骚数百年”的诗句。在近代数学史上，领先数百年是不可能的，夺取几十年的霸主地位已经很难了。

人们经常提到19世纪上半叶的数学思想革命。伽罗瓦(Evariste Galois, 1811~1832) 的群论，罗巴切夫斯基(Nikolai Ivanovich Lobachevsky, 1792~1856) 的非欧几何学，柯西的复变函数论为人们打开了全新的天地。如果说在此以前的数学还或多或少依赖于物理学和工程学，那么这时的数学已经完全独立出来，数学的

研究对象更加抽象化，数学的意境充满了文化创造精神。继复数获得广泛承认之后，1853年哈密顿 William Rowan Hamilton, 1805~1865 发现四元数。“数学是人类思想的自由创造”的观念开始传播，纯粹数学和应用数学的分野逐渐显露。

另一方面，数学在认识现实世界的征程中不断取得伟大成就。1846年，英国的亚当斯 John Couch Adams, 1819~1892 和法国的勒威耶 Urbain Jean Joseph Le Verrier, 1811~1877 分别独立地用数学方法计算出海王星的轨道，预测了这颗行星的发现。高斯在大地测量中发展了微分几何学。傅里叶分析推动了热力学以及振动理论。更重要的是英国的强大应用数学传统继续大放异彩。哈密顿的最小作用原理给力学以新的面貌，而麦克斯韦 (James Clerk Maxwell, 1831~1879) 于 1864 年发表的电磁学方程，更是人类运用数学研究自然规律的又一里程碑。

进入 19 世纪后期，德国的国家实力陡增。在 1870~1871 年的普法战争中，巴黎陷落，拿破仑三世被俘。在数学上，德国提出了明确的目标，要谋求世界领先地位。执行这一使命的是克莱因 (Christian Felix Klein, 1849~1925)。

克莱因出身于德国中产阶级家庭。1865 年进入波恩大学，受到著名学者普吕克 Julius Plucker, 1801~1868 的影响，开始研究几何学。1869 年来到格丁根大学工作，并周游欧洲诸国。1872 年到埃尔朗根大学就任正教授，并在大学评议会上发表《新近几何学研究的比较考察》的演讲，用运动群下的不变量来对几何学进行分类，这就是著名的埃尔朗根纲领这一几何学上划时代的工作，在此后的 50 年内一直处于几何研究的中心地位。



克莱因

1886 年春，克莱因就任格丁根大学教授。虽然继续从事数学研

究，但更多进行行政组织、数学教育、国际交流等方面的活动。他的目标是把格丁根大学建成世界第一流的数学中心。10年之后，努力开始成功。1895年初，大数学家希尔伯特（David Hilbert, 1862~1943）来到格丁根，克莱因本人则被授予枢密顾问官职务，格丁根大学的学术地位陡然升高。1902年，闵科夫斯基 Hermann Minkowski, 1864~1909 也来到这里。这三架马车，终于把格丁根大学建成 20 世纪初期的世界数学中心。其中，克莱因是当然的领袖。克莱因晚年关注应用数学和数学教育，开创了世界第一流数学家关心中小学数学教育改革的先例，影响深远。

19 世纪后期，除了学术地位不断上升的格丁根大学之外，柏林大学是当然的数学中心。先是狄利克雷 Gustav Peter Lejeune Dirichlet, 1805~1859 在该校工作了 27 年，赢得了很高的数学声誉。1854 年，他去格丁根大学接替去世的高斯。柏林大学的数学教席，则由库默尔（Ernst Eduard Kummer, 1810~1893）、魏尔斯特拉斯（Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815~1897）和克罗内克（Leopold Kronecker, 1823~1891）三位名家先后承担。库默尔长期担任柏林大学的校长，以“理想数”的工作成为现代代数数论的先驱。克罗内克在代数学、数论、椭圆函数论方面成就卓著，并有非常广泛的社会和学术联系，被称为德国数学的无冕之王。不过，对后世影响更大的则应是魏尔斯特拉斯。

魏尔斯特拉斯出身于一个政府官员家庭。父亲叫他到波恩大学攻读法学博士学位。由于不喜欢，他未毕业就离开了。后来在一所神学哲学学院读数学，通过中学教师资格的国家考试以后，曾任中学教师达 15 年之久。期间他发表椭圆函数论的重要文章，被破格授予哥尼斯堡大学名誉博士学位。1856 年到柏林皇家综合工科大学任数学教授，次年到柏林大学任副教授，1864 年升任正教授。1873 年出任柏林大学校长，成为左右德国数学界的一位领袖人物。这种声誉，不仅因为他是校长、教授、许多论文的作者，更主要的是他的学术风格。魏尔斯特拉斯是 19 世纪末分析严格化进程的代表

人物，反映了那个时代和 20 世纪整个数学严谨性的潮流。他首先给出严密的实数理论，第一个明确地使用 ε - δ 语言，引进有界集、无界集、集的内点、外点、极限点、连通性等概念。特别是运用一致收敛的概念得出极限交换的定理。这一切，对今天的数学系大学生而言，似乎是理所当然的事。 ε - δ 语言的精髓已经渗入现代数学的每一根血管，牵动着每一根神经。追根溯源，魏尔斯特拉斯做出了高于一切的贡献。希尔伯特认为：“魏尔斯特拉斯以其酷爱批判的精神和深邃的洞察力，为数学分析建立了坚实的基础通过澄清极小、极大、函数、导数等概念，他排除了在微积分中仍在出现的各种错误提法，扫清了关于无穷大、无穷小等的各种混乱观念，决定性地克服了源于无穷大、无穷小朦胧思想的困难……今天，分析学能达到这样和谐、可靠和完美的程度……本质上应归功于魏尔斯特拉斯的科学活动。”^[1] 魏尔斯特拉斯终身未婚，他的两个妹妹也未出嫁，她们一起照料魏尔斯特拉斯的生活，共度人生。

另一位为数学分析严密化作出重要贡献，而且也是终身未娶的德国数学家是戴德金 Julius Wilhelm Richard Dedekind, 1831 ~ 1916) 他以有理数的“分割”定义实数，对实数的连续性给出了严密而直观的叙述。同时，戴德金也奠定了代数数论的系统理论。不过戴德金只是不伦瑞克大学的一名教授，在社会影响上自然不及魏尔斯特拉斯了。



戴德金

对 20 世纪数学影响深远的另一位德国数学家是康托尔 (Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 1845~1918)。他所创立的集合论成为 20 世纪数学的基础。集合论涉及对“无限”的理解和处理，从可数集、不可数集、超限数集等等，打开了一个个新的领域。它的成功标志着人的思维能力的一次飞跃。另一方面，每一门严密的数学学科往往都要用集合的语言开始描述。集合论的悖论导致了

数学基础的论战，人类思维的极限受到了集合论思想的严重挑战。集合语言甚至渗入到中小学生的数学课本，成为当今人们相互交流的工具；一门数学学科，从来没有像集合论那样会影响到普通百姓的日常语言。正因为如此，康托尔也成为数学史上最富想象力，同时也是最有争议的一位数学家。



康托尔

康托尔出生于俄国的圣彼得堡，14岁时移居德国。1866年，他在柏林大学获得博士学位，在数学思想上，受到魏尔斯特拉斯的多方面影响。1869年康托尔在哈雷大学谋得教职。这是一所很小的不大出名的大学。此前他的研究工作涉及数论和二次型等代数问题，并不引人注目。1871年前后，他在研究傅里叶级数唯一性时，

发现除去某种无穷点集之外，一个函数的傅里叶级数若能处处收敛于零，则这一函数恒为零。这种点集的性质使康托尔注意到研究“集合”的重要性。

1874年，29岁的康托尔在德国著名的《克雷尔数学杂志》(Crelles Journal für Mathematik)上发表《关于一切代数实数的一个性质》的论文，首次提出超穷集合理论，引起人们的注意。1895~1897年间，康托尔发表《超限数理论基础》共两卷，对他以前的有关论文作了总结。

康托尔的工作虽然如此重要，但他的遭遇却是不幸的。哈雷大学教授的工资相当微薄，全家的经济状况很不好。到柏林去找一份收入高的工作，曾是他的一个迫切愿望。在柏林大学毕业的康托尔却无法在柏林立足。原因很简单：柏林大学数学教授克罗内克极力反对。克罗内克虽然并非校长或官员，却因社会声望和广泛交际被认为拥有无限的权力。他的数学哲学是想把一切都算术化，只承认数列那样的“潜无限”否认“实无限”的存在。这些观点和魏尔斯特拉斯的观点相左。他宣称要“找出现有分析学赖以存在的一切

结论之错误”。1888年，魏尔斯特拉斯向朋友们宣布将和克罗内克断交。这对像魏尔斯特拉斯那样的柏林大学校长而言，不过是不交往而已。但大权威克罗内克对小人物康托尔的批判，阻止康托尔到柏林工作，散布对超限数理论的怀疑，对康托尔不啻是一种毁灭性的打击。在克罗内克看来，康托尔乃是错误地追随魏尔斯特拉斯的一名后学。克罗内克贵族式的孤傲没有得到多数人的支持，但这种伤害足以使情绪低落的康托尔在1884年患上忧郁症，经常要发病。到了1899年，集合论的悖论在他头脑里萦绕，旧病再次复发，住进了医院。以后的一二十年中，他断续地在哈雷大学精神病院中度过，并在那里离开人世。

1926年，希尔伯特称赞康托尔的超限数理论是“数学精神最令人惊羡的花朵，人类理智活动最精美的成果”。^[2]苏联的柯尔莫哥洛夫(Andrey Nikolaevich Kolmogorov, 1903~1987)则说：“康托尔的不朽功绩，在他敢于向无穷大冒险挺进，他对似是而非的论点、流行的成见、哲学的教条等作了长期的不懈的斗争。因此，他成为一门学科的创造者，而这门学科已成了整个数学的基础。”^[3]

在德国学派影响之下，挪威数学家索福斯·李(Marius Sophus Lie, 1842~1899)创立了李群和李代数理论。20世纪几乎所有的数学学科都和李群发生联系。李曾在莱比锡大学任教授，对欧洲各国的数学产生了很大的影响。

自牛顿以来，英国数学一向偏重应用，19世纪仍然保持着这一传统。但在19世纪的下半叶，纯粹数学出现了两颗明星：西尔维斯特(James Joseph Sylvester, 1814~1897)和凯莱(Arthur Cayley, 1821~1895)。他们两人都是攻读数学出身，于19世纪50年代进入法学界，担任过多年的律师，并因志趣相投成为终生好友。此后又双双回到数学研究，共同发展代数不变量理论，特别是线性代数中的行列式和矩阵理论。这些工作在20世纪变得十分重要而普及。包括哈密顿发表的四元数工作在内，他们在代数学上的贡献，形成了英国纯粹数学的一次高潮。值得一提的是，西尔维斯特是美国纯

粹数学的奠基人之一。他在美国约翰·霍普金斯大学任教授多年，创办了美国第一份数学杂志：《美国数学杂志》（American Journal of Mathematics）。凯莱也曾到该校讲学。

19世纪的俄国，开始有了自己的数学研究。罗巴切夫斯基的工作自然引起国际瞩目，切比雪夫 Pafnuty Ljvovich Chebyshev, 1821~1894）在概率论上的研究也别开生面。但在整体实力上无法和西欧各国相比。至于东方的印度、日本和中国，数学水平落后于西方约有200年，现代数学研究则是20世纪的事了。

19世纪下半叶，能和德国数学相抗衡的只有以庞加莱为代表的法国数学，我们将在下一节叙述。

参 考 文 献

- [1] 沈永欢. 魏尔斯特拉斯. 见：吴文俊主编. 世界著名数学家传记（下集）北京：科学出版社，1995. 965
- [2] Hilbert D. Über das Unendliche Mathematische Annalen. 1926, 95: 161~190
- [3] 李娜、张锦文. 康托尔. 见：吴文俊主编. 世界著名数学家传记（下集）北京：科学出版社，1995. 1117

2

世纪之交的法国数学领袖 —— 庞加莱

19世纪前期的法国，柯西是无可争辩的数学领袖。1857年柯西去世之后，世界数学中心渐渐向德国转移。数学天平逐渐向德国倾斜是和19世纪末的德国社会经济发展相关的。以下是19世纪下半叶各主要工业国家工业产值由高到低的排名：

60年代英，法，美，德

70年代英，美，法，德

80年代英，美，德，法

90年代美，德，英，法

尽管工业产值和数学发展不见得成正比，但是也不能说毫无关系。

然而，在世纪之交，世界数学界仍然是法德争雄的格局。法国数学仍然有许多骄人的成绩，埃尔米特（Charles Hermite, 1822~1901）若尔当（Camille Jordan, 1838~1922）以及达布（Jean-Gaston Darboux, 1842~1917）等是主要的代表人物。待到庞加莱（Jules Henri Poincaré, 1854~1912）出现在法国数坛，就很快成为世界性的领袖人物。巴黎高等师范学校和巴黎综合工科学校仍然是世界数学家的摇篮。

埃尔米特毕业于巴黎综合工科学校。1862年进入该校任讲师，1867年升任教授。他的早年工作涉及椭圆函数论。以后的著名工作是证明了 e 的超越性，这使他享有分析学家的声誉，但就他对后世的影响而言，还是关于复二次型的工作最为重要。在物理学、几何学、算子理论中，埃尔米特已成为复共轭、复对称的代名词。

若尔当也是巴黎综合工科学校的学生，一直以工程师的身份做数学研究，同时在巴黎综合工科学校和法兰西学院任教。1881

年成为法兰西科学院院士。他作为代数学家，首先关注伽罗瓦的群论，成为第一个在伽罗瓦基础上做系统研究的数学家，也是使伽罗瓦理论通俗化的先驱。他在群和群表示理论上的开创性工作，是日后代数发展的起点。1870年，克莱因和索福斯·李一起来到巴黎，和若尔当一起研究三维空间中所有运动群的确定，显然这是连续群研究的先声。今天，若尔当的名字更多地和分析学中的若尔当曲线、矩阵论中的若尔当标准型、积分论中的若尔当容量联系在一起。

达布则是在巴黎高等师范学校完成学业，并在该校任教的数学家。他的主要工作领域是微分几何。他详细研究曲面理论、曲线坐标、曲线和曲面的变形等基本问题。他所著的《曲面通论教程》是一部研究力学、变分法、偏微分方程、极值原理等学科的工具书，他对这些学科之间的内部联系有着非常深入而透彻的理解，成为一时的经典。同样，达布的影响不限于几何。他在积分论中研究黎曼可积的充分必要条件给出的现在称为上和、下和、上积分、下积分、达布和等概念，已经成为一种经典的理论。

综合以上的介绍，我们可以感觉到19世纪末期法国数学的气息更着重于经典问题的深入刻画。注意几何、分析上的严密化。解决一些悬而未决的问题。相对于德国学派的工作，如克莱因的埃尔朗根纲领、康托尔的集合论、索福斯·李的连续群论、库默尔的代数数论等新方向、新思想的开拓，法国数学的发展似乎过分拘谨了。但是，庞加莱的出现，使法国数学出现了新的转机。

庞加莱诞生于法国的南锡（Nancy，这是法国科学精英的荟萃之地）家族显赫。父亲是一位生理学家，叔父是国家官员。堂弟雷蒙·庞加莱（Raymond Poincaré）曾出任总理兼外交部长，1913~1920年间，是法兰西第三共和国的第九任总统。

庞加莱的童年生活很不幸。5岁患白喉，运动神经功能不协调。他平时行动笨拙，物理实验做不好是出了名的。他视力不好，上课看不清黑板上的字，全凭耳朵听，常常显得心不在焉。不过这种记

忆力的训练，使他以后能在头脑里完成数学计算和迅速撰写论文。他 15 岁进入巴黎综合工学校，打算做一名工程师，但一有空就研究数学。1878 年，他向法兰西科学院提交有关《微分方程一般解》的论文，次年即获得科学博士学位。两年后的 1880 年 庞加莱成为巴黎大学教授，讲授力学和实验物理课程此后的几十年，他一直在巴黎度过。

庞加莱一生写了约 500 篇论文和 30 部著作，这还不包括他所写的畅销科普作品和哲学名著。由于他的杰出成就，庞加莱几乎赢得了法国政府所能给予科学家的一切荣誉。在 33 岁那年，他被选为法兰西科学院院士，1906 年任法兰西科学院院长，1908 年，当选为法兰西语文学院院士。由于他的通俗文章的文笔非常优美，甚至获得了法国作家中的最高荣誉 - 法国文学协会会员。



庞加莱

数学史家评论说，庞加莱是一位科学的征服者，而不是殖民者。确实，他从不在自己开拓的领域内长期停留，而是继续大踏步前进，去征服更新的科学领域。以下是一张由庞加莱开创的新领域的清单：

1. 自守函数论。自守函数是通常三角函数、椭圆函数的推广。它的引入，使得微分方程、代数几何、代数数论找到了新的立足点。

2. 整函数的‘亏数’理论。他第一个研究整函数‘亏数’和函数值增长的关系，为以后的整函数与亚纯函数理论打开了道路。

3. 有理数域上的代数几何学。1901 年的一篇论文开创了代数方程有理数解的研究，成为代数数论的一项原发性工作。

4. 微分方程的定性理论。这门崭新学科研究微分方程解在奇点附近的性态，根据极限环的情况可以判断解的稳定性。

5. 动力系统理论。开创动力系统理论研究，完成了现在称

为‘庞加莱回归定理’的工作。

6. 三体问题. 在三体中两个物体的质量比另一个小得多的情况下, 得到三体问题的周期解. 引进渐近展开的方法, 得出严格的天体力学计算方法.

7. 组合拓扑学 即‘位置分析’. 庞加莱引入流形的三角剖分、单纯形、复合形、关联系数矩阵等一系列新工具, 以及贝蒂 (Betti) 数、挠系数、同调群等一系列新概念, 证明了流形的同调对偶定理. 这是同调论的开端. 此外, 又定义流形的同伦群, 现称为庞加莱群. 在 20 世纪获得长足发展的代数拓扑学完全是按照庞加莱的思想展开的.

8. 对狭义相对论的创立有独到的贡献.

除了这些开拓新领域的工作以外, 庞加莱还有许多原创性的成果. 对多复变函数论、李群、李代数、狄利克雷问题、拉普拉斯算子特征值问题等的研究都有关键性的推进.

庞加莱的远见是令人钦佩的. 他能够理解索福斯·李的工作, 并投入很高的研究热情. 1899 年用新的方法证明了索福斯·李的第三基本定理, 引入李代数的包络代数概念. 此外庞加莱也是最先认识埃里·嘉当 (Elie Joseph Cartan, 1869~1951) 工作的重要性的人. 在世纪之交时, 拓扑学、李群、李代数以及嘉当的几何工作还是冷门, 少人问津, 更为大多数以研究函数论等传统分析为主的法国数学家所轻视. 但是 进入 20 世纪之后 这些学科都大放异彩, 成为数学发展的核心部分.

庞加莱还有一批重要的哲学著作, 如《科学与假设》(1902)、《科学的价值》(1905)、《科学与方法》(1909). 他是约定主义的代表人物, 认为科学公理是为了人们的表述方便而共同约定的. 约定可以选择, 但要有实验事实为根据, 避免出现矛盾. 在数学基础上持直觉主义观点, 反对罗素的逻辑主义、希尔伯特的形式主义, 不承认实无限, 只认可潜无限. 庞加莱主要是一个数学家, 但或许在物理学和哲学上的工作更为一般人所知. 关于他的哲学思想 列宁

曾说他是“一位伟大的物理学家 渺小的哲学家”。[2]

尽管庞加莱获得了最高的学术荣誉，也受到科学界的高度赞扬，但是一些传统的数学家并不完全支持他。分形几何学的创始人芒德布罗 (Benoit B. Mandelbrot, 1924~) 在 1994 年的一篇文章中这样提到庞加莱：

“在最近发表的埃尔米特 庞加莱的导师 给米塔格-列夫勒 (Magnus Gustaf Mittag-Leffler, 1846~1927) 的信中，埃尔米特常常抱怨庞加莱不听好意的劝告，不修饰证明和不发表严格的证明。埃尔米特和皮卡 (Charles Emils Picard, 1856~1941，庞加莱后来的导师) 认为庞加莱是不可救药的，于是不让庞加莱教数学，只让他教数学物理、天文学。在庞加莱发表的演讲录中包括基础光学、热力学、电磁学——二年级或三年级的理论物理课。庞加莱在 1895 年发表的《位置分析》(今称拓扑学) 在相当一个时期内被认为是‘死胡同’。”[3]

作为直觉主义者的庞加莱，在发表论著时也许没有达到当时某些数学家所要求的严密性。但是，历史证明，庞加莱做得是对的。如果为了追求不十分必要的严密性，而把重要的拓扑学思想丢弃在字纸篓里，那对数学的进展将是多大的损失！

参 考 文 献

- [1] Dieudonne J. Poincare. In: Gillispie C C. Dictionary of Scientific Biography. New York: Charles Scribner's Sons Publishes, 1981
- [2] 列宁. 唯物主义和经验批判主义. 见 列宁选集 (第二卷) 第二版. 北京: 人民出版社 1972. 166
- [3] Mandelbrot B. Response to "Theoretical Mathematics". Bulletin of AMS, 1994. 30 (2): 195

3

光辉的一页 ——希尔伯特的 23 个数学问题

巴黎圣母院的钟声迎来了 20 世纪. 1900 年 人们都把眼光放在未来: 无产阶级正在组织沸腾的革命, 科学家憧憬着惊人的突破, 艺术家在追逐时代的潮流……. 这一年的 8 月 6 日 国际数学家代表大会在巴黎召开. 年方 38 岁的德国数学家大卫·希尔伯特 (David Hilbert, 1862~1943) 走上讲台 第一句话就问道: “揭开隐藏在未来之中的面纱, 探索未来世纪的发展前景, 谁不高兴呢?”^[1] 接着, 他向到会者也向国际数学家大会提出了 23 个数学问题, 这就是著名的希尔伯特演说. 这一演说, 成为世界数学史上的重要里程碑, 为 20 世纪的数学发展揭开了光辉的第一页!

科学发展的每一个时代都有自己的问题. 希尔伯特站在当时数学研究的最前沿 高瞻远瞩地用 23 个数学问题 预示 20 世纪数学发展的进程. 现在, 时光已过去了一百年 这 23 个问题约有一半已获得解决. 百年来 人们把解决希尔伯特问题 哪怕是其中一部分, 都看成是至高无上的荣誉. 据统计 从 1936 年至 1974 年 被誉为数学诺贝尔 (Nobel) 奖的菲尔兹 (Fields)

国际数学奖的 20 名获奖人中, 至少有 12 人的工作与希尔伯特问题有关. 1976 年美国数学会组织评论 1940 年以来的美国十大数学成就, 就有三项是希尔伯特问题的 (1)、(5)、(10) 三个问题的解决. 重要的问题历来是推动科学前进的杠杆之一, 但一位科学家如此自觉、如此集中地提出一整批问题, 并且如此持久地影响一门学



希尔伯特

科的发展，在科学史上确是罕见的。

希尔伯特 1862 年生于德国的哥尼斯堡（现为俄罗斯的加里宁格勒）。1884 年获哥尼斯堡大学博士学位。1895 年担任著名的格丁根大学教授。直到 1943 年去世。他最初的研究领域是代数不变量和代数数论。1900 年前后致力于数学基础——元数学。后来又转到分析方面。在积分方程、变分法、泛函分析、理论物理等许多领域作出了杰出的贡献。

希尔伯特为发表 1900 年的重要演说，曾作过仔细的准备。1899 年，第二届国际数学会的筹备机构邀请希尔伯特在会上作主要发言。希尔伯特接受了邀请，并计划在这世纪交替之际作一个相称的发言。当时他有两个想法：或者作一个为纯粹数学辩护的演讲，或者讨论一下新世纪发展的方向。为此，他写信与他的好友、杰出的数学家闵科夫斯基进行商量。闵科夫斯基于 1900 年 1 月 5 日回信说：“最有吸引力的题材莫过于展望数学的未来，列出在新世纪里数学家应当努力解决的问题这样一个题材，将会使你的讲演在今后几十年的时间里成为人们议论的话题。”当然，闵科夫斯基也指出了作这类预见性发言会遇到的困难。

经过一番斟酌，希尔伯特决意选择第二个想法，提出一批急需解决的重大数学问题。希尔伯特曾指出，历史上通过提出问题会导致整门新学科的诞生。他举了三个典型例子。第一，伯努利 (Bernoulli) 最速降落线问题是现代数学分支——变分法的起源。第二，费马 (Fermat) 问题。它看上去“非常特殊，似乎不十分重要”，却大大推动了代数数论的进展，现代代数数论中的核心概念“理想数”正是为了解决费马问题而提出的。第三，三体问题。它对现代天体力学起了关键性的作用。这三个问题，既有纯粹从数学本身提出的，也有从基本自然现象提出的。希尔伯特提出的问题后来也确实形成了许多新的数学分支，达到了预期的目的。

对希尔伯特来说，在国际数学家会议上报告自己的成果，远比提出新问题要容易得多。当时，希尔伯特正当科学创造活动的盛年，

业已作出了许多世所公认的成绩。人们本来以为他会拿出优异的数学论文来回答国际数学界，却没有想到他竟会选择如此困难的题目来作讲演。希尔伯特接受任务以后，一直做着仔细的准备，直到6月份，他的讲演稿还没有写出来。预定8月在巴黎举行国际数学家会议的日程已发到代表手中，其中没有列上希尔伯特的讲演。7月中旬，他才给闵科夫斯基寄去第一稿的样本。闵科夫斯基和希尔伯特的另一位学长和朋友赫尔维茨 (Adolf Hurwitz, 1859~1919) 对初稿进行研究，帮助希尔伯特作了修改。如果从1899年底开始考虑选题算起，希尔伯特为了提出这23个题目整整花了8个月的时间。

希尔伯特的演说获得了极大的成功。各国的数学杂志纷纷转载他的演说稿，大批数学家投入解决希尔伯特问题的激流中去。问题3) 当年就被希尔伯特的学生德恩 Max Wilhelm Dehn, 1878~1952 所解决。迄今为止已完满解决的希尔伯特问题约占一半，有几个问题比较笼统，难以判定解决与否，大约还有三分之一的问题仍悬而未决，有的有了部分进展，有的则差得很远。1975年在美国的伊利诺斯大学召开了一次国际数学会议，邀请世界著名数学家参加，专门研究希尔伯特问题的进展。会后出版的论文集详细地介绍了各个问题的进展。^[2]

大数学家外尔 (Claude Hugo Hermann Weyl, 1885~1955) 在悼念希尔伯特时曾经这样说过：“希尔伯特就像穿杂色衣服的风笛手，他那甜蜜的笛声诱惑了如此众多的老鼠，跟着他跳进了数学的深河。”^[3] 对有志于此的人们来说，这23个问题正是这样一种甜蜜的笛声，我们至今似乎仍能听到他的召唤。值得高兴的是中国数学家在问题8) 和问题16) 上曾经作出一些贡献。

附： 希尔伯特的 23 个问题的解决情况

(1) 康托尔连续统基数问题

1874年，康托尔猜测在可数集基数和实数集基数之间没有别的基数，即著名的连续统假设。1938年，侨居美国的奥地利数学家