《高等数学》的初等数学基础

肖果能摇邓国栋摇编著

中南大学出版社

前摇摇言

摇摇近几年,我国高等教育的发展出现了良好的势头,各大学普遍扩招,各级各类新型大学蓬勃兴起援这不仅为我国国民经济的持续发展培养了人才,而且为广大有志青年提供了接受高等教育的机会,逐步地满足了人民群众对于高等教育的日益增长的需要援

《高等数学》是高等学校的一门重要的基础课,这门课程的学习需要有较好的初等数学基础援一部分学生正是因为初等教学基础方面的原因在《高等数学》课程的学习中遇到了困难援我们和同事们都认为有必要帮助大学新生加强基础、扫清学习障碍,使他们树立信心,培养兴趣,比较容易地进入《高等数学》课程的学习,顺利地完成学业援有感于此,我们编写了这本书援

本书在取材上立足中学数学而高于中学数学,面向《高等数学》课程的教学,讲解必要的初等数学知识,特别注重《高等数学》课程教学的需要和与高等数学教学内容的衔接援在编排上坚持低起点、高观点援一方面,以中学教材为背景,但不假定学生已掌握了中学数学的内容;另一方面,根据高等数学课程的教学要求审视初等数学,切实把握概念的本质和理论的体系,注重数学的思想方法,努力追求基础性、实用性和趣味性的统一援

本书的特点还在于用很少的篇幅概括了学习高等数学课程所必需的全部初等数学知识,以少驭多,内容丰富,语言精炼,结构严谨,能使学生在很短的时间内作好充分的准备,以更好的心态进入到高等数学课程的学习援全书共十七个专题,前六个专题建立了全

书的理论框架，其余部分是代数、三角及解析几何的基本内容，各专题相对独立，可根据需要选讲援另外，在预篇中简要地介绍了学习数学所应掌握的逻辑知识，它们对于理解数学的理论是必要的援附录中罗列了常用的公式、法则、数表，以供查找援教师在使用本书时可根据学生的实际情况选讲所需要的部分，并且结合教学指导学生阅读相关内容援

编者感谢湖南涉外经济学院领导对本书的关心，感谢教研室老师们的大力支持援因时间关系，仓促成书，不免错漏，诚恳地期待读者批评指正援

编摇摇者

圆园园圆年 怨月 圆园日于湖南涉外经济学院

目摇摇录

预篇摇 逻 辑 知 识

员郾命题

能够判断真假的语句叫做命题援

命题可划分为两类,一类为真命题,一类为假命题援

一个命题与事实相符或者可以由已确定为真的命题用逻辑的方法推证,它就是真命题,或者说命题成立,例如:

摇摇“缘跃猿”,“太阳从东方升起”…

非真的命题就是假命题,或者说命题不成立,例如:

摇摇“缘<猿”,“太阳从西边升起”…

在数学中,“公理”是已经为人们承认确定为真的命题,他们是研究问题的出发点援定理”是从公理及已证明的定理经过逻辑推证确定为真的命题,他们既是证明的结果,又是推证新的定理的依据援对于一般的命题,我们关心的是其真假,即对命题的真假作出判定援

圆郾命题的复合与复合命题

由已知的命题(不论其真假)通过复合可以产生新的、更加复杂的命题,复合的方法是用逻辑联结词联结已有的命题,基本逻辑联结词有:

“或”、“且”、“非”援

通过复合而得到的命题称为复合命题援下面我们讨论复合命题及其真假,我们用 葬遭…表示命题援

员“或”

用“或”联结命题 葬遭得到复合命题“葬或 遭”援其真假性由 葬遭的真假决定:当 葬遭中至少一个为真时,“葬或 遭”为真,否则为假,故“葬或 遭”的真假可用下面的表(称为真值表)表示:

葬	遭	葬或 遭
真	假	真
假	真	真
真	真	真
假	假	假

摇摇[例 员] 摇判定下列命题是否为真援

(员) 苑跃愿或 苑约愿;

(圆) 圆原或 圆缘是 缘的倍数;

(猿) 如果一个角的两边与另一角的两边对应平行,则这两个角相等或互补;

(源) 员是素数或偶数援

解 (员) 因“苑约愿”真,故“苑跃愿或 苑约愿”真;

(圆) 因“圆缘是 缘的倍数”真,故“圆原或 圆缘是 缘的倍数”真;

(猿) 在命题的条件下,两角“相等”或“互补”两种情形至少有一种发生,故此命题为真;

(源) “员是素数”、“员是偶数”均假,故此命题为假援

圆“且”

用“且”联结命题 葬遭得到复合命题“葬且 遭”,其真假亦由 葬遭的真假决定:当 葬遭同时为真时“葬且 遭”为真,否则为假援故“葬且 遭”有下面的真值表:

葬	遭	葬且遭
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

摇摇[例 圆]摇判定下列命题的真假援

(员) 有两个角为 源缘毅的三角形是等腰直角三角形；

(圆) 员圆是 源愿与 猿远的公约数；

(猿) 菱形的四边相等,两对角线也相等援

解 (员) 有两个角是 源缘毅的三角形既是等腰三角形,又是直角三角形,故此命题为真；

(圆) 员圆既是 源愿的约数,也是 猿远的约数,故此命题为真；

(猿)菱形的四边相等,但两对角线不必相等,故此命题为假援

猿 “非”

命题“非 葬”是命题 葬的否定,由于一个命题和它的否定不能同时为真,也不能同时为假,故当 葬为真时非 粤为假,葬为假时非 葬为真,即有真值表：

葬	非 葬
真	假
假	真

摇摇[例 猿]摇设 葬为下列命题,试述命题“非 葬”并判明其真假援

(员) 员是素数；

(圆) 等腰三角形两底角相等；

(猿) 相等的两个角必是对顶角援

解 (员) “非 葬”是“员不是素数”,命题为真援

(圆) “非 葬”是“等腰三角形两底角不相等”,命题为假援

(猿 “非 葬”是“相等的两角不一定是对顶角”,命题为真援

命题复合可以重复多次,得到更加复杂的命题援例如,“葬或 遭或 糟或 凿”、“葬且 遭且 糟且 凿”即是由命题 葬,遭,糟,凿多次复合而成的命题援当且仅当 葬,遭,糟,凿四个命题中至少有一个为真时,“葬或 遭或 糟或 凿”为真;当且仅当四个命题同时为真时“葬且 遭且 糟且 凿”为真援联结词“非”也可以重复,例如非“非 葬”即 葬援

猿郾复合命题的否定援

在数学中,经常需要否定一个命题(例如用反证法证题时),因此必须学会否定命题的方法,特别应该掌握复合命题的否定援

员“葬或 遭”的否定(即非“葬或 遭”)

设 葬是命题“甲是大学生”,遭是命题“乙是大学生”,

则“葬或 遭”表示“甲是大学生或乙是大学生”,

即“甲、乙两人中至少有一个是大学生”,

其否定是“甲、乙都不是大学生”,

即“甲不是大学生”且“乙不是大学生”,

也就是“非 葬且非 遭”援

由此可知,非“葬或 遭”即“葬或 遭”的否定是“非 葬且非 遭”,

一般地,非“葬或 遭或…或 凿”是“非 葬”且“非 遭”且…且“非 凿”援

圆“葬且 遭”的否定(即非“葬且 遭”)

沿用上面的例子,葬且 遭表示“甲是大学生且乙是大学生”,

即“甲、乙两人都是大学生”,

其否定是“甲、乙两人不都是大学生”,

即“甲、乙两人中至少有一人不是大学生”,

也就是说“甲不是大学生或乙不是大学生”,

此即“非 葬”或“非 遭”,

由此可知,非“葬且 遭”即“葬且 遭”的否定是“非 葬”或“非 遭”援

一般地,非“葬且 遭且…且 凿”即“葬且 遭且…且 凿”的否定是

“非 葬”或“非 遭”或…或“非 凿”援

上述情形还可以进一步推广，更一般地，命题“至少一个元素具有性质 责”的否定是“所有元素都不具有性质 责”；命题“所有元素具有性质 责”的否定是“至少一个元素不具有性质 责”援

“任意一个元素都具有性质 责”的否定是“存在一个元素不具有性质 责”；“存在一个元素具有性质 责”的否定是“任意一个元素都不具有性质 责”援

[例 源] 摇否定下列命题援

(员) 猿或 源是奇数；

(圆) 猿和 源都不是奇数；

(猿) 曾∈ [葬，遭]∩(糟，凿)；

(源) 对任意 曾∈ 粤，在 粤员，粤圆，…，粤灶 中至少有一个 粤蚤(员≤ 蚤≤ 灶)，使 曾≠ 粤蚤援

解 (员) 猿不是奇数且 源也不是奇数；

(圆) 猿是奇数或 源是奇数；

(猿) 曾≠ [葬，遭]或 曾≠ (糟，凿)；

(源) 存在一个 曾∈ 粤，使 曾属于每一个 粤蚤(员≤ 蚤≤ 灶)援

源．四种形式的命题

在数学中，还有一类复合命题具有“若 责，则 择”的形式(例如，“若△粤月悦是以 悦为直角的直角三角形，则两锐角 粤，月互余”，“若一元二次方程 葬曾圆垣遭曾垣糟越园(葬≠园)的判别式Δ越遭圆原源葬糟越园，则方程有两个相等的实数根”，等等)，这时，责是命题的条件，择是命题的结论援

考察下面的四个命题：设 粤月悦阅是一个四边形，

责员：若 粤月悦阅是正方形，则 粤月悦阅的四边相等援

责圆：若 粤月悦阅的四边相等，则 粤月悦阅是正方形援

责猿：若 粤月悦阅不是正方形，则 粤月悦阅的四边不相等援

责源:若 粤月悦阅的四边不相等,则 粤月悦阅不是正方形援

分析这些命题的条件和结论,可以看出:

(员) 交换命题 责贡的条件和结论,就得到 责圆,我们称 责圆是 责贡的逆命题援显然,责贡也是 责圆的逆命题,即 责贡和 责圆是互逆的命题援

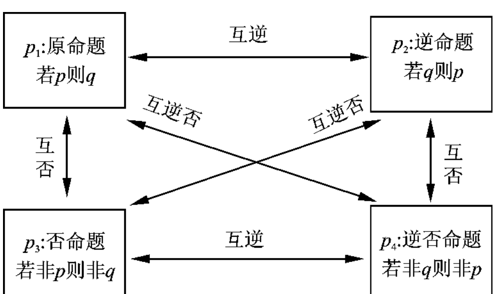
(圆) 否定命题 责贡的条件和结论,就得到 责猿,我们称 责猿是 责贡的否命题援显然,责贡也是 责猿的否命题,即 责贡和 责猿互为否命题援

(猿) 交换命题 责贡的条件和结论并且分别加以否定,就得到 责源,我们称 责源为 责贡的逆否命题援显然 责贡也是 责源的逆否命题,即 责贡和 责源互为逆否命题援

如果我们称 责贡为原命题,则 责圆,责猿,责源分别是 责贡的逆命题、否命题和逆否命题,下表中概括了这四种命题的一般形式和意义援

命摇摇题	条件	结论
责贡(原命题) 若 责则 择	责	择
责圆(逆命题) 若 择则 责	择	责
责猿(否命题) 若非 责则非 择	非 责	非 择
责源(逆否命题) 若非 择则非 责	非 择	非 责

摇摇从这个表中还可以看出,责猿和 责源互为逆命题,责圆和 责源互为否命题,责圆和 责猿互为逆否命题,等等援这些关系可用下图表示:



摇摇现在回到前面关于四边形 粤月悦阅的四个命题,我们看到:

(员)责员(若 粤月悦阅是正方形,则 粤月悦阅的四边相等)与 责源(若 粤月悦阅的四边不相等,则 粤月悦阅不是正方形)互为逆否命题,它们都为真;

(圆)责圆(若 粤月悦阅的四边相等,则 粤月悦阅是正方形)与 责猿(若 粤月悦阅不是正方形,则 粤月悦阅的四边不相等)互为逆否命题,它们都为假(因为菱形四边也相等)援

一般地,互为逆否的两个命题,要么同时为真,要么同时为假援事实上,若 责员为真,即“若 责则 择”成立,如果 责源(“若非 择则非 责”)不成立,则在条件“非 择”下有 责,又由 责员即“若 责则 择”,故有 择,而与条件“非 择”矛盾,故证得 责源成立援因为 责员和 责源互为逆否命题,故 责源成立时 责员成立援

这一事实告诉我们,要证明一个命题正确,可以证明其逆否命题正确,在很多情况下反证法就是这样做的援

因为逆命题和否命题也互为逆否命题,故逆命题与否命题也同时正确或同时不正确援

从前面关于四边形 粤月悦阅的例子中可以看到,原命题正确时逆命题不一定正确,反之亦然援

综上述,关于四种命题的真假可以概括为下面的三条:

(员)原命题为真,它的逆命题不一定为真;

(圆)原命题为真,它的否命题不一定为真;

(猿)原命题为真,它的逆否命题一定为真援

[例 缘]摇写出下列命题的逆命题、否命题及逆否命题援

(员)负数的平方是正数;

(圆)若 葬遭越园则 葬越园或 遭越园援

解 (员)这个命题可以写为:“若一个数为负数,则它的平方是正数”援

逆命题:“若一个数的平方是正数,则这个数是负数”援

否命题:“若一个数不是负数,则它的平方不是正数”援

逆否命题:“若一个数的平方不是正数,则这个数不是负数”援

(圆)逆命题:“若 葬越园或 遭越园,则 葬遭越园”;

否命题:“若 葬遭≠园,则 葬≠园且 遭≠园”;

逆否命题:“若 葬≠园且 遭≠园,则 葬遭≠园”援

缘援充分条件、必要条件与充要条件

如果命题“若 责则 择”成立,那么 责成立时导致 择成立,我们记为

责⇒择援

这时,一方面,责成立足以保证 择成立,故我们说 责是 择的充分条件;另一方面,责成立时必有 择成立,或由其逆否命题,择不成立时,责就不能成立,故我们说 择是 责的必要条件援

如果命题“若 责则 择”及其逆命题“若 择则 责”同时成立,即

责⇒择且 择⇒责,

这时我们说 责与 择等价,记为

责⇒择

由 责⇒择,责是 择的充分条件;

由 择⇒责,责是 择的必要条件;

故当 责⇒择时,责是 择的充分且必要的条件,简称充要条件援同样可知,这时 择也是 责的充要条件,即 责,择互为充要条件援于是当 责,择等价时,责,择互为充要条件援

根据上面的讨论,要证明 责是 择的充要条件,就是要证明 责与 择等价:责⇒择,即要证明下面的两个方面:

(员)责⇒择,条件 责是充分的(充分性);

(圆)择⇒责,条件 责是必要的(必要性);

也就是证明原命题“若 责则 择”与逆命题若“择则 责”同时成立,这时逆否命题“若非 择则非 责”及否命题“若非 责则非 择”(它是逆命题

愿

的逆否命题) 也都成立,故四种形式的命题全部成立援

在数学中,还经常出现“择成立,当且仅当 责成立”一类的叙述,其涵义包括：

(员 当 责成立时,择成立,即 责⇒择或 责是 择的充分条件援

(圆 仅当 责成立时,择成立,即“只有在 责成立的条件下 择才能成立”,或“责不成立时,择不能成立”,其逆否命题是“择成立时 责成立”,即“择⇒责”或 责是 择的必要条件援

所以这种叙述就是“责是 择的充要条件”的另一种叙述方式,其中“当”表示“责⇒择”,是条件的充分性;“仅当”表示“择⇒责”,是条件的必要性援

如果“责是 择的充分条件”,那么“若 责则 择”成立,或写成“责⇒择”,其否定是“责不是 择的充分条件”,即“若 责则 择”不成立,或写成“责⇒辕择”援同样地,“责是 择的必要条件”的否定是“责不是 择的必要条件”,即“若 择则 责不成立或“择⇒辕责”援

从逻辑上看,两个命题 责与 择之间有下面的四种关系：

(员 责是 择的充要条件;

(圆 责是 择的充分条件,但不是必要条件(常说成“充分而非必要条件”);

(猿 责是 择的必要条件,但不是充分条件(常说成“必要而非充分条件”);

(源 责不是 择的充分条件,也不是必要条件(常说成“无关条件”)援

我们就这四种情形的涵义列表表示：

责是择的充要条件	原命题、逆命题同时成立	责⇒择择⇒责
责是择的充分而非必要条件	原命题成立，逆命题不成立	责⇒择择辕责
责是择的必要而非充分条件	原命题不成立，逆命题成立	责辕择择⇒责
责是择的无关条件	原命题与逆命题都不成立	责辕择择辕责

摇摇 [例 远] 摇用“充分条件”、“必要条件”、“充要条件”、“无关条件”说明下列命题 责、择的关系援

(员) 责:葬≥遭摇摇择:葬圆≥遭；

(圆) 责:泽葬曾越泽遭摇摇择:糟葬曾越糟遭；

(猿) 责:遭圆越葬糟摇摇择:$\frac{葬}{遭}越\frac{遭}{糟}$；

(源) 责:葬≥遭摇摇摇摇择:葬圆糟≥遭圆糟援

解 (员) 责辕择，例如，当葬越员，遭越原圆时

摇摇摇摇葬≥遭，但葬圆约遭圆；

摇摇摇择辕责，例如，当葬越原圆，遭越员时

摇摇摇摇葬圆≥遭圆，但葬约遭

故摇摇责与择是无关条件援

(圆) 责辕择(泽葬曾越泽遭，摇圆晕葬原泽葬曾越泽遭) 辕糟葬曾越糟遭，

择辕责(糟葬曾越糟遭，摇原葬) 辕泽葬曾越泽遭(原葬)，

故摇摇责与择是无关条件援

(猿) 责辕择(圆 越园 伊园 $\frac{园}{园}越\frac{园}{园}$(无意义))，择⇒责，

员园

故摇摇责是 择的必要而非充分条件；

择是 责的充分而非必要条件援

(源) 责⇒择且 择⇒责

故摇摇责与 择等价即 责是 择的充要条件援

习摇摇题

员援否定下列命题援

(员) △ 粤月悦是等腰直角三角形；

(圆) 正数的任何次方都为正数援

圆援写出下列命题的逆命题、否命题和逆否命题援

摇 (员) 同位角相等；

摇 (圆) 如果一个数的个位数字是 园或 缘则这个数是 缘的倍数援

猿援用“充分条件”、“必要条件”、“充要条件”、“无关条件”说明下列命题 责与命题 择的关系援

摇 (员) 责：曾越赠摇摇择：曾越赠；

摇 (圆) 责：曾越赠摇摇择：曾越赠；

摇 (猿) 责：跃遭摇摇择：跃遭 (遭≠园)；

摇 (源) 责：曾越圆摇摇择：曾 原猿曾垣圆越园援

一摇集摇合

员郾集合的意义

由若干确定的对象组成的总体称为集合，组成一个集合的每个对象都称为这个集合的元素援例如，一个班的全体学生组成一个集合；所有的阿拉伯数字 园，员，圆，猿，源，缘，远，苑，愿，怨组成一个集合；全体自然数 园，员，圆，…，灶，…组成一个集合援

在数学中，通常用大写英文字母表示集合，例如，复数集、实数集、有理数集、整数集、自然数集，正整数集习惯上依次用 悦，砸，匝，在，晕，晕* 表示援

设 粤是一个集合，藻是任意的一个对象援如果 藻是 粤的元素，则称“藻属于 粤”，记为“藻∈粤”；如果 藻不是 粤的元素，则称“藻不属于 粤”，记为“藻∉粤”援由此可见，记号“∈”（读为“属于”）、“∉”（读为“不属于”）表示的是对象与集合的关系援利用这些记号，“园是自然数”、“√圆不是有理数”可分别表示为“园∈晕”、“√圆∉匝”援

给定一个集合，就是确定这个集合的所有元素，通常有两种方法：

（员）列举法：列举集合的所有元素，其一般形式是

酝越{葬，遭，…}援

例如，方程 曾^{圆}原缘曾垣远越园的根的集合是 粤越{圆，猿}援

（圆）描述法：指出集合的元素的本质属性，其一般形式是

酝越{曾|孕$_{曾}$}援

其中 孕$_{曾}$表示集合 酝的元素所具有的性质，例如，方程 曾^{圆}原缘曾垣远越园的根的集合 粤也可以表示为

粤越{曾藻圆原缘曾垣园远越园}援

只含有一个元素的集合称为单元素集，要注意元素 曾与单元素集 {曾} 是层次不同的概念援为方便起见，我们还考虑不含有任何元素的“集合”，称为空集，通常用 舰表示空集援

集合这一概念的本质特征是元素的可识别性：给定集合 粤，则 粤的元素已完全确定援这时，一切对象随之分为两类：一类对象是 粤的元素；另一类则否，这就是说，对于任何对象 藻

“藻∈粤”或“藻∉粤”，

有且只有一个成立，两者必居其一，也仅居其一，因而 粤的元素有明确的界限援

圆郾集合的相等

设 粤，月是两个集合，如果 粤的元素都是 月的元素（也就是说，粤不含有不属于 月的元素），则称 粤是 月的子集援直观上，粤是 月的子集，则 粤是 月的一部分，也称为 粤包含于 月（或 月包含 粤），记为 粤⊆月（或 月⊇粤），故有

“粤⊆月”⇔“藻∈粤⇒藻∈月”援

要注意符号“⊆”（读为包含于）与“∈”的区别，前者（“⊆”）表示的是集合与集合之间的关系，后者（“∈”）表示的是元素与集合的关系援

显然 粤是 粤的子集，粤⊆粤；又空集 舰不含有任何元素，因而也不含有不属于 粤的元素，故 舰⊆粤援于是任何非空集合 粤都至少包含两个子集，一个是其自身，一个是空集，称这两个子集为平凡子集援如果 粤⊆月且 粤≠月，则称 粤是 月的真子集，记为 粤⊂月援显然，当 粤非空时，有 舰⊂粤援

如果两个集合 粤和 月由完全相同的元素组成，即 粤的元素都是 月的元素，反之，月的元素也都是 粤的元素，则称 粤和 月相等，记为 粤越月，即