第一篇 数论初步

数论(The Theory of Numbers)是数学最古老的分支之一，它的历史可以追溯到公元前3世纪，在古希腊数学家欧几里得（公元前330年~公元前275年）著的《几何原本》一书中就有三篇是专门介绍数论知识的.我国公元前后的《孙子算经》一书中就已给出了解一次同余式组的方法，即著名的孙子定理（西方国家称为中国剩余定理)，数论的特点之一是其中许多定理和猜想很容易理解（有的只要具有小学或初中的数学水平就可以理解）.但要证明它们却异常困难.因此数学中至今仍悬而未决的著名难题有相当一部分就属于数论这个领域.

初等数论是主要用算术方法来研究整数性质的一个数论分支.17世纪以来费马（Fermat）、欧拉(Euler)、勒让德(Legendre)、高斯(Gauss)等人的工作大大发展和丰富了初等数论的内容近几十年来，初等数论在计算机科学、代数编码理论、组合数学和信号数字处理等现代科学领域内得到了广泛应用.这里主要介绍初等数论的一些基本知识.

第一章　整数的整除性

整除是数论中的基本概念，从这个概念出发，我们将介绍辗转相除法，最大公因数，最小公倍数等重要概念，它们也是本课程最基本的内容.

§1.1　整除的概念与性质

整数是这样一些数：

$$\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots.$$

其中 $1,2,3,4,\cdots,n,\cdots$ 这些数叫做正整数，其中 $1,3,5,7,\cdots$ 叫做奇数；$2,4,6,8\cdots$ 叫做偶数. $0,1,2,\cdots,n,\cdots$ 这些数叫做自然数. $-1,-2,-3,-4,\cdots,-n,\cdots$ 这些数叫做负整数.

在整数范围内,有

整数＋整数＝整数；

整数－整数＝整数；

整数×整数＝整数.

但是整数除整数并不能保证一定得整数，当然更谈不上正整数除正整数就一定得正整数了. 研究究竟什么样的整数除什么样的整数才能得到整数这样的问题，就是本章所涉及的整数的整除性.

从本节开始，除非另有说明，总是用小写字母 $a,b,c,d,\cdots$ 来表示整数，并认为整数的加法、减法、乘法和除法的通常性质大家是已经掌握的，可以随时应用.

定义 1.1　设 a,b 是整数,$b\neq 0$. 如果存在一个整数 q 使得等式

$$a=bq \tag{1}$$

成立,则称 b 能整除 a 或 a 能被 b 整除,记作 $b|a$,此时把 b 叫做 a 的因数(或约数),把 a 叫做 b 的倍数.如果这样的整数 q 不存在,则称 b 不能整除 a,记作 $b\nmid a$.例如有 $2|8$,$12|24$,$19|19$,$-5|25$,$7|-21$,$5\nmid 7$,$9\nmid 23$,$4\nmid 3$,$-2\nmid 33$.

由整除的定义出发，可以证明整除具有以下几个性质.

性质 1　如果 $b|a$,$c|b$,则 $c|a$.

证　根据整除的定义，我们知道存在整数 q 和 p,使得等式 $a=bq$,$b=cp$ 成立，因此可得 $a=cpq$,由于 pq 也是一个整数，故再由整除的定义可得 $c|a$.

性质 2　如果 $b|a$,则 $cb|ca$.

证　根据整除的定义，我们知道存在整数 q,使得等式 $a=bq$ 成立，因此有 $ca=cbq$，再由整除的定义可得 $cb|ca$.

性质 3　如果 $c|a$,则对任何整数 d,$c|da$.

证　根据整除的定义，我们知道存在整数 q,使得等式 $a=cq$ 成立,因此有 $da=dcq=c(dq)$,再由整除的定义可得 $c|da$.

性质 4　如果 $c|a$,$c|b$,则对任意的整数 m,n,有 $c|ma+nb$.

证　根据整除的定义，我们知道存在整数 q 和 p,使得等式 $a=cq$,$b=cp$ 成立,因此有

$$ma+nb=mcq+ncp=c(mq+np).$$

由于 mq,np 都是整数,故 $mq+np$ 也是整数，再由整除的定义可得 $c|ma+nb$.

性质 5　如果 $a|b$,$b|a$,则 $a=\pm b$.

证　根据整除的定义，我们知道存在整数 q_1 和 q_2,使得等式 $b=aq_1$,$a=bq_2$ 成立.因此有 $a=aq_1q_2$,由此可得 $q_1q_2=1$,因为 q_1,q_2 均为整数,所以 $q_1=\pm 1$,$q_2=\pm 1$,即 $a=\pm b$.

定义 1.2　一个大于 1 的正整数，如果只能被 1 和它本身整除，不能被其它任何正整数整除，这样的正整数叫做质数（有的书

上称为素数）.

按照定义质数的因数只有 1 和它本身；反之，一个正整数只有 1 和它本身这样两个因数，那么，它就是质数.

例如 2,3,5,7,11,13,23,43,47 都是质数.

定义 1.3 一个正整数除了能被 1 和它本身整除以外，还能被其它的正整数整除，这样的正整数叫做合数.

例如 4,8,10,12,15,18,25,45,50 都是合数.

定义 1.4 如果一个正整数 a 有一个因数 b,而 b 又是质数，则称 b 为 a 的质因数.

例如 $18=3\times 6$,则 3 和 6 都是 18 的因数，因为 6 不是质数而 3 是质数,所以 3 是 18 的质因数而 6 不是 18 的质因数. 又有 $18=3\times 3\times 2$ 所以 18 的质因数除了 3 以外还有 2.

把一个整数分解为质因数的乘积称为整数的质因数分解或称为把整数分解质因数. 这对后面内容的学习是有用的.

例如,$48=2\times 2\times 2\times 2\times 3$,

$45=3\times 3\times 5$.

都是整数的质因数分解.

这里我们遇到的问题是对于每一个大于 1 的整数，如果不论次序，它是否能表示成质因数的乘积，如果能表示成质因数的乘积的话，这种表示是否是唯一的，对此我们有以下的定理.

定理 1.1（算术基本定理）任一大于 1 的整数能唯一地表示成质因数的乘积.

定理证明从略.

在一般的情况下,a 被 b 除时，我们有

定理 1.2（带余除法） 设 a,b 是两个整数,其中 $b>0$,则存在两个唯一的整数 q 及 r ,使得

$$a=bq+r,\ 0\leq r<b \tag{2}$$

成立.

定理证明从略. 这是一个后面经常要用到的结论，请大家牢牢记住.

例 1 设正整数 m,n 都不是 3 的倍数，$m>n$. 求证：$m+n$ 和 $m-n$ 中有且仅有一个是 3 的倍数.

证 因为 m 和 n 都不是 3 的倍数，所以 m,n 分别被 3 除，余数只能是 1 或 2. 即有

$$m=3p+1 \text{ 或 } m=3p+2.$$
$$n=3q+1 \text{ 或 } n=3q+2.$$

(1) 如果 m,n 被 3 除的余数相同，则 $m-n=3(p-q)$，这意味着 $m-n$ 是 3 的倍数，而此时 $m+n=3(p+q+1)+1$ 或 $m+n=3(p+q+1)-1$，显然 $m+n$ 不能被 3 整除.

(2) 如果 m,n 被 3 除的余数不相同，则 $m+n=3(p+q)+3$，这时 $m+n$ 是 3 的倍数，而此时 $m-n=3(p-q)-1$（m 的余数为 1，n 的余数为 2）或 $m-n=3(p-q)+1$（m 的余数为 2，n 的余数为 1），显然 $m-n$ 不能被 3 整除.

由(1)、(2)可知结论为真.

例 2 有一个正整数，用它去除 22，31，44，得到三个余数之和为 13，求这个正整数.

解 设这个正整数为 p，再设用 p 去除 22，31，44，所得到的商分别为 q_1,q_2 与 q_3，余数分别为 r_1,r_2 与 r_3，则有

$$22=pq_1+r_1 \quad (0\leq r_1<p).$$
$$31=pq_2+r_2 \quad (0\leq r_2<p).$$
$$44=pq_3+r_3 \quad (0\leq r_3<p).$$

三式相加可得

$$97=p(q_1+q_2+q_3)+(r_1+r_2+r_3).$$

因为有
$$r_1+r_2+r_3=13<3p,$$

故可得
$$p>\frac{13}{3}.$$

又有 $$p(q_1+q_2+q_3)=97-(r_1+r_2+r_3)$$
$$=97-13=84.$$
而 84 的正因数是 1,2,3,4,6,7,12,14,21,28,42,84，由于已知 $p>\frac{13}{3}$，故 p 只可能是 6,7,12,14,21,28,42,84 这八个数中的一个.

当 $p=6$ 时，用 p 去除 22、31、44 的余数和为 7 当 $p=7$ 时，用 p 去除 22、31、44 的余数和为 6 当 $p=14$ 时，用 p 去除 22、31、44 的余数和为 11，它们都小于 13. 当 p 取 12,28,42 和 84 时，用 p 去除 22、31、44 的余数和都大于 13. 故只能取
$$p=21.$$

习　题　1.1

1. 求证：若 $b|a,d|c$，则 $bd|ac$.

2. 对于任意两个正整数 m 和 n，试证：$m+n,m-n,mn$ 三者中至少有一个是 3 的倍数.

§1.2　最大公因数和辗转相除法

12 有因数 1,2,3,4,6,12；而 18 有因数 1,2,3,6,9,18. 所以 1 是 12 和 18 的公因数，3 和 6 也是 12 和 18 的公因数.

几个正整数的公因数往往不止一个，我们感兴趣的是其中最大的那一个.

定义 1.5　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个不全为零的整数，若整数 d 是它们之中每一个的因数，那么 d 就叫做 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个公因数. 整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的公因数中最大的一个叫做它们的最大公因数，记作$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

最大公因数有下列几个性质（不一一严格证明）：

性质 1　当 $b|a$ 时，$(a,b)=b$.

这里因为 $a=bm$，所以 $(a,b)=b$.

性质 2　a,b 的一切公因数都是 (a,b) 的因数.

性质 3　若 a,b 是正整数，m 是任一正整数，则有 $(am,bm)=(a,b)m$.

性质 4　若 $(a,b)=1$，c 为任一正整数，则有 $(ac,b)=(c,b)$.

性质 5　若 $(a,b)=1$，$b|ac$，则有 $b|c$.

性质 6　若 a,b,d 是任意三个正整数，则 $(a,b)=d$ 的充分必要条件是

$$\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1.$$

例 1　求 $(36,60)$.

解　把这两个数分别分解质因数

$$36=2\times2\times3\times3,$$

$$60=2\times2\times3\times5.$$

把这两个数的质因数比较一下，可以发现质因数 2，2，3 是这两个数所公有的，则它们的乘积就是这两个数的最大公因数：

$$2\times2\times3=12.$$

例 2　求 $(15,60,90)$.

解　把这三个数分别分解质因数

$$15=3\times5,$$

$$60=2\times2\times3\times5,$$

$$90=2\times3\times3\times5.$$

把这三个数的质因数比较一下，可以发现质因数 3 和 5 是这三个数所公有的，则它们的乘积就是这三个数的最大公因数：

$$3\times5=15.$$

由此我们可以得到求 n 个正整数的最大公因数的方法是：先把这些正整数分别分解质因数，然后取出它们所有共同含有的质因数（相同的质因数照共同含有的个数取）相乘，即得到这些正整

数的最大公因数.

以上的方法在每个正整数都不是很大时比较适用，我们可以较快地将各个正整数分别分解质因数，从而找到它们的最大公因数. 但如果所讨论的正整数相当大时，则将它们分解成质因数就不容易了. 例如，我们无法很快地辨认出正整数 157 和 161 哪一个是质数,从而给正整数 50554 的质因数分解带来困难. 为解决这样的困难，我们介绍辗转相除法（又称欧几里得算法）. 这种算法是我国古代数学家所创造的，就是中国古代算学书中的求一术. 它不仅可以用来求出两个正整数的最大公因数，而且可以借助于它推出最大公因数的重要性质. 辗转相除法的理论基础是下面的定理：

定理 1.3 设 a、b 都是正整数，且 $a>b$,且有 $a=bq+r$，$0<r<b$,其中 q 和 r 都是正整数，则有

$$(a,b)=(b,r).$$

证 设 d 是 a,b 的任一公因数，由定义 1.5 可知必存在两个整数 m 和 n ,使得 $a=dm,b=dn$. 由 $r=a-bq=(m-qn)d$,立即可得 $d|r$. 由 $d|r,d|b$,可知 d 是 b 和 r 的一个公因数. 再设 d_1 是 b,r 的任一公因数，同样由定义 1.5 可知存在两个整数 m_1 和 n_1,使得 $b=d_1m_1,r=d_1n_1$,由 $a=bq+r=d_1m_1q+d_1n_1=d_1(m_1q+n_1)$,可得 $d_1|a$,所以 d_1 也是 a 和 b 的一个公因数. 这说明整数 a、b 和 b、r 有相同的公因数，因而 $(a,b)=(b,r)$.

定理 1.4（辗转相除法）若 a,b 是任意两个正整数，且 $a>b$，由带余除法（定理 1.2）,有下列等式：

$$\begin{aligned}
&a=bq+r,\ 0<r<b,\\
&b=rq_1+r_1,\ 0<r_1<r,\\
&r=r_1q_2+r_2,\ 0<r_2<r_1,\\
&\quad\cdots\qquad\qquad\cdots\\
&r_{n-2}=r_{n-1}q_n+r_n,\ 0<r_n<r_{n-1},\\
&r_{n-1}=r_nq_{n+1}+r_{n+1},\ r_{n+1}=0,
\end{aligned}$$

则有 $(a,b)=r_n$.

证 **因为每进行一次带余除法，余数就至少减少** 1 **，所以我们可以得到下列非负整数序列：** $b>r>r_1>r_2>\cdots$.

由于 b **是有限的，因此这些余数中最后必出现零，即得到某个** n **使得** $r_{n+1}=0$ **,那么就有**

$$r_{n-1}=r_nq_{n+1}$$ **,即(** $r_{n-1},r_n)=r_n$.

由于 $$r_{n-2}=r_{n-1}q_n+r_n,$$

由定理 1.3 **可得** $(r_{n-2},r_{n-1})=(r_{n-1},r_n)=r_n$.

反复应用定理 1.3、**即得**

$$(a,b)=(b,r)=(r,r_1)=(r_1,r_2)=\cdots$$
$$=(r_{n-2},r_{n-1})=(r_{n-1},r_n)=r_n.$$

例 3 求(169,121).

解 $169=121\times 1+48$,

$121=48\times 2+25$,

$48=25\times 1+23$,

$25=23\times 1+2$,

$23=2\times 11+1$,

$2=1\times 2$.

所以 $(169,121)=1$.

例 4 **求**

解 $735\,000=238\,948\times 3+18\,156$,

$238\,948=18\,156\times 13+2\,920$,

$18\,156=2\,920\times 6+636$,

$2\,920=636\times 4+376$,

$636=376\times 1+260$,

$376=260\times 1+116$,

$260=116\times 2+28$,

$116=28\times 4+4$,

$28=4\times 7$.

所 以 $(735\,000,238\,948)=4$.

定理 1.4 的条件中要求 a,b 都是正整数，如果 a,b 中有一个为负整数或 a,b 均为负整数，我们可以利用以下定理来求其最大公因数.

定理 1.5 若 a,b 为正整数，以 $-a,-b$ 分别表示与 a,b 相对应的负整数，则有

$$(a,b)=(-a,b)=(a,-b)=(-a,-b).$$

定理证明从略.

例 5 求 $(2\,605,-5\,125)$.

解

$$5\,125=2\,605\times 1+2\,520,$$
$$2\,605=2\,520\times 1+85,$$
$$2\,520=85\times 29+55,$$
$$85=55\times 1+30,$$
$$55=30\times 1+25,$$
$$30=25\times 1+5,$$
$$25=5\times 5.$$

因 为 $(2\,605,-5\,125)=(2\,605,5\,125)$,

所 以 $(2\,605,-5\,125)=5$.

在实际问题中我们可能会遇到求三个或更多个正整数的最大公因数的情况，对此我们可以用如下的方法来解决：

设 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 是 n 个正整数，我们先求出 a_1 和 a_2 的最大公因数,如果 a_1 和 a_2 的最大公因数是 b_1,我们再求 b_1 和 a_3 的最大公因数,如果 b_1 和 a_3 的最大公因数是 b_2,则 b_2 就是 a_1,a_2 和 a_3 的最大公因数.我们再求 b_2 和 a_4 的最大公因数，如果 b_2 和 a_4 的最大公因数是 b_3 则 b_3 就是 a_1,a_2,a_3 和 a_4 的最大公因数，照此方法继续下去，我们最终就可求得 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最大公因数.

例 6 求 $(2\,065,3\,245,7\,250)$.

解 先求2 065和3 245的最大公因数：

$$3\,245=2\,065\times1+1\,180,$$
$$2\,065=1\,180\times1+885,$$
$$1\,180=885\times1+295,$$
$$885=295\times3,$$

所以 $(2\,065,3\,245)=295.$

再求 295 与 7 250的最大公因数：

$$7\,250=295\times24+170,$$
$$295=170\times1+125,$$
$$170=125\times1+45,$$
$$125=45\times2+35,$$
$$45=35\times1+10,$$
$$35=10\times3+5,$$
$$10=5\times2,$$

所以 $(295,7\,250)=5.$

由前面介绍的方法可得

$$(2\,065,3\,245,7\,250)=5.$$

例 7 求$(66\,045,26\,418,5\,661,2\,775)$.

解 先求66 045和26 418的最大公因数：

$$66\,045=26\,418\times2+13\,209,$$
$$26\,418=13\,209\times2,$$

所以 $(66\,045,26\,418)=13\,209.$

再求13 209和5 661的最大公因数：

$$13\,209=5\,661\times2+1\,887,$$
$$5\,661=1\,887\times3,$$

所以 $(13\,209,5\,661)=1\,887.$

再求1 887和2 775的最大公因数：

$$2\,775=1\,887\times1+888,$$

$$1\,887=888\times 2+111.$$

$$888=111\times 8.$$

所　以　$(1\,887,2\,775)=111.$

故　得　$(66\,045,26\,418,5\,661,2\,775)=111.$

下面是辗转相除法的一个推论，它在具体应用中很有用处.

推论 1.1　若 a,b 是正整数，且 $(a,b)=d$，则必存在整数 m 和 n，使得 $d=ma+nb.$

这个推论的证明思路是将辗转相除法倒推过去，最后得到用定理 1.4 中的 a,b 来表示 r 的公式. 显然这里 m,n 有一个应是负整数. 例如，已知$(5\,767,4\,453)=73$，利用辗转相除法倒推可得到 $73=17\cdot 5\,767-22\cdot 4\,453.$

利用推论 1.1，我们可以很方便地证明最大公因数的性质 2：a,b 的一切公因数都是 (a,b) 的因数.

证　记 $(a,b)=d$，设 c 是 a,b 的任一公因数，即 $c\mid a,c\mid b$，由推论 1.1，存在整数 m 和 n，使得

$$d=ma+nb.$$

因为 c 整除此式的右端，故 c 也整除此式的左端，即

$$c\mid(a,b).$$

定义 1.6　若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是正整数，当这些正整数的最大公因数是 1 时，即

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$$

时，称 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是互质的.

例如，$(5,9)=1,(7,10,14)=1,(16,49)=1,(6,10,45)=1$ 都是几个整数互质的情况. 但这里要注意两点：

1. 在互质的正整数中，不一定有质数出现. 如$(16,49)=1$，但其中 16 和 49 都不是质数而是合数.

2. 在三个或三个以上互质的正整数中，不一定其中每两个正整数都是互质的. 如$(6,10,45)=1$，但其中$(6,10)=2,(6,45)=3,$

$(10,45)=5$,它们两两都不互质.

下面给出一个关于正整数互质的结论，它在解题中往往很有用处.

命题 1.1 设 $a_1,a_2,\cdots,a_m,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都是正整数，且等式 $(a_i,b_j)=1$ 对于 i 在 $1,2,\cdots,m$ 中和 j 在 $1,2,\cdots,n$ 中各任取一数时都成立,则有

$$(a_1a_2\cdots a_m,b_1b_2\cdots b_n)=1.$$

证明从略.

在命题 1.1 中取 $a_1=a_2=\cdots=a_m,b_1=b_2=\cdots=b_n$,我们立即可得到下面的推论：

推论 1.2 若 $(a,b)=1$,且 m 和 n 是任意两个正整数，则有 $(a^m,b^n)=1$.

例如，由$(3,4)=1$ 可得$(3^5,4^6)=1$.

例 8 当 n 和 A 是正整数时，试证如果 $\sqrt[n]{A}$ 不是整数，那末便是无理数.

证 如果 $\sqrt[n]{A}$ 是一个非整数的有理数，那么必存在正整数 p 和 q,这里 $q>1$,且$(p,q)=1$,

使得
$$\sqrt[n]{A}=\frac{p}{q}.$$

那么便有
$$A=\frac{p^n}{q^n},$$

由命题 1.1 的推论知应有$(p^n,q^n)=1$ 成立,且 $q^n>1$,所以可知 $\frac{p^n}{q^n}$ 不是整数，这与已知 A 是整数矛盾，所以等式 $A=\frac{p^n}{q^n}$ 显然不能成立，这个矛盾是由于假设 $\sqrt[n]{A}$ 是有理数而产生的.因此如果 $\sqrt[n]{A}$ 不是整数便是无理数.

例 9 试证明 $\log_3 7$ 是一个无理数.

证 如果 $\log_3 7$ 是一个有理数，那么必存在正整数 p 和 q,且

$(p,q)=1$，使得 $\log_3 7=\frac{p}{q}$.

由对数的定义可得 $3^{\frac{p}{q}}=7$，即有

$$3^p=7^q.$$

因为 $(3,7)=1$，所以对任何正整数 p 和 q，有 $(3^p,7^q)=1$. 这就是说，等式 $3^p=7^q$ 不可能成立，因此假设是错误的，$\log_3 7$ 是一个无理数.

最后介绍几个有关最大公因数应用的例子.

例 10　有一块钢板，长 2.75 米，宽 2 米，现在把它截成同样大小的正方形，要求截成的正方形最大，且不许剩下钢板，求正方形的边长.

解　因为正方形要最大的，又不许剩下钢板，所以就要求 275 厘米和 200 厘米的最大公因数. 由于

$$275=200\times1+75,$$
$$200=75\times2+50,$$
$$75=50\times1+25,$$
$$50=25\times2.$$

所　以　$(275,200)=25$.

答：所求正方形的边长为 0.25 米.

例 11　有四根铁丝，长度各为 1008 厘米，1260 厘米，882 厘米和 1134 厘米. 现在要求把它们截成相等的小段，每根铁丝都不允许剩余，且截成的小段要最长，求每小段的长度和总共可以截成多少段？

解　与上题类似，这是一个求最大公因数的问题. 由于

$$1\,260=1\,008\times1+252,$$
$$1\,008=252\times4,$$

故可得　$(1\,260,1\,008)=252$；

又由于　$882=252\times3+126$，

$$252=126\times2.$$

故可得 $(252,882)=126$;

再由于 $1\,134=126\times9$,

故可得 $(1\,134,126)=126.$

所 以 $(1\,260,1\,008,882,1\,134)=126.$

于 是 $(1\,260+1\,008+882+1\,134)\div126=34.$

答：所求小段的长度为 126 厘米，总共可以截成 34 段.

例 12 求证：任何两个连续正整数是互质的.

证 设 n 和 $n+1$ 是任意两个连续正整数，$(n,n+1)=d$，则由最大公因数的定义可知必存在两个正整数 p 和 q，且 $p\neq q$，使得等式 $n=dp,n+1=dq$ 成立. 于是

$$(n+1)-n=dq-dp=d(q-p).$$

因为 $p\neq q$，且 $q-p$ 为整数，故由上式可得 $d\mid1$，因此得到 $d=1$，所以 $(n,n+1)=1$，即 n 和 $n+1$ 互质.

例 13 分子与分母互质的分数称为最简分数，试把分数 $\frac{319}{377}$ 化为最简分数.

解 用分数的分子和分母的最大公因数去除分子和分母即可得到最简分数. 这就是小学数学中介绍的一次约分法，因此这里解题的关键是找到分数的分子和分母的最大公因数. 由于

$$377=319\times1+58,\ 319=58\times5+29,\ 58=29\times2,$$

故 $$(377,319)=29.$$

所以可用 29 去约分，得 $\frac{319}{377}=\frac{11}{13}.$

例 14 证明：如果 $(a,b)=1$，则 $a+b$ 与 ab 互质.

证 设 $(a+b,ab)=q$，则可得 $a+b=qm,ab=qn$. 因为 $(a,b)=1$，故由 $ab=qn$ 可得 $q\mid a$ 或 $q\mid b$.

不妨设 $q\mid a$，则有 $a=qs$.

因为有 $a+b=qm$，所以可得 $b=qm-a=q(m-s)$，由此可

得 $q|b$,所以 $(a,b)=q$,由条件可知应有 $q=1$. 即 $a+b$ 与 ab 互质.

习 题 1.2

1. 求(125,610),(321,777),(51,306,1 224).
2. 求(422,738,2 546,8 756).
3. 证明:$\log_3 5$ 是一个无理数.
4. 证明:如果 $(a,b)=1$,则 $(a-b,ab)=1$.
5. 把下列分数化成最简分数（分子与分母互质的分数称为最简分数）:

(1) $\dfrac{513}{1\ 083}$; (2) $\dfrac{360}{1\ 755}$; (3) $\dfrac{1\ 495}{3\ 312}$.

6. 某公司有一间长方形的会议室长 15.75 米,宽 6.5 米.现需用正方形地砖铺地，希望恰好能铺满整个会议室.问所用正方形地砖最大边长是多少？
7. 把一张长 465 厘米，宽 165 厘米的木板截成相同大小的正方形木板，而且没有剩余，问能截成最大的正方形木板的边长是多少厘米？总共可以截成多少块？
8. 某建筑工地上有四根钢筋，长度分别为 2 438 厘米,4 611 厘米,4 823 厘米和 5 406 厘米.现希望把它们截成长度相等的小段，每根钢筋不允许剩余，且要求截成的小段最长，求每小段的长度和总共可截成多少小段.
9. 某市召开优秀教师代表大会，有大学教师代表 72 名，中学教师代表 60 名，小学教师代表 48 名，现要编成若干小组进行讨论，编组时要求每组中各方的代表人数要相同，问最多能编几组，每小组中各方代表各有几名？

§1.3 最小公倍数

定义 1.7 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个整数 $(n\geq 2)$,若整数 m 是这 n 个数中每一个数的倍数，则 m 称为这 n 个数的一个公倍数.在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一切公倍数中最小的正数叫做 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最小公倍数,记作 $[a_1,a_2,\cdots,a_n]$.

因为乘积 $|a_1||a_2|\cdots|a_n|$ 就是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个公倍数,故最小公倍数是存在的.

由于任何正整数都不是零的倍数，故讨论整数的最小公倍数时，总假定这些整数都不为零.

例如 24 能被 4 整除，24 又能被 6 整除，所以 24 是 4 和 6 的一个公倍数. 但 24 不是 4 和 6 的最小公倍数，因为正整数 12 也是 4 和 6 的一个公倍数，且不存在小于 12 的正整数既能被 4 整除，又能被 6 整除，所以 12 是 4 和 6 的最小公倍数，即 $[4,6]=12$.

为了解决求最小公倍数的问题，我们先研究两个正整数的最小公倍数.

定理 1.6 设 a,b 是任给的两个正整数，则有

(1) a,b 的所有公倍数都是 $[a,b]$ 的倍数.

(2) $[a,b]=\dfrac{ab}{(a,b)}$，即 a,b 的最小公倍数等于它们的乘积除以它们的最大公因数所得的商，若 a,b 互质，即 $(a,b)=1$，则 $[a,b]=ab$.

证　设 m 是 a,b 的任一公倍数，由定义可知有 $m=ap=bq$. 令 $a=a_1(a,b)$，$b=b_1(a,b)$，代入 $ap=bq$ 可得 $a_1p=b_1q$. 因为 $(a_1,b_1)=1$，故有 $b_1\mid p$，不妨记 $p=b_1c$. 因此有

$$m=ap=ab_1c=\frac{ab}{(a,b)}c. \qquad (*)$$

反之，当 c 为任一整数时，$\dfrac{ab}{(a,b)}c$ 为 a,b 的一个公倍数，故 $(*)$ 可以表示 a,b 的一切公倍数. 令 $c=1$，即得最小的正数，故可得

$$[a,b]=\frac{ab}{(a,b)},$$

这便证明了定理中的结论 (2). 因此前面的 $(*)$ 式可改写为 $m=[a,b]c$. 由于 c 是整数，所以定理中的结论 (1) 也得证.

把定理 1.6 中结论 (2) 变一下形状可得：对任意两个正整数 a 和 b，必有　$ab=(a,b)[a,b]$.

注意：定理 1.6 中的结论不能推广到多于两个正整数的情