第 1 章　评 价 概 论

本章旨在阐述评价中的几个共性问题。1.1 节扼要介绍评价和评价系统的基本概念；1.2 和 1.3 节阐明评价二要素的内涵；1.4 节以本书内容为主线，叙述评价发展简史；1.5 节是关于评价方法论的几点思考。

1.1　评价和评价系统

评价是人类社会中一项经常性的、极重要的认识活动。为了阐明评价的内涵，先举两个例子。

例 1-1　某大学拟通过对学生综合素质的测评，来评选三好学生，并将这一项目委托某研究所进行研究。为此，设计了一套如图 1-1 所示的指标体系，并用某种算法将之变换成一个综合指标，计算出每个大学生的综合分，再按综合分的高低来推举三好学生。

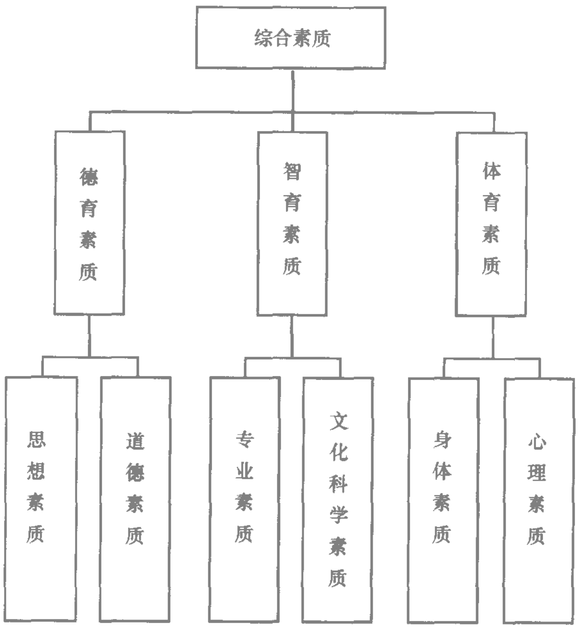

图 1-1　评选三好学生的指标体系

例 1-2　某研究所受市政府委托，对市属工业企业按综合经济实力进行评价与排序，市领导要求提供多个评价方案，以期“多中选好”。考虑到指标体系的权威性和通用性，该所采用国家经贸委和国家统计局制定的指标体系，如图 1-2 所示，并用多种评价方法，得到多个评价结果。

评价是指按预定的目的，确定研究对象的属性（指标），并将这种属性变为客观定量的

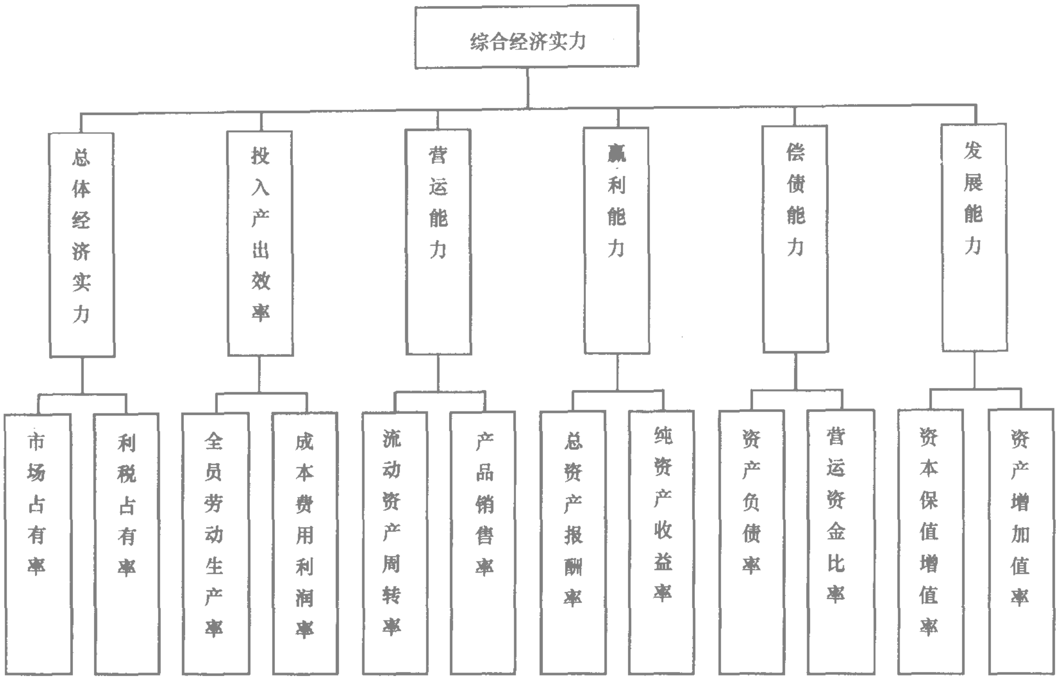

图 1-2　国家经贸委和国家统计局指标体系

计值或主观效用的行为①。评价在这里及以后特指多属性对象的综合评价。属性是关于目的的框架结构，是对研究对象本质特征的概括。指标是关于研究对象属性的测度，是对象属性的具体化。鉴于在文献中大多对属性和指标并没有严格的界限，今后我们将循惯例，对两者不严加区分。

可见，评价是对研究对象功能的一种量化描述，它既可以利用时序统计数据去描述同一对象功能的历史演变，也可以利用统计数据去描述不同对象功能的差异。各种评价结果还可以用来研究对象的结构，并为优化结构指明方向。

评价有多种分类方法。按对象所处的阶段，评价分成事前评价、中间评价、事后评价和跟踪评价。

按评价模式，可分成传统评价模式和现代评价模式。

(1) 传统评价模式：这是我国目前最常用的一种评价模式，如各单位一年一度的“评先”即其一例。这一模式存在诸多弊端，其一是指标体系不全面、不规范；其二是评价方法本质上以定性分析或半定性半定量分析为主，科技含量不高，主观成分过重。

(2) 现代评价模式：这是当今蓬勃兴起的一种评价模式，它代表着评价的发展方向。

这一模式的指标体系较全面、较规范；评价方法借助于对定性指标定量化，使指标体系成为可计算的，并可通过计算机软件予以实现。该模式要求尽可能排除主观成分，使评价结果体现科学、民主、公正、公平、公开的原则。

下面研究评价系统。

① 效用是对事物价值的主观衡量，是微观经济学中的一个基本概念，在决策分析中属于效用理论。详见参考文献[3]，[4]。

评价系统由两部分组成，即评价主体和评价客体。评价主体指参与评价的人的群体，评价客体指评价的直接对象。在着手评价时，还需考虑评价环境，评价环境指评价系统以外且与之联系较紧密的其他部分，它是评价系统的外部环境。评价主体、评价客体和评价环境三者一起，构成了一个复杂的开放系统。

评价系统就其本质来说，是一个信息处理系统，开展评价的过程，是一个将无序信息有序化的过程，这一过程所需处理的信息量非常大，只有应用现代科学方法，借助于现代化的计算工具——计算机才能实现。这样，评价主体便自然分成了两个子系统，即由专家群体组成的智囊子系统和由领导集体组成的决断子系统。

智囊子系统的主要任务在“谋”。具体说来，一是要设计一套体现目的要求的指标体系，二是要选择一种以上有代表性的评价方法，计算出几个评价结果（也叫评价方案），提交决断子系统遴选。

决断子系统的主要任务在“断”。也就是说，领导集体必须对智囊子系统提出的备选方案，详加利弊权衡，最终作出抉择。

综上所述，评价包含下面两个要素。

指标体系（属性集）：指标是指描述评价对象功能的量。随着人们对世界认识的不断深化，描述评价对象功能的指标往往不止一个，而是若干个，它们一起构成一个多指标系统(2)

(1) 评价方法：对多指标系统中的不同对象，无法直接比较其优劣，必须借助某种评价方法，将多指标系统转化成单指标系统，再进行对比。

下面分两节阐述评价二要素的内涵。

1.2　评价对象的属性集

评价对象的属性集具有两个基本特性，即层次性及多样性。

属性集的层次性表现为层次结构。第一层是目标层，第二层是分支层，最下层是测度层，它反映了人们从抽象到具体的思维过程。

属性集的多样性是由于其组成元素受到多个因素的影响。它不仅受评价客体与评价目的的极度制约，如评价客体不同，评价目的不同，属性集也就不同，这从 1.1 节中例 1-1 和例 1-2 即可看出；而且也受评价主体价值观念的影响，即使评价客体与评价目的相同，不同的评价主体也会设计出不同的属性集。

现实世界中事物的复杂性和评价目的的多样性，决定了属性集的复杂性和多变性。因此，有必要探讨一下设计属性集所应遵循的若干共同原则：

(1)整体性原则。属性集应涵盖为达到评价目的所需的基本内容，如 1.1 节例 1-1 中大学生的综合素质应包含德育素质、智育素质和体育素质三个分支内容。

(2)简要性原则。属性集要层次分明，简明扼要；每个属性要内涵清晰，相对独立。切忌搞烦琐哲学，使人不得要领。

(3)　向性原则。属性集应体现政策导向，如针对我国高等教育中迄今存在“三重三轻”的偏向，即在培养德育素质中重思想教育、轻道德教育，在培养智育素质中重专业教育、轻文化科学素质教育，在培养体育素质中重身体教育、轻心理教育，我们在 1.1节例

1-1 属性集第二层三个分支下面，各开列了并列的两个栏目，以提高“三轻”教育的地位。又如，为克服和防范社会主义市场经济下某些国有企业领导的功利主义和短期行为，在 1.1 节例 1-2 中设置了一项“资产保值增值率”，以利于国有企业的稳步发展。

可比性原则。要尽可能采用相对属性，便于对不同对象进行对比，但为了反映对象之间规模上的差异，也应选取一些绝对属性。

(5)

(4)均匀性原则。凡开发周期较长或时间滞后较大的属性，诸如房地产开发中竣工面积之类属性，科技评价中每百名科技活动人员的专利授权数之类属性等，为避免属性值大起大落，以采用三年平均值为宜。

(6) 可操作性原则。属性集所需数据原则上从现有统计指标中产生，少量需重新统计的指标应是确定的且易于采集的。

(7)实际性原则。应从我国企、事业单位和统计部门的现状出发，切忌照搬发达国家的属性集。

1.3 评价方法

目前已有几十到上百种评价方法。但每一种评价方法，都必须包含如下两部分内容：

(2) 提供为解决属性之间不可公度问题的方法；

(1) 构建一个纯量实多元函数，用以权衡评价对象的综合效用或综合水平，今后不妨称之为价值函数或评价函数。这一函数既应反映每个属性的价值取向，又应区别各个属性的重要程度。

1. 属性值的规范化

属性值的规范化，其一是为解决属性之间不可公度的问题，其二是为解决不同属性之间数值上相差悬殊的问题。

属性按其自身的内涵，通常可以分成三类：效益型、成本型和区间型。效益型属性是指取值越大越好的属性，成本型属性是指取值越小越好的属性，而区间型属性是指取值越接近某个固定区间 $[q_1^j, q_2^j]$ 越好的属性。

属性值规范化所必须遵循的一个基本原则，是对每个属性来说，对象全体在规范化前后次序不变，即满足保序性条件。

下面列出属性值规范化的几个常用公式。设 n 为评价对象数，p 为属性数，y_{ij} 为第 i 个对象的第 j 个属性值，并记 z_{ij} 为 y_{ij} 的规范化属性值，$J_k(k=1,2,3)$ 分别为效益型、成本型和区间型属性的下标集。则对于效益型和成本型属性，有

$$z_{ij}=\begin{cases}(y_{ij}-\min\limits_i y_{ij})/(\max\limits_i y_{ij}-\min\limits_i y_{ij}), & j\in J_1 \quad (1\text{-}1)\\ (\max\limits_i y_{ij}-y_{ij})/(\max\limits_i y_{ij}-\min\limits_i y_{ij}), & j\in J_2 \quad (1\text{-}2)\end{cases}$$

$$z_{ij}=\begin{cases}y_{ij}/\max\limits_i y_{ij}, & j\in J_1 \quad (1\text{-}3)\\ \min\limits_i y_{ij}/y_{ij}, & j\in J_2 \quad (1\text{-}4)\\ 1-y_{ij}/\max\limits_i y_{ij}, & j\in J_2 \quad (1\text{-}5)\end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} y_{ij} \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_{ij}^2}, & j \in J_1 \quad (1\text{-}6) \\ -y_{ij} \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_{ij}^2}, & j \in J_2 \quad (1\text{-}7) \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} \dfrac{y_{ij} - \bar{y}_j}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_j)^2}}, & j \in J_1 \quad (1\text{-}8) \\ -\dfrac{y_{ij} - \bar{y}_j}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_j)^2}}, & j \in J_2 \quad (1\text{-}9) \end{cases}$$

式中，$\bar{y}_j = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_{ij}$。

对区间型属性，有

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 - \dfrac{q_1^j - y_{ij}}{\max\{q_1^j - \min\limits_i y_{ij}, \max\limits_i y_{ij} - q_2^j\}}, & y_{ij} < q_1^j \\ 1, & y_{ij} \in [q_1^j, q_2^j] \\ 1 - \dfrac{y_{ij} - q_2^j}{\max\{q_1^j - \min\limits_i y_{ij}, \max\limits_i y_{ij} - q_2^j\}}, & y_{ij} > q_2^j \end{cases} \quad j \in J_3 \quad (1\text{-}10)$$

式(1-10)可简化成

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 - \dfrac{\max\{q_1^j - y_{ij}, y_{ij} - q_2^j\}}{\max\{q_1^j - \min\limits_i y_{ij}, \max\limits_i y_{ij} - q_2^j\}}, & y_{ij} \overline{\in} [q_1^j, q_2^j] \\ 1, & y_{ij} \in [q_1^j, q_2^j] \end{cases} \quad j \in J_3 \quad (1\text{-}11)$$

2. 权重向量的赋值

评价方法的核心问题，是阐明价值函数的形成机理和结构形式，即建立价值函数的数学模型。在价值函数的结构形式已定的情况下，权重向量的赋值便成为人们关注的焦点。按赋值中源信息的出处，可将评价方法分成两类：一类是客观赋权法，其源信息来自统计数据本身，属于这一类的有综合指数法、功效评分法、最优权法（第 2 章）和主成分分析法（第 4 章）；另一类是主观赋权法，其源信息来自专家咨询，即利用专家群的知识和经验，属于这一类的有层次分析法（第 3 章)和模糊综合评价法(第 6 章)。

1.4 评价发展简史

评价，自古有之；“论功行赏”之说，足以佐证。

开现代科学评价之先河者，当推艾奇沃斯（Edgeworth)。早在 1888 年，他在英国皇家

统计学会的杂志上发表的论文“考试中的统计学”中，就已经提出了对考试中的不同部分应如何加权。1913 年，斯皮尔曼(Spearman）发表了“和与差的相关性”一文，讨论了不同加权的作用，此文实际上已用了多元回归和典型分析。在 20 世纪 30 年代，瑟斯通(Thurstone)和利克特(Likert)又对定性记分方法的工作给予了新的推动。

20 世纪 70～80 年代，是现代科学评价蓬勃兴起的年代[3]。在此期间，产生了多种应用广泛的评价方法，诸如 ELECTRE 法 (1971～1977，1983）、多维偏好分析的线性规划法(简记 LINMAP，1973)、层次分析法（简记 AHP，1977)、数据包络分析法（简记 DEA，1978)、逼近于理想解的排序方法（简记 TOPSIS，1981)等。

20 世纪 80～90 年代，是现代科学评价在我国向纵深发展的年代，人们对评价理论、方法和应用开展了多方面的、卓有成效的研究，主要表现为：

(1）常规评价方法在国民经济各部门中的应用，见参考文献[9],[10],[17]；

(2）数种常规评价方法的组合应用，见参考文献[11],[12],[14]；

(3）新评价方法的研究，见参考文献[15],[16]；

(4）评价属性集的设计及其标准化变换，见参考文献[13]。

下面以本书内容为主线，对几种评价方法的历史及其内涵略加展开。

1）层次分析法

1977 年，美国运筹学家、匹兹堡大学教授萨迪（T.L.Saaty)在第一届国际数学建模会议上宣读了“无结构决策问题的建模——层次分析法”一文，宣告一种新的决策方法问世。1988 年，在中国天津召开了第一届国际层次分析法研讨会，以后每两至三年举办一次，至今已召开了六届。1996 年，萨迪在层次分析法的基础上，又提出了网络分析法[2]。

层次分析法的基本特征，其一是要有一个属性集的层次结构模型，它是层次分析法赖以建立的基础；其二是针对上一层某个准则，把下一层与之相关的各个不可公度的因素，通过对比，按重要性等级赋值，从而完成从定性分析到定量分析的过渡。

2 主成分分析法

主成分分析是多元统计分析的一个分支。 20 世纪 30 年代，由于费希尔(Fisher)、霍特林(Hötelling)、许宝禄及罗伊Roy）等人的一系列奠基性工作，使得多元统计分析成为应用数学的一个重要分支。

主成分分析，先是由卡尔(Karl)、皮尔逊(Pearson）应用于非随机向量，而后霍特林(Hötelling将之推广到了随机向量。

主成分分析法是将其分量相关的原随机向量，借助于一个正交变换，转化成其分量不相关的新随机向量，并以方差作为信息量的测度，对新随机向量进行降维处理，再通过构造适当的价值函数，进一步把低维系统转化成一维系统。

3 数据包络分析法

1978 年，美国著名运筹学家查恩斯(A.Charnes)等人,以相对效率概念为基础,以凸分析和数学规划为工具，创建了一个以他们的名字命名的 DEA 模型——C^2R 模型。20 世纪 80～90 年代，又相继提出了诸如 C^2GS^2 模型、FG 模型、ST 模型、C^2WH 模型和带 AHP 约束锥模型等多个 DEA 模型。

DEA 法不仅可对同一类型各决策单元的相对有效性作出评价与排序，而且还可进一步分析各决策单元非 DEA 有效的原因及其改进方向，从而为决策者提供重要的管理决策

信息。正因如此，DEA的模型、理论、方法和应用依旧是第十五届国际运筹学会议（IFORS '99）的一个热门话题。

4 模糊评价法

模糊评价法奠基于模糊数学。模糊数学诞生于1965年，它的创始人是美国自动控制专家L.A.Zadeh。这一理论提出之后，开始在西方学术界为某些偏见所左右，并未引起足够的重视。20世纪80年代后期，日本将模糊技术应用于机器人、过程控制、地铁机车、交通管理、故障诊断、医疗诊断、声音识别、图像处理、市场预测等众多领域。模糊理论在日本的成功应用和巨大的市场前景，给西方企业界以巨大的震动，在学术界也得到了普遍的认同。1992年，IEEE召开了第一届模糊系统国际会议（FUZZ-IEEE），并决定以后每年举办一次。1993年，IEEE创办了专刊IEEE Transaction on Fuzzy Systems，当前，模糊理论和应用正向深度和广度飞速发展，研究成果大量涌现，成为世界各国高科技竞争的重要领域之

模糊数学是描述、研究、处理具模糊特征(即模糊概念)事物的数学。Zadeh提出用隶属函数(Membership Function)来描述模糊概念，创立了模糊集论，为模糊数学奠定了基础。他还提出了著名的复杂性与精确性的"不相容原理"：随着系统复杂性的增加，我们对其特性做出精确而有意义的描述的能力会随之降低，直至达到一个阈值，一旦超过它，精确和有意义二者将会互相排斥。"这就是说，事物越复杂，人们对它的认识也就越模糊，也就越需要模糊数学。不相容原理深刻地阐明了模糊数学产生和发展的必然性，也为三十多年来模糊数学的发展历史所证实。

模糊评价法不仅可对评价对象按综合分值的大小进行评价和排序，而且还可根据模糊评价集上的值按最大隶属度原则去评定对象所属的等级。

1.5 关于评价方法论的几点思考

我们将从三个不同的视角，即评价系统的视角、评价方法的视角和价值函数的视角来探讨评价方法论。

1. 从评价系统的视角探讨评价方法论

要使评价结果符合现代科学评价规则，必须具备两个条件：一是能提供多个备选方案，二是能提供从多个备选方案中挑选最优方案的科学方法。原则上，对同一类对象，一个属性集与一种评价方法相结合，将产生一个评价方案；对同一个属性集，如采用多种评价方法，便可产生多个评价方案，可见前一个条件不难实现。因此，能否建立一个判断评价方案优劣的标准，便成为能否实现现代科学评价的关键。

为此，我们提出了兼容度和差异度的概念，给出了一种评价方案择优算法，详见参考文献[7]和第7章。

2. 从评价方法的视角探讨评价方法论

如上所述，对同一类对象，用同一个属性集，由h种评价方法可产生h个评价方案。那么，能否对h个评价方案实施再综合，生成在兼容度和差异度意义下的优化方案，使之

兼具每个评价方法的特征呢？

循着这一思路，我们构建了两个新的数学模型，即兼容度极大化模型和兼容度、差异度极大极小化模型，由此生成两个新的评价方案。详见参考文献[8]和第 7 章。

3. 从价值函数的视角探讨评价方法论

迄今为止，几乎所有的价值函数，都不加证明地表述成属性集中诸元的线性加权和的形式。试问：价值函数的这一结构形式，是按何种机理形成的呢？是否还存在别的结构形式呢？

对此，我们把决策分析中的多属性效用理论，与主成分分析法中各主成分分量之间相互独立的优良性质结合起来，证明了价值函数的存在性和可分解性，再构造单向主成分向量空间，按距离概念导出了 7个单向主成分价值函数模型，推进和完备了主成分分析法。详见参考文献[1]和第 4 章 。

习　　题

1. 何谓评价？评价有何意义？
2. 试比较传统评价模式与现代评价模式的优劣。
3. 试探讨设计属性集所应遵循的基本原则。
4. 为什么要对属性值规范化？属性值规范化应遵循什么原则？
5. 请继续完成图 1-1 中第四层次指标系列的设计。

参 考 文 献

1 Qin Shoukang et al. Valuation Function Models of Principal Components and a Method for Selecting Optimum from Evaluation Schemes. The 15th Triennial Conference of IFORS' 99. Beijing, China, 1999

2 T. L. Saaty. The Analytic Network Process. RWS Publications, 1996

3 陈珽. 决策分析. 北京:科学出版社, 1987

4 K. E. 凯斯，R. C. 费尔，郭建青等译. 经济学原理. 北京：中国人民大学出版社，1994

5 顾基发. 评价方法综述. 科学决策与系统工程，北京：中国科学技术出版社，1990

6 张尧庭，张晓朴. 综合评价的历史和一些结论. 统计研究，1995，64(2)

7 秦寿康，傅荣林，陈湛本. 评价方案择优方法. 系统工程与可持续发展战略，北京：科学技术文献出版社，1998

8 傅荣林，秦寿康，陈湛本. 兼容多个综合评价方案及其分类的数学模型. 系统工程学报，1999，14(2)

9 欧俊豪，马逢时，姬孟祥. 城市综合经济实力的主成分分析. 数理统计与管理，1999，18(3)

10 陈湛本，秦寿康. 主成分线性加权综合评估模型及其在经济系统中的应用. 决策与决策支持系统，1993，3(4)

11 吴翼平 .多准则评价方法的评价 .决策与决策支持系统，1994，4(1)
12 应天元 .系统综合评价的赋权新方法——PC-LINMAP 耦 合模型 .系统工程理论与实践，1997，17(2)
13 刘树林，邱菀华 .多属性决策基础理论研究 .系统工程理论与实践，1998，18(1)
14 王鹏武 .系统综合评价的一个方法 .系统工程理论与实践，1998，18(7)
15 戴文战 .基于三层 BP 网络的多指标综合评估方法及应用 .系统工程理论与实践，1999，19(5)
16 王正欧，朱涛，王书新等 .基于 RBF 网络的高技术项目投资评估决策模型的研究 .系统工程理论与实践，2000，20(3)
17 曹希彬，蔡力钢，李培根 .多工艺方案二阶模糊综合评价 .系统工程理论与实践，2000，20(6)

第 2 章　几种简易的评价方法

本章将介绍几种简易的评价方法，包括综合指数法、功效评分法 TOPSIS 法和最优权法。并归纳各种评价方法的共同特征。

2.1　综合指数法

本节以一个简化的实例为背景，来阐明综合指数法。

多指标系统的每一种评价方法，都面临着指标之间不可公度的问题，这一问题包含两个子问题：一是按何种规则将每个指标无量纲化，二是以何种方式区分各指标的相对重要性。

例 2-1　表 2-1 为某市冶金行业 13 家企业 1995 年 3 项效益指标数据，试对其综合效益作出评价。

表 2-1　冶金行业 3 项指标数据及其综合指数

序号	企业名称	资本收益率（%）	人均创利税（元/人）	社会贡献率（%）	综合指数	名次
1	异型钢厂	−84.57	−11.66	13.96	−62.13	12
2	镀锌铁丝厂	1.79	2.64	18.20	56.16	7
3	耐火材料厂	0.49	1.42	32.22	62.35	6
4	冶金机械厂	−37.92	−1.78	32.64	24.25	9
5	钢铁集团公司	5.84	32.37	6.77	200.06	2
6	锌片厂	−11.72	0.16	15.78	18.89	10
7	铜材厂	4.10	6.69	20.77	97.61	4
8	铝材厂	1.81	5.95	23.50	79.08	5
9	有色金属冶炼厂	−9.88	5.77	23.12	55.92	8
10	钢管厂	13.44	12.28	20.33	201.51	1
11	铁合金公司	−124.30	−34.64	6.60	−162.10	13
12	带钢厂	0	−0.22	5.43	8.16	11
13	粉末冶金厂	3.44	2.76	48.98	120.64	3

记 n 为评价对象个数，p 为指标个数；x_{ij} 为第 i 个对象第 j 项指标值，n_j^+ 为第 j 项指标取非负值的对象个数，n_j^- 为第 j 项指标取负值的对象个数。分别求 x_{ij} 的正、负均值 $\bar{x}_j^+$，$\bar{x}_j^-$，得

$$\begin{cases} \bar{x}_j^+ = \dfrac{1}{n_j^+}\sum\limits_{x_{ij}\geqslant 0} x_{ij} \\ \bar{x}_j^- = \dfrac{1}{n_j^-}\sum\limits_{x_{ij}<0} x_{ij} \end{cases} \qquad j = 1,2,\cdots,p \tag{2-1}$$

按下式将 x_{ij} 无量纲化

$$\begin{cases} k_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{\bar{x}_j^+} \times 100, & x_{ij} > 0 \\ k_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{|\bar{x}_j^-|} \times 100, & x_{ij} < 0 \end{cases} \tag{2-2}$$

并称 k_{ij} 为 x_{ij} 的折算指数。再对各项指标的折算指数取均值，便得综合指数 k_i

$$k_i = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} k_{ij} \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{2-3}$$

综上所述，可见综合指数法是一种以正负均值为基准，求每项指标的折算指数后再汇总成综合指数的评价方法。不言而喻，综合指数值越大，对象的综合效益越好。

现以例 2-1 中锌片厂和铜材厂为例，来说明综合指数法的运算过程。

首先，计算每项指标的正负均值

$$\bar{x}_1^+ = \frac{1}{8}(1.79 + 0.49 + 5.84 + 4.10 + 1.81 + 13.44 + 0 + 3.44) = 3.86$$

$$\bar{x}_1^- = \frac{1}{5}(-84.57 - 37.92 - 11.72 - 9.88 - 124.30) = -53.68$$

其余指标的计算结果见表 2-2。

其次，计算每项指标的折算指数

$$k_{61} = \frac{-11.72}{|-53.68|} \times 100 = -21.83$$

$$k_{71} = \frac{4.10}{3.86} \times 100 = 106.22$$

其余如表 2-2 所示。

最后，计算综合指数

$$k_6 = \frac{1}{3}(k_{61} + k_{62} + k_{63}) = \frac{1}{3}(-21.83 + 2.06 + 76.45) = 18.89$$

$$k_7 = \frac{1}{3}(106.22 + 85.99 + 100.63) = 97.61$$

全部 13个企业的综合指数及名次如表 2-1所示。还可按综合指数的大小将对象进行分类，如 $k > 100$ 者为好企业，$k < 50$ 者为差企业，$50 \leqslant k \leqslant 100$ 者为一般企业。

表 2-2　综合指数模型部分计算结果

指标名称	指标值 x_{ij}		正均值 $\bar{x}_j^+$	折算指数 k_{ij}		综合指数 k_i	
	锌片厂	铜材厂	(负均值 $\bar{x}_j^-$)	锌片厂	铜材厂	锌片厂	铜材厂
资本收益率 x_1	-11.72	4.10	3.86(-53.68)	-21.83	106.22		
人均创利税 x_2	0.16	6.69	7.78(-12.08)	2.06	85.99	18.89	97.61
社会贡献率 x_3	15.78	20.77	20.64	76.45	100.63		

注：①当指标是负效应指标时，可将之变换成正效应指标，即取该指标的倒数，或乘以 -1 后，再按式(2-1)～式(2-3)运算。

②决策主体可按各指标的重要程度，赋予不同的权值，即对折算指数加权，按下式求综合指数

$$k_i = \sum_{j=1}^{p} w_j k_{ij} \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{2-4}$$

式中 w_j 为折算指数 k_{ij} 的权数。

③当指标为复合数时，基准值还有另一种计算方法，即将复合数中每个数先行加总，再按指标公式进行运算。以资本收益率为例

$$\text{资本收益率} = \frac{\text{净利润}}{\text{实收资本}} \times 100$$

如记 x_1 为资本收益率，y_1 为净利润，z_1 为实收资本，则资本收益率 x_1 的基准值可按下式计算

$$\bar{x}_1^+ = \frac{\sum\limits_{y_{i1}>0} y_{i1}}{\sum\limits_{z_{i1}>0} z_{i1}}$$
$$\bar{x}_1^- = \frac{\sum\limits_{y_{i1}<0} y_{i1}}{\sum\limits_{z_{i1}<0} z_{i1}} \tag{2-5}$$

2.2 功效评分法

1. 功效系数及其评分方法

功效评分法是一种根据功效系数评定各项指标的计分值的简便方法。

设在评价指标体系中，前 k 个评价指标 x_1，x_2，…， x_k 希望越大越好(正效应指标)，而后($p-k$) 个评价指标 x_{k+1}，…，x_p 则希望越小越好（负效应指标），在处理这些指标之间的关系时，往往会由于各指标的量纲以及变动范围不同而带来一些困难。功效系数是对这些指标 x_j 的一种无量纲化变换，用 d_j 表示，即

$$d_j = d_j(x_j) \quad j = 1,2,\cdots,p$$

并满足

$$0 \leqslant d_j \leqslant 1 \quad j = 1.2,\cdots,p$$

当指标达到最佳值时令 $d_j = 1$，最差值时令 $d_j = 0$。

功效系数 $d_j = d_j(x_j)$ 的具体形式多种多样，这里我们采用线性型。

记第 i 个企业(样品)第 j 项指标值为 x_{ij}，$i = 1,2,\cdots,n$。将 n 个企业指标值从小到大排列,得

$$x_{1'j} \leqslant x_{2'j} \leqslant x_{n'j} \quad j = 1,2,\cdots,p$$

对于 $j = 1,2,\cdots,k$ 由于希望指标值越大越好，故令

$$d_j = \begin{cases} 1, & \text{当 } x_{ij} = x_{n'j} \\ 0, & \text{当 } x_{ij} = x_{1'j} \end{cases} \quad j = 1,2,\cdots,k \tag{2-6}$$

当 x_{ij} 在 $x_{1'j}$ 和 $x_{n'j}$ 之间时,简单地采用线性插值,得到

$$d_j = d_j(x_{ij}) = \frac{x_{ij} - x_{1'j}}{x_{n'j} - x_{1'j}} \qquad j = 1,2,\cdots,k \tag{2-7}$$

类似地，对于 $j = k+1,\cdots,p$ ，由于希望指标值越小越好，故令

$$d_j = \begin{cases} 1, & \text{当 } x_{ij} = x_{1'j} \\ 0, & \text{当 } x_{ij} = x_{n'j} \end{cases} \qquad j = k+1,\cdots,p \tag{2-8}$$

对中间值，采用线性插值，得到

$$d_j = d_j(x_{ij}) = \frac{x_{n'j} - x_{ij}}{x_{n'j} - x_{1'j}} \tag{2-9}$$

$$d_j = d_j(x_{ij}) = \begin{cases} 1, & x_{ij} \geqslant x_{bj} \\ \dfrac{x_{ij} - x_{aj}}{x_{bj} - x_{aj}}, & x_{aj} < x_{ij} < x_{bj} \\ 0, & x_{ii} \leqslant x_{ai} \end{cases} \tag{2-10}$$

$$j = 1,2,\cdots,k$$

$$d_j = d_j(x_{ij}) = \begin{cases} 1, & x_{ij} \leqslant x_{aj} \\ \dfrac{x_{bj} - x_{ij}}{x_{bj} - x_{aj}}, & x_{aj} < x_{ij} < x_{bj} \\ 0, & x_{ij} \geqslant x_{bj} \end{cases} \tag{2-11}$$

$$j = k+1,\cdots,p$$

这 样 ,第 i 个企业第 j 项指标的功效评分标准值为

$$d_j(x_{ij}) \times 100$$

结果简明直观，适用性强。

2. 功效权数的确定

功效权数可以用多种方法来确定，如均权法、离差权法、专家咨询法（如层次分析法，见第 3 章)、最 优 权 法(见 2.4 节）等。

1) 均权法

此时，评价模型为

$$u_i = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} d_j(x_{ij}) \times 100 \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{2-12}$$

2 离差权法

其原理是：若某一指标对所有样品都相等或相差不大，则此项指标包含评价所需的信息量不大，其权系数应很小；反之，若某项指标对所有样品相差很大，则这项指标包含评价所需的信息量就很大，其权系数应很大。据此，我们可以用每一项指标的标准差作为该

指标的权数，于是有模型

$$u_i = \sum_{j=1}^{p} w_j d_j(x_{ij}) \times 100 \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{2-13}$$

式中，$w_j = \sigma_j \Big/ \sum_{i=1}^{p} \sigma_j$，$\sigma_j = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(d_j(x_{ij}) - \bar{d}_j)^2}$，$\bar{d}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_j(x_{ij})$，$\sigma_j$ 为第 j 项指标功效系数的标准差。

例 2-2　按例 2-1 中的数据，试用功效评分法进行评价，权数由均权法确定。

因为评价指标是越大越好，故计算时采用式（2-6)、式(2-7) 和式(2-12) 的模型，结果如表 2-3 所示。

从表 2-3 的计算结果可以看到，每一指标的得分均在 0～100 之间，符合一般的评分习惯，且与综合指数法的评价结果高度相关。按综合指数法的分类标准，此时三个类中只有耐火材料厂与钢铁集团公司的类别一升一降。

若按离差权法确定权数，则按式(2-13)可得

$$\sigma_1 = 0.2861, \sigma_2 = 0.2123, \sigma_3 = 0.2695$$

相应的权数为 $w_1 = 0.373, w_2 = 0.276, w_3 = 0.351$，再按表 2-3 的功效得分进行加权，即可得综合分与名次，具体计算请读者完成。

表 2-3　冶金行业 3 项指标数据的功效评分及评价结果

序号	功效评分 / 企业名称	资本收益率得分	人均创利税得分	社会贡献率得分	综合得分	名次
1	异型钢厂	28.40	34.29	19.59	27.57	12
2	镀锌铁丝厂	91.54	55.63	29.32	58.83	8
3	耐火材料厂	90.60	53.81	61.52	68.64	2
4	冶金机械厂	62.71	49.04	62.48	58.08	9
5	钢铁集团公司	94.48	100.00	3.08	65.85	4
6	锌片厂	81.73	51.93	23.77	52.48	10
7	铜材厂	93.22	61.68	35.22	63.37	6
8	铝材厂	91.56	60.57	41.49	64.54	5
9	有色金属冶炼厂	83.07	60.30	40.62	61.33	7
10	钢管厂	100.00	70.02	34.21	68.08	3
11	铁合金公司	0	0	2.69	0.90	13
12	带钢厂	90.24	51.37	0	47.20	11
13	粉末冶金厂	92.74	55.81	100.00	82.85	1

2.3　TOPSIS 法

设评价对象个数为 n，评价指标个数为 p，每个对象的指标值为

$$\boldsymbol{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{ip})^{\mathrm{T}} \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

记

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ & \cdots & \cdots & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

为初始决策阵。对 $\boldsymbol{X}$ 阵中元作如下变换

$$y_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & \text{对正效应指标} \\ -x_{ij}, & \text{对负效应指标} \end{cases}$$

得

$$\boldsymbol{Y} = [y_{ij}]_{n \times p}$$

对 $\boldsymbol{Y}$ 阵中元按下式无量纲化

$$z_{ij} = \frac{y_{ij}}{\left(\sum_{i=1}^{n} y_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{2-14}$$

得规范化决策阵

$$\boldsymbol{Z} = [z_{ij}]_{n \times p}$$

再对 $\boldsymbol{Z}$ 阵中元按下式加权

$$u_{ij} = w_j z_{ij}$$

式中，$0 \leqslant w_j \leqslant 1, \sum_{j=1}^{p} w_j = 1$，便得加权规范化决策阵

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1p} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2p} \\ & \cdots & \cdots & \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{np} \end{bmatrix}$$

我们把加权规范化决策阵中的行向量

$$\boldsymbol{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, \cdots, u_{ip})^{\mathrm{T}} \qquad = 1, 2, \cdots, n \tag{2-15}$$

看成 p 维线性空间中 n 个向量或 n 个点。在空间中定义正理想点 u^+ 和负理想点 u^- 如下：

加权规范化决策阵中由每列取最大元组成的向量，叫做正理想点 u^+ 而由每列取最小元组成的向量，叫做负理想点 u^-，即

$$\boldsymbol{u}^+ = (u_1^+, u_2^+, \cdots, u_p^+)^{\mathrm{T}}, u_j^+ = \max_i \{u_{ij}\}, j = 1, 2, \cdots, p \tag{2-16}$$

$$\boldsymbol{u}^- = (u_1^-, u_2^-, \cdots, u_p^-)^{\mathrm{T}}, u_j^- = \min_i \{u_{ij}\}, j = 1, 2, \cdots, p \tag{2-17}$$

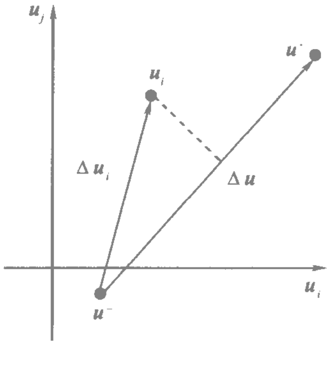

图 2-1　p 维空间中的向量图

参照图 2-1，记

$$\Delta u = u^+ - u^-, \tag{2-18}$$

$$\Delta u_i = u_i - u^-, i = 1,2,\cdots,n \tag{2-19}$$

定义点 u_i 对负理想点 u^- 的相对接近度为

$$d_i = \frac{<\Delta u_i, \Delta u>}{\|\Delta u\|^2}, i = 1,2,\cdots,n \tag{2-20}$$

式中，$<\Delta u_i, \Delta u>$ 为向量 Δu_i 和 Δu 的内积，$\|\Delta u\|$ 为向量 Δu 的欧氏范数，即

$$\|\Delta u\| = \left\{\sum_{j=1}^{p}(u_j^+ - u_j^-)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

因 $\|\Delta u_i\| \leqslant \|\Delta u\|$，故 $0 \leqslant <\Delta u_i, \Delta u> \leqslant \|\Delta u\|^2$，由此知 $d_i \in [0,1]$。

显见 **TOPSIS 法**是一种按相对接近度 d_i 大小来权衡评价对象综合效益的评价方法。d_i 值越大，对象的综合效益越好。

例 2-3　仍按例 2-1 中数据，用 TOPSIS法进行评价，分别采用均权法和离差权法两种权数。

计算结果如表 2-4所示，其中离差权法的权向量为 $w = (w_1, w_2, w_3)^T = (0.71, 0.08, 0.21)^T$。这些结果与综合指数法和功效评分法的结果同样是高度相关的。

表 2-4　冶金行业 3 项指标数据的 TOPSIS 法评价结果

序号	企业名称	均权法综合分	名次	离差权法综合分	名次
1	异型钢厂	10.31	12	7.76	12
2	镀锌铁丝厂	21.00	8	21.61	7
3	耐火材料厂	21.64	6	21.98	6
4	冶金机械厂	18.10	11	16.25	11
5	钢铁集团公司	29.74	1	23.92	2
6	锌片厂	19.16	10	19.47	10
7	铜材厂	22.68	4	22.48	4
8	铝材厂	22.49	5	22.11	5
9	有色金属冶炼厂	21.58	7	20.46	8
10	钢管厂	25.07	2	24.26	1
11	铁合金公司	0.12	13	0.08	13
12	带钢厂	19.16	9	20.40	9
13	粉末冶金厂	23.35	3	23.27	3

2.4　最优权法

1. 最优权法原理

设评价对象个数为 n，评价指标个数为 p，每个对象的无量纲化指标值为

$$z_i = (z_{i1}, z_{i2}, \cdots, z_{ip})^T \quad i = 1,2,\cdots,n$$

对每个对象构造线性函数

$$u_i = \sum_{j=1}^{p} w_j z_{ij} \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{2-21}$$

式中，$\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_p)^{\mathrm{T}}$ 为待求权向量。计算样本方差

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2 \tag{2-22}$$

式中

$$\bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i \tag{2-23}$$

将式(2-21) 和式(2-23) 代入式(2-22),经整理后得

$$s^2 = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} w_j w_k v_{jk} = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{w} \tag{2-24}$$

式中

$$v_{jk} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(z_{ij} - \bar{z}_j)(z_{ik} - \bar{z}_k) \quad j,k = 1,2,\cdots,p \tag{2-25}$$

$$\bar{z}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_{ij}$$

$\boldsymbol{V} = [v_{ik}]_{p\times p}$ 为向量 $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_p)^{\mathrm{T}}$ 的样本协方差阵。

最优权法的基本思想，是寻找权向量 w 的最优解，使得在等式约束

$$\sum_{j=1}^{p} w_j^2 = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} = 1$$

之下 样本方差 s^2 达最大值，即求解如下的等式约束极值问题

$$\begin{aligned} &\max s^2 = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{w} \\ &\text{s.t.}\ \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} = 1 \end{aligned} \tag{2-26}$$

定理 1 式(2-26) 的等式约束极值问题的最优解是：最优权向量 w^* 为样本协方差阵 V 的最大特征值 λ_1 所对应的单位特征向量。

证 构 造 Lagrange **函数**

$$L(\boldsymbol{w}, \lambda) = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{w} - \lambda(\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} - 1)$$

求 $\dfrac{\partial L(\boldsymbol{w},\lambda)}{\partial \boldsymbol{w}} = 0$,得

$$2\boldsymbol{V}\boldsymbol{w} - 2\lambda\boldsymbol{w} = 0$$

即

$$[\boldsymbol{V} - \lambda \boldsymbol{I}_p]\boldsymbol{w} = 0 \tag{2-27}$$

显见 w 为非零解的必要条件是