第一节水土保持线性规划问题

一、水土保持系统工程概述

系统工程学是近40年发展起来的一门以系统为对象的跨学科的边缘科学，用于处理多因子的复杂问题，具有高度的综合和分析能力。60年代初期，华罗庚教授提倡的优选法，便是系统工程学在我国的应用。近年来，为了加速现代化建设，促进政治、经济、文化教育和科学技术的全面改革，我国许多部门都在大力开展系统工程学的研究和应用工作。

线性规划是系统工程学的基础理论——运筹学的一个重要组成部分，是用于处理某些复杂的工程规划和设计问题使之发挥最大效能的一门近代计算科学。各个部门或行业都可能存在一些运转效能低，而需要重新调整和控制的问题，并且总是希望经过重新调整和控制后，能最大限度地提高效能。例如水土流失地区便希望重新调整生产布局，并对生产结构进行新的控制，从而改善生态环境，取得最大的经济效益。这便是线性规划所探讨的课题类型。因而线性规划实际是对问题所寻目标进行优化的一种方法。但是优化的前提条件需要将问题视为系统，亦即使问题具有系统的特性，才能从总体功能最优的角度出发，对问题进行综合和分析，找出各种可行的方案，从中决策出最优方案。

1.系统的特性

通常，人们总是把杂乱无章的事物称之为不系统。其含意：一是事物的目的性不明确，对于如何发挥自己的功能缺乏既定的要求；二是事物本身的构成单元零乱不全，不具有事物应该具有的完整性；三是各单元之间的相互联系和相互制约的关系紊乱，未能构成一个有机整体；四是随着环境的变化缺乏适应性。系统工程称这四点为目的性、集合性、相关性和适应性。如果把事物视为系统，便需要具有这些特性。例如水土保持规划要求在改善生态环境的前提下，取得最大的经济效益和社会效益。否则，规划便不具有目的性，从而提出的措施也是与规划要求不相符合的。其次，影响水土保持规划的因素是很多的。从生产活动而言，涉及了农、林、牧、副、渔等各个行业；从自然环境而言，涉及了地理、水文、气象、土壤诸多自然因素；从社会经济状况而言，涉及了劳力、资金、土地、设备、设施、技术等条件。如果将规划视为系统，便需要把所有这些因素纳入规划，这便是系统的集合性。进而对集合的因素进行综合和分析，理顺并建立各因素之间相互影响和相互制约的关系，使规划成为一个有机整体，便是其系统应具有的相关性。此外，水土保持规划还必需依据当时当地的自然环境和社会经济状况来制订，使得规划具有适应性。

综上所述，可知系统的含义便是在一定的环境条件下，由若干个相互影响和相互制约的单元所组成的具有特定功能的有机整体。

2.系统是系统工程的对象

系统可分为自然系统，人造系统和由二者组合而成的复合系统。自然系统是未经过人为改造的系统，如原子核结构等，而生产、电力、通讯、交通等系统便均属于人造系统。

水土保持规划的目的是通过合理利用流失面积，科学地组织生产，以求恢复生态平衡。它属于生产系统。系统工程只限于研究人造系统，其研究范畴是如何建立和处理系统，使系统处于最优状态，故系统便成为了系统工程的工作对象。依据前述的系统特性，美国科学技术辞典给予系统工程的定义是：系统工程是研究设计由若干个相互联系和相互制约的单元所组成的复杂系统的科学。设计系统应具有明确的功能和目标，而且各组成单元之间，以及各单元与整体系统之间应能有机地联系，相互协调，以达到总体最优的目标。

依据系统的特性，可知系统工程涉及的领域是极为广泛的。如果利用系统工程学探讨水土保持规划，便需要涉及地理学、水文学、气象学、土壤学、植物学、林学、农学、畜牧学、社会经济学等学科，并需要把所有的学科横向联系起来，从总体上进行综合平衡，使水土保持规划处于总体最优状态。因而系统工程学也是一门跨越许多学术领域，而又渗透在这些领域边界的边缘学科。

正由于系统工程学探讨的范围广泛，涉及的因素很多，常规数学方法是远不能满足解算要求的。近半个世纪以来，电子计算机的出现为系统工程学的数据处理提供了手段，在很大程度上促进了系统工程学的发展。历来的水土保持研究工作之所以不能定量化而取得确切的成果，便是由于不定因素太多，无论是综合或分析都存在很大的难度，因而掌握系统工程方法，并利用电子计算机进行数据处理，必然有助于水土保持研究工作的发展。

3.运筹学是优化系统目标的近代计算方法

依据系统工程的定义，可知由系统工程所设计和建立的系统是具有明确的目标要求的，亦即要求系统的总体功能达到最优状态。故在优化过程中便必需给予信息控制，即通过系统内部信息的传递和反馈来自动控制总体功能朝着最优化目标趋近，因而系统是具有自动控制机能的。而且系统越复杂，要求的自动化控制程度便越高。系统工程在自动化控制中是利用运筹学方法使系统达到最优化状态的，从而运筹学便成为了系统工程学优化目标的主要计算方法，故称为最优化计算技术。本教材介绍的线性规划，是运筹学的一个重要分支。

由于在系统的自动控制中需要利用运筹学方法，从而在运筹学对系统进行优化的过程中，也需要运用控制原理和信息理论使目标逐渐趋于最优化，三者是互相影响和互相渗透的，故在学习运筹学的同时，也需要初步了解控制论和信息论的基本理论。

4.线性规划优化系统的途径

对系统目标进行优化，需要建立一个能够表达构成系统各单元之间以及各单元与整体系统之间相互联系和相互制约关系的模型，进而为使系统目标的最优化程度定量化，还需要假定构成系统的单元都是可以计量的，亦即把单元设置为可控变量，而后依据相互联系和相互制约的关系把各变量联系起来形成数学函数，再利用运筹学方法分析函数的最优解。但由于构成系统各单元之间的关系是不定型的，因而用于分析系统的运筹学方法便有很多种，本教材介绍的线性规划是用于分析构成系统各单元之间呈线性函数关系的数学模型的方法。另一方面，由于现实生活中的系统是很复杂的，涉及的因素太多，从而数学模型表达的便只能是控制系统特性的主要单元之间的关系。对于不能模型化或者数学上不能求解的复杂系统常采取模拟或试验模型的方法分析，这类问题本教材不作介绍.

二、水土保持线性规划问题的提出

一个水土保持规划是否切实可行，取决于寻求的目标是否正确，和生产结构布局是否合理。对于依靠经验制订的水土保持规划，一般很难达到统筹兼顾的目的，因而水土保持是一门综合性很强的横断学科，如果视为系统，其结构是很复杂的，是个多输入、多输出、多层次、多功能的复杂系统。它的复杂性在于研究的对象——水和土受到了自然环境与社会经济条件的约束，而自然环境与社会经济条件所集合的因子又是多方面的。而且规划的合理程度如何？只有通过长时期的生产实践方可作出判断，效果反馈迟缓，从而便更难使规划趋于完善。故对于水土保持这样的复杂系统，如何进行卓有成效的综合分析，以取得生态、经济、社会等方面的综合效益，是当前水土保持工作者所面临的任务。

系统工程是一门具有高度综合分析能力的科学，它可以为研究对象建立预测模型。如果用于分析水土保持规划，不仅可对方案进行优选，而且可使规划效果迅速反馈，有利于及时调整规划的不合理性。当构成系统的因素有了变化，还可及时检验对规划产生的影响。预测模型是利用计算机程序解算的，可定量地处理规划各组成部分相互影响和相互制约的关系，提高规划的科学性，而不是定出空泛的结论。因而运用系统工程研究水土保持问题，无疑将有助于水土保持科学的发展。近年来，许多水土保持工作者已将系统工程学运用于水土流失的综合治理，并取得了良好的成效。

线性规划是用来寻求如何合理利用有限的人力、物力、财力等资源，获得最优效益方案的一种定量分析方法，是近代管理科学的重要基础和手段。所谓最优方案，是在付出的代价一定时，取得的效益最大，或任务已定时，使之完成任务且代价最少的方案。水土保持规划的任务便是全面合理地安排水土保持措施，力求用最少的人力、物力、财力在最短时间内获得最大的拦泥、蓄水和农业生产效益。因而运用线性规划方法进行水土保持规划工作，有助于方案的优选。例如水土流失土地的分配问题，土地作为自然资源是有限的，为经营土地而投入的劳力、资金、设备、设施等社会经济条件也是有限的，规划则要求如何合理利用有限资源，对农、林、牧各业进行土地分配，使之获得最优效益。诸如这类水土保持规划问题便可运用线性规划方法求解，因而线性规划方法所探讨的问题具有下述两个基本特征。

三、线性规划问题的基本特征

（1）线性规划问题具有明确的目标要求，亦即具有明确的目的性。对于水土保持规划而言：其目标在于寻求生态、经济、社会三方面的最大综合效益。如反映在土地资源的分配问题上，则要求在充分改善生态环境的前提下，最大限度地取得经济效益，同时满足社会的需求。如果仅为寻求单项效益，如投资最省、收益最高、周转期最短、泥沙侵蚀量最小等等，亦可作为系统目标。

（2）目标要求是在合理利用有限资源的前提下取得的，亦即目标受到了资源的约束，对于水土保持规划而言：便受到了地理、气象、水文、土壤等自然资源与土地、资金、劳力、设备、技术等社会经济条件的约束。

为便于进一步理解上述基本特性，举例说明如下：

【例1】某小流域水土流失严重，为增加群众的经济效益，并解决燃料不足问题，

划从 2500亩稻田中，划出部分面积种植甘蔗。水稻和甘蔗的经济收益见表 1-1，表内甘蔗的粮食亩产量系指国家提供的回销粮。

表 1-1

作物	粮食亩产量 (kg)	年亩产值 (元)
水稻	500	100
甘蔗	375	320

该小流域人口为 3356人。要求：

（1）所得自产粮和回销粮应能保证年人均粮食不少于 300kg。

（2）一亩甘蔗提供蔗芒400kg作燃料，年人均所得不少于125kg。

问水稻和甘蔗各种多少亩，经济效益最大？

运用系统的观点处理[例 1]，需要将[例 1]视为系统，并检查是否具有系统的特性。[例 1]所寻求的是期望获得最大经济效益，这便是作为系统所要求达到的目标。表达式为：

$$\max Z = 100x_1 + 320x_2$$

式中 Z——经济收益值；

x_1，x_2——分别为水稻与甘蔗的种植面积。

上式称为目标函数。题意规定此目标函数是受到社会经济条件约束的，下面依据题意逐个建立约束条件。

（1）所得自产粮和回销粮应保证年人均不少于 300kg。其表达式为：

$$500x_1 + 375x_2 \geqslant 3356 \times 300 \qquad (1)$$

这是人均口粮对目标函数的约束。此约束表明：为满足系统的相关性，不能单纯为了获得最大经济效益，考虑甘蔗的年产值高，便将土地全部用于种植甘蔗，而忽视了口粮自给的问题，从而使系统缺乏集合性和适应性。

（2）除保证口粮自给，水土流失严重地区还存在薪炭不足的问题，因而要求甘蔗提供的蔗芒年人均不少于125kg，这是薪炭对目标函数的约束。其表达式为：

$$400x_2 \geqslant 3356 \times 125 \qquad (2)$$

（3）以上二约束条件均为社会经济条件所给出，是组成系统的单元，因而它们之间又是互相约束的，式（1）可视为粮食对甘蔗的约束，式（2）可视为甘蔗对粮食的约束，两个约束的综合，便应保证粮食和甘蔗的总面积不超过题意给定的总亩数2500 亩。亦即有

$$x_1 + x_2 \leqslant 2500 \qquad (3)$$

这是土地面积对目标函数的约束，土地也是社会经济条件之一。

（4）粮食和甘蔗种植的总面积既规定不超过2500亩，则无论是粮食或甘蔗的种植面积均不应出现负值，否则式（3）便不能满足。同时考虑不种植甘蔗，薪炭供应便不能解决，因而甘蔗种植面积还应大于零。于是有：

$$x_2 > 0 \qquad (4)$$

（5）正由于种植甘蔗既可得到回销粮从而解决口粮问题，又可提供蔗芒解决燃料不足，故不种植水稻，有可能满足目标函数而获得最大经济效益。从而得到：

$$x_1 \geqslant 0 \qquad (5)$$

式（4）、式（5）称为系统的非负约束条件。以上目标函数和全体约束条件便构成了

[例 1]的系统。

不难看出:[例 1] 目标函数与约束条件的幂均为一次，故目标函数是个线性函数；约束条件则为线性等式或不等式，而问题的性质是要求对土地作出分配规划，这说明 [例 1] 是用线性目标函数与线性约束条件来表达的规划问题，也就称为线性规划问题。用数学语言表达则为：当问题是在一组约束条件下，寻求目标函数的极值，而约束条件可表示为线性等式或不等式，目标函数可表示为线性函数，便属于线性规划问题。如水土保持规划中合理利用土地资源，最优生产结构的建立，以及现阶段农、林、牧生产的生产力与生产关系相适应等问题，都可用线性规划法探讨。因而利用线性规划方法为水土保持规划作定量分析，进行方案优选，是有助于水土保持科学技术发展的。下面继续介绍几个线性规划问题的模式。

【例 2】 某水土流失地区为减轻土壤侵蚀，计划利用 12666 亩水土流失严重的荒山荒坡营造水保用材林、经济林和薪炭放牧林。要求：

(1) 提供年人均薪炭250kg，全区人口3586人。

(2) 为提高土壤涵养水源能力，经济林的营造面积不应超过水保用材林营造面积的1/3。

三种林的产值与可供薪炭见表1-2。问三种林的营造面积应各为多少亩？总产值最大。

表 1-2

项　　目	薪炭林	水保林	经济林
产　值　(元/亩)	25	50	150
薪　炭　(kg/亩)	200	50	

这是一个如何合理利用流失面积的问题，利用的目的在于最大限度地发挥流失面积的功能，以求在生态环境得到改善的前提下，取得最大的经济效益，此即题意寻求的目标。表达式写为：

$$\max Z = 150x_1 + 50x_2 + 25x_3$$

式中　Z ——林业生产总产值；

x_1, x_2, x_3—— 分别为经济林、水保林、薪炭林的营造面积。

由于最大产值是通过合理利用流失的土地面积取得的，因而需要建立林分结构系统，从中优选出最合理的林分结构。根据题意，系统便由目标函数与以下约束条件所构成.

(1) 生态约束，即为提高土壤涵养水源的能力，以达到改善生态环境的目的所构成的约束。其表达式为：

$$x_1 \leqslant \frac{1}{3} x_2 \tag{1}$$

(2) 薪炭约束，即为群众提供薪炭，以解决燃料不足所构成的约束. 其表达式为：

$$50x_2 + 200x_3 \geqslant 250 \times 3586 \tag{2}$$

(3) 生态环境的改善与薪炭的供应约束了经济效益的取得，亦即水保林与薪炭林约束了经济林。从而，三种林的营造面积便只能有一个满足于目标函数的分配方案，该方案即为最优林分结构。利用总面积的约束条件进行选择，便有：

$$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 12666 \tag{3}$$

（4）为满足式（3），三种林的营造面积还需满足非负约束条件。即：

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0$$

不难看出，[例 2] 的目标函数为线性函数，约束条件为线性等式或不等式，题意要求解决的是合理分配流失面积。因而，这是一个线性规划问题，可利用线性规划方法求解。

综合[例 1]和[例 2] 所述，凡属于线性规划问题便应具有目标要求与约束目标的条件，从而构成系统，使系统具有目的性、集合性、相关性与适应性。因而系统的概念是指在一定的时间和环境中，由若干个相互联系，相互约束的单元所组成的具有特定功能的有机整体。如果已经有了某个正在运行的系统，仅需对系统的性能进行检查，从而确定其功能，便称为系统分析。但 [例 1]和[例 2] 都要求合理分配土地资源，是对资源利用新系统的设计，应不称为分析而称为综合。然而对土地利用进行综合，需要具有生产结构模型，而模型不经过分析是无以获悉其功能的，因而综合与分析是互为因果的，一般统称为系统分析。简而言之：系统分析便是从系统的观点出发，对事务进行分析和综合，找出各种可行方案，进而依据总体效果为最优的原则，决策出最优方案。

表 1-3

施工工具 \ 工时 \ 项目	梯田	条田	谷坊	淤地坝
	工时/m^3			
推土机	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}
铲运斗	t_{21}	t_{22}	t_{23}	t_{24}
人工劳力	t_{31}	t_{32}	t_{33}	t_{34}

【例 3】 某水土保持试验站计划采用推土机、铲运斗、人工劳力配合修筑梯田、条田、谷坊淤地坝等四项工程，不同施工手段完成各项工程的单位土方所需工时列于表1-3。四项工程的上方单价（元／方）分别为：

梯田　条田　谷坊　淤地坝

C_1　C_2　C_3　C_4

如果投入推土机D_1台，铲运斗D_2台，人工劳力D_3个，投入顺序无先后，而且均工作200工时，问四项工程各完成多少土方，获得的土方报酬最高？

题意规定推土机，铲运斗，人工劳力投入的施工期限均为200工时，而且同时投入，此情况说明无论是施工设备或人工劳力作为资源提供是受到工时约束的，从而为取得最高的土方量报酬，便存在如何合理组织有限的工时数，使施工设备与人工劳力所配合进行的施工方案达到最优的问题，此配合方案即为本例需要建立的系统。有了系统，然后运用线性规划方法进行分析，即可优选出土方报酬最高的施工方案。下面写出目标函数和约束条件的表达式：

$$\max\ Z = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 + C_4x_4$$

$$t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + t_{13}x_3 + t_{14}x_4 \leqslant 200D_1$$

$$t_{21}x_1+t_{22}x_2+t_{23}x_3+t_{24}x_4\leqslant 200D_2$$
$$t_{31}x_1+t_{32}x_2+t_{33}x_3+t_{34}x_4\leqslant 200D_3$$

式中 Z——土方报酬总收益；

x_1,x_2,x_3,x_4——分别为梯田、条田、谷坊、淤地坝完成的土方数。

显然，[例 3] 是个施工方案新系统的设计问题，这个新系统是需要经过对工效与报酬的综合，即建立施工运转方案的模型，然后依据整体效益最优原则对模型进行分析、择优。因而这是个水土保持系统分析问题。

下面继续分析水土保持规划中的运输问题。

【例 4】 某水土流失地区因平整土地需调运土方，m处有土方剩余，剩余土方量分别为a_1，$a_2\cdots a_m$。n处土方不足，不足数量分别为b_1，$b_2\cdots b_n$。今将土方从i处调运到j处的单位运价为C_{ij}（$i=1,2\cdots m$，$j=1,2\cdots n$）。今要求调出与调进的土方平衡，问调运土方的方案如何安排？总调运费用最省？

下面分析题意：任何一处的剩余土方a_i，需调往哪些土方不足的地方，以及调去多少等，并未给出，亦即调运方案未定，这便是题意要求建立的系统。从系统中优选出运费最省的调运方案，即为寻求的目标。其表达式为：

$$\min\ Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}x_{ij}$$

式中 x_{ij}——从i处调运至j处的土方量。

题意规定目标函数的约束条件是调出和调进的土方数量应平衡，即

$$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j \tag{1}$$

因而任何一处的剩余土方必须大于或等于不足土方的地方从a_i中所得到的土方，即

$$a_i\geqslant\sum x_{ij} \tag{2}$$

而且，任何一处不足的土方b_j也必须小于或等于从各个有土方剩余的地方所得到的土方，即

$$b_j\leqslant\sum_{i=1}^{m}x_{ij} \tag{3}$$

此外，还应有

$$x_{ij}\geqslant 0 \tag{4}$$

此非负约束条件说明不能从土方不足的地方调运土方给有土方剩余的地方。

式（1）、（2）、（3）、（4）组成了对目标函数的约束。诸如此类调运问题，也是水土保持规划所经常遇到的。

四、线性规划问题的数学模型

线性规划方法是目前最优化计算技术中的一种应用最广泛的数学规划方法。综合以上所述，可知：

（1）凡属于线性规划问题均具有明确的目标要求，此目标要求是用一组未知量表示的线性函数，称为目标函数。其通式可写为：

$$\max(\text{或}\min)Z=C_1x_1+C_2x_2+\cdots+C_nx_n$$
$$=\sum_{j=1}^{n}C_jx_j$$

因目标函数反映在数值上，便是最优效益值，故称C_j为效益系数。显然，目标函数的取值是取决于x_j的，故称x_j为目标函数的决策变量。有一组决策变量的取值，便有一个目标函数值，因而线性规划方法的任务便是需要从若干组决策中优选出一组能满足目标函数的决策。

（2）目标要求是在一定的约束条件下取得的。约束条件通常是用线性等式或不等式表达的。其通式写为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(=,\ \geqslant)b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(=,\ \geqslant)b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(=,\ \geqslant)b_m \\ x_1,x_2\cdots x_n\geqslant 0 \end{cases}$$

也可简写为：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant(=,\ \geqslant)b_i \\ x_j\geqslant 0 \end{cases}$$

$i(=1,2\cdots m)$代表m个约束条件；$j(=1,2\cdots n)$代表n个决策变量。有时为了书写方便，目标函数和约束条件常用矩阵表示，即

目标函数　max（或min）　$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{CX}$　（1）

约束条件　$\boldsymbol{AX}\leqslant\boldsymbol{b}$　（2）

$\boldsymbol{X}\geqslant 0$

式中

$$\boldsymbol{C}=(C_1,C_2\cdots C_n)$$

$$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2\cdots x_n)^T$$

$$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2\cdots b_m)^T$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

式（1）、（2）便是线性规划问题的特征表达式，称为线性规划的数学模型。凡满足此数学模型的问题，便可运用线性规划方法求解。表达式中的约束条件既为不等式，而满足不等式的解有无穷多个，于是线性规划问题便归结于：在一定约束条件下，如何从无穷多组解中优选出一组能满足目标函数极值的解，这个极值解便是目标函数所寻求的最优效益值，一般称为线性规划问题的最优决策。因而运用线性规划方法进行系统分析的程序是：首先确定目标函数及为满足目标函数所需要的系统，然后建立数学模型，用线性规划方法从系统中优选出方案，以供决策者决策。

第二节　线性规划问题的解

一、概述

线性规划问题可用图解法求解，但只限于解算含有两个变量的线性规划问题，其特征表

达式为：

目标函数　$\max(\min)Z=C_1x_1+C_2x_2$

约束条件　$\sum_{j=1}^{2}a_{ij}\cdot x_j\leqslant(=\geqslant)b_i$

由于一个变量代表一个坐标轴，则具有两个变量的线性问题是个二维问题，其图象是个平面。多于两个变量的线性规划问题的图象则是个立面体，立面体图象的绘制是有困难的，因而利用图解法解算线性规划问题便受到了局限性。水土保持规划涉及的因素很多，远不止于两个变量，因而图解法对解算水土保持规划问题的实用价值是很小的。此处仅用于说明线性规划问题的几何意义。

上节[例 1] 是个只含有两个变量的线性规划问题，可用图解法求解。其目标函数和约束条件为：

$$\max\ Z=100x_1+320x_2 \tag{2-1}$$

$$\begin{cases}500x_1+375x_2\geqslant300\times3356 & (2-2)\\ 400x_2\geqslant125\times3356 & (2-3)\\ x_1+x_2\leqslant2500 & (2-4)\\ x_1\geqslant0 & (2-5)\\ x_2>0 & (2-6)\end{cases}$$

为保证系统的集合性、相关性、和适应性，　水稻与甘蔗的最高总产值，必须在满足全体约束条件的前提下取得。但约束条件为不等式，故问题有无穷多个答案。式（ 2-4)的图象如图 1 所示，直线左下方的点便都是满足式(2-4) 的解。因而解算线性规划问题，首先需要研究满足约束条件的解答区域。

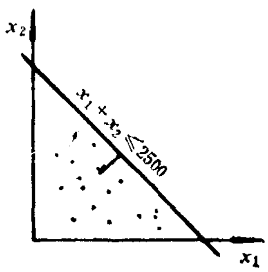


图 1

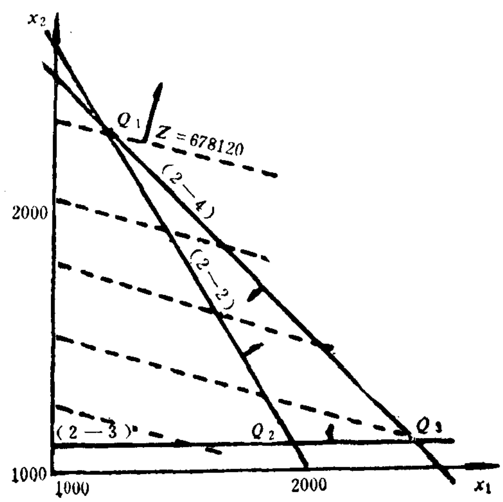


图 2

二、可行解域

绘出式(2-2)、(2-3)、(2-4)、(2-5)、(2-6) 各约束条件的图象，并标明约束方向，如图 2 所示。显然，同时满足各约束条件的解必然在约束条件图象所包围的区域$Q_1Q_2Q_3$以内；反之，$Q_1Q_2Q_3$区域所包围的点也都是满足全体约束条件的解。因而不难看出：区域内满足约束条件的解有无穷多个，这无穷多个解便称为线性规划问题的可行

解。可行解中能使目标函数取得极值的解，便是最优解。因而由约束条件所包围的区域$Q_1Q_2Q_3$便称为可行解域。目标函数的极值解便在可行解域内。因而，求解线性规划问题便归结于如何从可行解域内寻求满足目标函数的极值解。此即线性规划方法所要解决的实质问题。

三、凸集

凸集在线性规划问题的解算中是一个很重要的概念，目标函数是否存在极值，以及极值点的坐标如何确定，是由凸集的性质所决定的。

（一）凸集的含义

凸集是点的集合，它可以是一条线，一个有限平面，或者是一个有界的多面体。如果连接集合内任意二点，在其连接线段上所有的点均在此集合内，此点集合便为凸集。如图 3 中各种形体均属凸集。

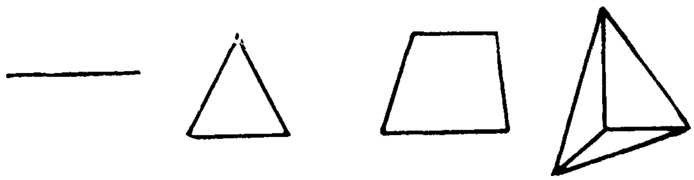
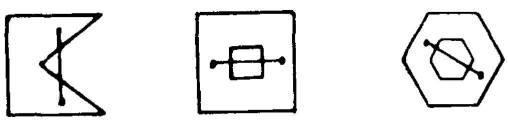


图 3



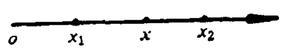


图 5

但图 4 所示便均不属凸集，因为在这类形体中至少存在两点，其连接线段上的点非全部落于点集合内。下面分析构成凸集的条件。

（二）凸集条件

1.一维凸集

一维凸集是一条直线，如图 5 所示线段x_1x_2是凸集，则线段上的点必在线的点集合内。设有任意点x在x_1x_2的连接线段上，便有：

$$\frac{x_2-x}{x-x_1}=\mu$$

即
$$x=\frac{\mu}{1+\mu}x_1+\frac{1}{1+\mu}x_2 \tag{2-7}$$

令
$$\lambda_1=\frac{\mu}{1+\mu} \qquad \lambda_2=\frac{1}{1+\mu}$$

式（2-7）便写为
$$x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2 \tag{2-7$'$}$$

因x_2-x与$x-x_1$均为正，故μ为正实数，从而λ_1、λ_2亦应为正实数，且有：

$$\lambda_1+\lambda_2=\frac{\mu}{1+\mu}+\frac{1}{1+\mu}=1$$

故得到： $$0 \leqslant \lambda_1,\ \lambda_2 \leqslant 1 \qquad (2\text{-}8)$$

式（2-7）和式（2-8）是x在x_1x_2连接线段上的条件。进而推及：凡满足此条件的点必在x_1x_2连接线段上，故线段x_1x_2是凸集，从而具有极值。此处为：

当$\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$时，有极大值$x=x_2$

当$\lambda_1=1$，$\lambda_2=0$时，有极小值$x=x_1$

可见，一维凸集的极值点落于线段的端点。

2.二维凸集

二维凸集是个有界平面，最简单的二维凸集是个平面三角形。今给出一任意三角形，如果三角形是凸集，则连接三角形内任意两点的线段，必在此三角形内。下面推导此条件的表达式。

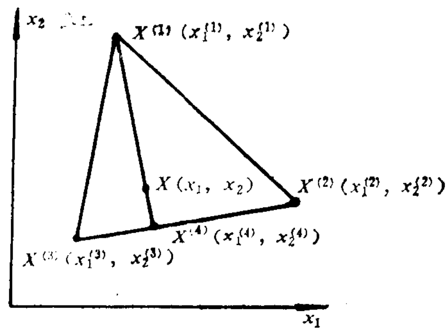


图 6

设在三角形内任取一点x，如图 6 所示，如果三角形是凸集，则点x的坐标值必然满足条件：

$$\begin{cases} x_1=\lambda_1 x_1^{(1)}+\lambda_2 x_1^{(2)}+\lambda_3 x_1^{(3)} \\ x_2=\lambda_1 x_2^{(1)}+\lambda_2 x_2^{(2)}+\lambda_3 x_2^{(3)} \end{cases} \qquad (2\text{-}9)$$

表示为向量： $$\boldsymbol{X}=\lambda_1\boldsymbol{C}_1+\lambda_2\boldsymbol{C}_2+\lambda_3\boldsymbol{C}_3$$

$\boldsymbol{C}_1$、$\boldsymbol{C}_2$、$\boldsymbol{C}_3$是三角形三个顶点坐标列向量，即

$$\boldsymbol{C}_1=\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C}_2=\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C}_3=\begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{bmatrix}$$

为证明式（2-9），在顶点$X^{(2)}$、$X^{(3)}$的连线上任取一点$X^{(4)}$，并假设存在正实数t_1、t_2满足条件：

$$t_1+t_2=1 \text{ 和 } 0 \leqslant t_1,\ t_2 \leqslant 1$$

依据一维凸集条件，点$x^{(4)}$的坐标便可线性地表示为：

$$\begin{cases} x_1^{(4)}=t_1 x_1^{(2)}+t_2 x_1^{(3)} \\ x_2^{(4)}=t_1 x_2^{(2)}+t_2 x_2^{(3)} \end{cases}$$

表示为向量，有

$$\boldsymbol{X}^{(4)}=t_1\boldsymbol{C}_2+t_2\boldsymbol{C}_3$$

进而在$X^{(1)}$、$X^{(4)}$二点的连线上取一点X，同样运用一维凸集条件，并假设存在正实数τ_1、τ_2满足条件：

$$\tau_1+\tau_2=1 \text{和 } 0 \leqslant \tau_1,\ \tau_2 \leqslant 1$$

则点x的坐标值写为：

$$x_1=\tau_1 x_1^{(1)}+\tau_2 x_1^{(4)}$$
$$x_2=\tau_1 x_2^{(1)}+\tau_2 x_2^{(4)}$$

表示为向量，有：

$$\boldsymbol{X}=\tau_1\boldsymbol{C}_1+\tau_2\boldsymbol{C}_4=\tau_1\boldsymbol{C}_1+\tau_2(t_1\boldsymbol{C}_2+t_2\boldsymbol{C}_3)$$

$$=\tau_1 C_1+\tau_2 t_1 C_2+\tau_2 t_2 C_3$$

令 $$\tau_1=\lambda_1 \qquad \tau_2 t_1=\lambda_2 \qquad \tau_2 t_2=\lambda_3$$

便有 $$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\tau_1+\tau_2(t_1+t_2)$$
$$=\tau_1+\tau_2=1$$

并且 $$0\leqslant\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\leqslant 1$$

故 $$X=\lambda_1 C_1+\lambda_2 C_2+\lambda_3 C_3$$

为平面三角形是凸集的条件.

3.三维凸集

三维空间构成的形体是个有界多面体，见图 7 。在三维空间坐标中任意选取一个四边形，顶点为$X^{(1)}$、$X^{(2)}$、$X^{(3)}$、$X^{(4)}$，则依据一维与二维凸集条件的论证方法，同样可证明四面体是凸集的条件为：

$$X=\lambda_1 C_1+\lambda_2 C_2+\lambda_3 C_3+\lambda_4 C_4$$

X是四面体内任意一点的坐标列向量，即

$$X=(x_1,\ x_2,\ x_3)^T$$

C_1、C_2、C_3、C_4是四个顶点坐标的列向量，即

$$C_1=\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} \quad C_2=\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} \quad C_3=\begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{bmatrix} \quad C_4=\begin{bmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \end{bmatrix}$$

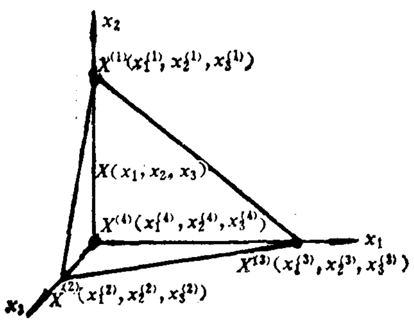


图 7

λ_i为正实数，其值满足：

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1 \text{和 } 0\leqslant\lambda_i\leqslant 1$$
$$i=(1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

4.n维凸集

显然，n维空间形体是凸集的条件便可写为

$$X=\lambda_1 C_1+\lambda_2 C_2+\cdots\cdots+\lambda_k C_k$$

X是n维空间形体内任意一点的坐标列向量：

$$X=(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots x_n)^T$$

C_1、$C_2\cdots C_k$是k个顶点坐标列向量：

$$C_1=\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix} \quad C_2=\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots C_k=\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

λ_1、$\lambda_2\cdots\lambda_k$为正实数。且满足：

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_k=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1 \text{ 和 } 0\leqslant\lambda_i\leqslant 1$$
$$i=(1,\ 2\cdots\cdots k)$$

因而凸集定义为 设C是n维空间的点集合，C_1，$C_2\cdots\cdots C_k$是点集合的k个顶点的坐标列向量，如存在任意正实数λ_i，其值满足：

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1 \text{ 和 } 0\leqslant\lambda_i\leqslant 1$$

从而有
$$X=\lambda_1 C_1+\lambda_2 C_2+\cdots\cdots+\lambda_k C_k=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i C_i$$

X便属于C C是凸集。

四、可行解域的极值范围

由目标函数的约束条件所包围的区域，是满足约束条件的可行解域，可行解域是否存在极值，亦即是否有一个可行解能满足目标函数的极值要求，便取决于可行解域是否是凸集。

（一）可行解域的空间形体

给出一组线性规划问题的约束条件：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m \\ \qquad x_1,\ x_2\cdots\cdots x_n\geqslant 0 \end{cases}$$

其中含有n个变量，故线性规划问题属于n维空间问题。每一约束条件：

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots m)$$

代表n维空间的一个超平面．如果有m个约束条件，便有m个超平面．非负约束条件

$$x_j\geqslant 0\ (\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots n\ )$$

则代表坐标面。如果有n个非负约束变量，便有n个坐标面。因而由约束条件所包围的可行解域便是以n维空间的m个超平面：

$$AX\leqslant b$$

与n个坐标面：
$$X\geqslant 0$$

为边界的有界多面体。但可行解域是否存在极值，便需取决于此有界多面体是否是凸集．

显然，如果有界多面体是凸集，便应满足凸集条件：

$$Z=\lambda_1 C_1+\lambda_2 C_2+\cdots+\lambda_k C_k=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i C_i \qquad (2\text{-}10)$$

式中，λ_1，$\lambda_2\cdots\lambda_k$是k个正实数，并有：$0\leqslant\lambda_i\leqslant 1$ 和 $\sum_{i=1}=1$

C_1，C_2，$\cdots C_k$是可行解域k个顶点坐标列向量。假如能证明：

$$AZ\leqslant b \text{和} Z\geqslant 0$$

则说明凸集内的任意点是满足约束条件的，即有

$$AX=AZ\leqslant b\text{和}X=Z\geqslant 0$$

从而亦说明由$AX\leqslant b$和$X\geqslant 0$所包围的可行解域是凸集。下面给予证明：

$$AZ=A\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i C_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(AC_i) \qquad (2\text{-}11)$$

因C_i是可行解域顶点的坐标列向量，便有

$$C_i=X$$

故式(2-11)写为 $$AZ=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(AX)\leqslant\sum_{i=1}^{k}\lambda_i b$$

因 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$ 故有 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i b=b$

于是证明 $$AZ\leqslant b$$

同时也不难证明 $Z\geqslant 0$。因 $0\leqslant\lambda_i\leqslant 1$，且 $C_i=X\geqslant 0$

故 $$Z=\sum_{i=1}\lambda_i C_i\geqslant 0$$

因而可行解域是凸集，存在极值。

（二）可行解域的极值点

设线性规划问题的目标函数：

$$Z(X)=C_1x_1+C_2x_2+\cdots+C_nx_n$$

是定义于可行解域：

$$AX\leqslant b$$
$$X\geqslant 0$$

的线性函数。又设 S_1, $S_2\cdots\cdots S_n$是可行解域k个顶点的坐标列向量：

$$S_1=\begin{bmatrix}x_1^{(1)}\\x_2^{(1)}\\\vdots\\x_n^{(1)}\end{bmatrix}\quad S_2=\begin{bmatrix}x_1^{(2)}\\x_2^{(2)}\\\vdots\\x_n^{(2)}\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots S_k=\begin{bmatrix}x_1^{(k)}\\x_2^{(k)}\\\vdots\\x_n^{(k)}\end{bmatrix}$$

将 K个顶点的坐标值逐个代入目标函数，其中必有一顶点的函数值最大，假设为：

$$M=\max Z(S_i)$$

因可行解域是凸集，则可行解域内任意点 X的坐标列向量应满足条件：

$$X=\lambda_1S_1+\lambda_2S_2+\cdots+\lambda_KS_K=\sum_{i=1}^{K}\lambda_iS_i$$

式中 $0\leqslant\lambda_i\leqslant 1$ 并 $\sum_{i=1}^{K}\lambda_i=1$

S_i是可行解域的任意顶点的坐标列向量，如X落于顶点，便有$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$，此时$X=S_i$,即有

$$Z(X)=Z(S_i)$$

而 $$Z(S_i)\leqslant M=\max_i Z(S_i)$$

故 $$Z(X)\leqslant M=\max_i Z(S_i)$$

上式说明可行解域内任意点的函数值均小于最大的顶点函数值。而顶点也是包含在可行解域范围以内的，因而最大目标函数值只能在可行解域的顶点取得。可行解域顶点的个数是有限的，于是总可以在有限的顶点中找到一个满足于目标函数极值的解。同理，可行解域也必有一顶点的函数值最小，假定为$M=\min_i Z(C_i)$，当题意寻求极小值，亦总可以在有限的顶点中找到一个满足于目标函数极小值的解。因而称顶点的坐标值为线性规划问题的基本可行解。

极值点既包含在顶点内，便只需采用搜索法将可行解域顶点的坐标值逐个代入目标函数，取其中最大值或最小值，便是寻求的极值解。如 [例1]约束条件所构成的可行解域是个平面三角形，只有三个顶点，通过联立解算约束条件，便可得出三个顶点的坐标值，见表2-1。其中Q_1的坐标值所对应的目标函数值最大。计算结果表明：在满足粮食自给和燃料供应等约束条件的前提下，为获得最大经济效益，种植面积的最优分配方案为水稻554亩、甘蔗1946亩。上述用顶点坐标值代入目标函数逐点进行搜索的方法，称为枚举法。

表 2-1

顶点	顶点坐标		目标函数值
	x_1	x_2	Z
Q_1	554	1946	678120
Q_2	1227.1	1048.7	458294
Q_3	1451.3	1048.7	480714

表 2-2

坡地	铲运斗	推土机	斗车	架子车
坡地(1)(工日/亩)	2	1	4	0
坡地(2)(工日/亩)	2	2	0	4

当约束条件较多时，顶点数目也会相应增多，如采用枚举法逐个顶点进行计算也是很麻烦的。此时可采用作图法寻求目标函数的极值。因目标函数：

$$\max Z = CX$$

可表示为以Z为参数的一组平行线。位于同一直线上的点具有相同的目标函数值，称为等值线。当Z的取值由小增大，直线便以相同的斜率沿着它的法线方向移动，当移动到某个顶点，目标函数的取值便最大，如图 2 虚线所示。用[例1]目标函数的斜率：

$$m=\frac{x_2}{x_1}=-\frac{1}{3.2}$$

绘出一组直线，这组直线的函数值便是沿着其法线方向递增的，当直线交于顶点Q_1，便得到目标函数的极大值。

五、图解法步骤

【例 5】 某水土流失地区需要平整两处坡地用于造林，计划采用铲运斗、推土机、斗车、架子车四种工具施工，各施工工具每平整一亩坡地所需工日列如表2-2。但施工队接受了其他任务，各种施工工具可以投入平整土地的工日控制为：铲运斗12个、推土机8个、斗车16个、架子车12个。因坡地的土质有差别，故用于造林的经济效益不同，坡地（1）的年亩产值为200元。坡地（2）的年亩产值为300元。问应如何安排施工方案？取得的产值最高？

下面通过解算[例5]，介绍图解法步骤。

（1）分析题意是否具有线性规划问题的特征。然后写出目标函数和约束条件：

目标函数 $\max Z=200x_1+300x_2$

约束条件 推土机 $x_1+2x_2\leqslant 8$ （1）

铲运斗 $2x_1+2x_2\leqslant 12$ （2）

斗车车 $4x_1\leqslant 16$ （3）

架子车 $4x_2\leqslant 12$ （4）

非负约束　　$x_1, x_2 \geq 0$　　（5）

式中　Z——坡地用于造林的产值；

x_1, x_2——分别为坡地（1)与坡地(2)的平整面积。

（2）将约束条件按等式约束绘出图象，并标明约束方向，如图8所示。标出可行解域为$Q_1OQ_2Q_3Q_4$。

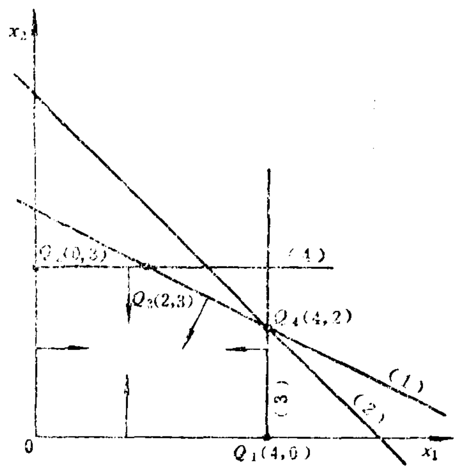


图 8

表 2-3

顶点	相关约束方程	平整面积（亩）		产值Z（元）
		坡地（1）	坡地（2）	
Q_1	(3)(5)	4	0	800
Q_2	(4)(5)	0	3	900
Q_3	(1)(4)	2	3	1300
Q_4	(2)(3)	4	2	1400

（3）联立解算相关的约束方程，确定可行解域顶点的坐标值，并逐个代入目标函数，优选出相应于最大产值的顶点坐标，即为目标函数寻求的坡地最优平整方案。计算列如表2-3。表内Q_1, Q_2, Q_3, Q_4的坐标值即为目标函数的基本可行解。其中顶点$Q_4(4,2)$相应的产值最大。即当坡地(1)平整4亩，坡地（2)平整2亩，获得最大年产值1400元，为最优解。

利用线性规划方法进行系统分析，旨在合理利用有限资源，取得最优的总体效益。[例5]所提供的资源为用于平整土地的施工设备，因而其最大产值是在充分利用施工设备的前提下取得的。表2-4列出了可行解域各顶点的坐标值，亦即各种土地平整方案所相应的施工设备利用情况。表内的剩余工日表明：基本可行解$Q_1(4,0)$，$Q_2(0,3)$，$Q_3(2,3)$均未能充分利用施工设备投入的工日，没有充分发挥设备的功能，不属于总体效益最优，只有$Q_4(4,2)$仅剩余架子车工日4个，才算充分利用了设备资源，因而取得了最大产值。

六、无解、无穷多个最优解、解无界

采用图解法解算线性规划问题，有时候会遇到如下情况。

（1）如果将[例1]的约束条件人均粮食增为350kg，则约束条件的表达式应改写为：

$$500x_1 + 375x_2 \geq 350 \times 3356$$

其与约束条件(2-4)：

$$x_1 + x_2 \leq 2500$$

表 2-4

施工设备		铲运斗		推土机		斗车		架子车	
平整坡地编号		1	2	1	2	1	2	1	2
一亩坡地用工(工日/亩)		2	2	1	2	4	0	0	4
控制投入工日		12		8		16		12	
$Q_1(4,0)$	耗用工日	8	0	4	0	16	0	0	0
	剩余工日	4		4		0		12	
$Q_2(0,3)$	耗用工日	0	6	0	6	0	0	0	12
	剩余工日	6		2		16		0	
$Q_3(2,3)$	耗用工日	4	6	2	6	8	0	0	12
	剩余工日	2		0		8		0	
$Q_4(4,2)$	耗用工日	8	4	4	4	16	0	0	8
	剩余工日	0		0		0		4	

便不在Q_1相交，见图 2而是相交于Q_4如图 9 所示。从图 9 所标明的约束方向可知：此情况的可行解域是空集，无可行解。这是由于给出的面积在满足薪炭供应的前提下，不可能满足人均350kg粮食。

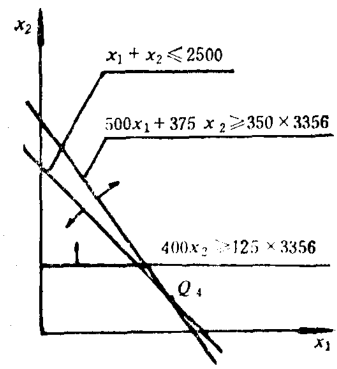


图 9

又如果在[例 5]中增加一个约束条件：

$$-2x_1+x_2\geqslant 4$$

则可行解域亦为空集，无可行解。

（2）假设[例 1]的水稻和甘蔗的单位面积产值相同，则目标函数写为：

$$\max\ Z=100x_1+100x_2$$

或 $$\max\ Z=320x_1+320x_2$$

便有无穷多个最优解。因为此情况在满足约束条件的前提下，水稻和甘蔗的种植面积可以任意选定，所得目标函数值相同，从而不存在优选的问题。

又如果目标函数的斜率与某个约束条件的斜率相同， 则目标函数与约束条件的图象便相重合。例如将[例5]的目标函数改写为：

$$\max Z=200x_1+400x_2$$

则以$m=-1/2$ 为斜率，将直线移动到顶点Q_4时，便与约束条件

$$x_1+2x_2\leqslant 8$$

的图象相重合. 此情况表明线段Q_3Q_4上任意一点均可使目标函数Z取得相同的最大值，从而此线性规划问题便有无穷多个最优解.

（3）如有：

目标函数 $$\max\ Z=2x_1+2x_2$$