

普通高等教育“十五”国家级规划教材
大数数学——

随 机 数 学

吉林大学数学学院

高文森 潘 伟 主编

高等教育出版社

《大学数学》系列教材编委会

主 任 李辉来

副主任 张魁元

编 委 (以姓氏笔画为序)

王国铭 王树岩 白 岩 刘停战

张魁元 李忠范 李辉来 陈殿友

赵建华 郭 华 高文森 潘 伟

戴天时

内 容 提 要

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材《大学数学》中的一册。系列教材《大学数学》吸收了国内外同类教材的精华,借鉴了近几年出版的一批“面向21世纪课程教材”的成功经验,体现了时代的特点,着重加强基础、强化应用、整体优化、注重后效,力争做到科学性、系统性和可行性的统一,传授数学知识和培养数学素养的统一。在体系与内容的编排上,本书认真考虑不同专业、不同学时的授课对象的需求,对有关内容和习题进行了较好处理。

本书介绍随机数学的基础知识,内容包括:随机事件及其概率,随机变量及其概率分布,多维随机变量及其概率分布,随机变量的数字特征,大数定律及中心极限定理,样本及样本函数的分布,参数估计,假设检验,回归分析,方差分析与正交试验设计,随机过程的基本知识,马尔可夫链,平稳过程等,书后附习题参考答案及常用分布表。

本书可供高等学校非数学类理工科各专业学生选用,也可供工程技术人员参考。

前 言

《大学数学》系列教材是普通高等教育“十五”国家级规划教材。本系列教材共四册：《微积分》（上、下）、《线性代数》和《随机数学》。

本系列教材的编写体现了时代的特点，本着加强基础、强化应用、整体优化、注重后效的原则，力争做到科学性、系统性和可行性的统一，使传授数学知识和培养数学素养得到了较好的结合。

本系列教材是在吸取国内外同类教材的精华，借鉴近几年我国出版的一批“面向 21 世纪课程教材”成功经验结合在吉林大学公共数学教学教研的具体实践，针对非数学类理工科大学生的特点编写的。

本系列教材内容充实，可作为高等学校非数学类理工科各专业的教材或教学参考书。在教材体系与内容的编排上，认真考虑了不同专业、不同学时的授课对象的需求。对数学要求较高的物理、计算机、电子等专业原则上可讲授本教材的全部内容，其他专业可以在不带“*”号的内容中，根据实际需要选择适当的章节讲授。每章后面所配备的习题分成两类，其中(A)是体现教学基本要求的习题；(B)是对基本内容提升、扩展以及综合运用有关知识的习题。较难的题在题号前用“ ”号做了标注。与教材中“*”号内容相应的习题用“*”号做了标注。本书的最后给出了习题参考答案或提示，供读者参考。

本册《随机数学》的一、六至十三章由高文森编写，二至五章由潘伟编写。

在《大学数学》系列教材的编写过程中，得到了吉林大学教务处的大力支持。数学学院尹景学教授为本套教材初稿的版面设计、软件培训提供了悉心的技术指导；公共数学教学与研究中心副主任吴晓俐女士承担了本系列教材初稿的编务工作，研究生王军林、孙鹏、任长宇、李明、柯长海、吴刚、姜政毅及湖北大学郑巧仙老师完成了本系列教材初稿的排版制图工作，在此一并致谢。作者要特别感谢高等教育出版社高等理工分社的领导和编辑们，他们对本系列教材的编辑出版工作给予了精心指导和大力支持。

由于我们水平所限，书中的错误和不妥之处，恳请广大读者批评指正，以期不断完善。

目 录

| | | | |
|----------------------------|--------|----------------------|--------|
| 第一章 随机事件及其概率 | (1) | § 4 正态分布 | (53) |
| § 1 随机试验 随机事件 | (1) | 4.1 正态分布 | (53) |
| 1.1 必然现象和随机现象 | (1) | 4.2 标准正态分布 | (54) |
| 1.2 随机试验和随机事件 | (2) | 4.3 标准正态分布的上分 | |
| 1.3 随机事件的关系及运算 ... | (3) | 位点 | (57) |
| § 2 随机事件的概率 | (8) | § 5 随机变量的函数的分布 | (58) |
| 2.1 频率 | (8) | 5.1 离散型随机变量的函数 | |
| 2.2 概率 | (10) | 的分布 | (58) |
| 2.3 古典概型 | (13) | 5.2 连续型随机变量的函数 | |
| 2.4 几何概型 | (16) | 的分布 | (59) |
| § 3 条件概率 | (18) | 习题二 | (62) |
| 3.1 条件概率与乘法公式 | (18) | 第三章 多维随机变量及其概率 | |
| 3.2 全概率公式 | (23) | 分布 | (65) |
| 3.3 贝叶斯(Bayes)公式 | (26) | § 1 二维随机变量 | (65) |
| § 4 事件的独立性 | (28) | 1.1 二维随机变量及其分布 | |
| § 5 伯努利(Bernoulli)概型 | (32) | 函数 | (65) |
| 习题一 | (34) | 1.2 二维离散型随机变量及其概 | |
| 第二章 随机变量及其概率分布 | (38) | 率分布 | (66) |
| § 1 随机变量及其分布函数 | (38) | 1.3 二维连续型随机变量及其概 | |
| 1.1 随机变量 | (38) | 率密度 | (68) |
| 1.2 随机变量的分布函数 | (39) | 1.4 均匀分布和正态分布 | (70) |
| § 2 离散型随机变量及其概 | | § 2 边缘分布及随机变量的独 | |
| 率分布 | (43) | 立性 | (72) |
| 2.1 离散型随机变量及其概 | | 2.1 边缘分布 | (72) |
| 率分布 | (43) | 2.2 随机变量的独立性 | (75) |
| 2.2 几种常用的离散型随机变量 | | § 3 条件分布 | (78) |
| 及其概率分布 | (45) | 3.1 离散型随机变量的条件 | |
| § 3 连续型随机变量及其概率 | | 分布 | (78) |
| 密度 | (49) | 3.2 连续型随机变量的条件 | |
| 3.1 连续型随机变量及其概率 | | 分布 | (79) |
| 密度 | (49) | § 4 两个随机变量的函数 | |
| 3.2 均匀分布和指数 | | 的概率分布 | (81) |
| 分布 | (51) | 4.1 二维离散型随机变量的函数 | |

| | | | |
|---------------------|-------|--|-------|
| 的概率分布 | (81) | 1.2 简单随机样本 | (133) |
| 4.2 二维连续型随机变量的函数 | | §2 直方图与样本分布函数 | |
| 的概率分布 | (83) | | (135) |
| §5 n 维随机变量 | (91) | 2.1 直方图 | (135) |
| 习题三 | (93) | 2.2 样本分布函数 | (138) |
| 第四章 随机变量的数字特征 | (97) | §3 样本函数及其概率分布 | (140) |
| §1 数学期望 | (97) | §4 χ^2 分布 | (146) |
| 1.1 数学期望的概念 | (97) | §5 t 分布 | (150) |
| 1.2 随机变量函数的数学 | | §6 F 分布 | (153) |
| 期望 | (100) | 习题六 | (157) |
| 1.3 数学期望的性质 | (102) | 第七章 参数估计 | (159) |
| §2 方差 | (105) | §1 参数的点估计 | (159) |
| 2.1 方差及其计算公式 | (105) | 1.1 矩估计法 | (159) |
| 2.2 方差的性质 | (108) | 1.2 最大似然估计法 | (162) |
| 2.3 随机变量的标准化 | (109) | §2 估计量的评选标准 | (170) |
| §3 协方差与相关系数 | (109) | 2.1 无偏性 | (170) |
| 3.1 协方差 | (109) | 2.2 有效性 | (172) |
| 3.2 相关系数 | (110) | 2.3 一致性 | (173) |
| §4 矩 | (115) | §3 参数的区间估计 | (174) |
| 4.1 原点矩和中心矩 | (115) | §4 单个正态总体均值与方 | |
| 4.2 协方差矩阵 | (116) | 差的区间估计 | (175) |
| 4.3 n 维正态分布 | (117) | 4.1 设 σ^2 已知,求 μ 的置信水平 | |
| 习题四 | (118) | 为 $1 - \alpha$ 的置信区间 | (175) |
| 第五章 大数定律及中心极限 | | 4.2 设 σ^2 未知,求 μ 的置信水平 | |
| 定理 | (122) | 为 $1 - \alpha$ 的置信区间 | (177) |
| §1 大数定律 | (122) | 4.3 设 μ 已知,求 σ^2 的置信水平 | |
| 1.1 切比雪夫(Chebyshev) | | 为 $1 - \alpha$ 的置信区间 | (178) |
| 不等式 | (122) | 4.4 设 μ 未知,求 σ^2 的置信水平 | |
| 1.2 依概率收敛 | (124) | 为 $1 - \alpha$ 的置信区间 | (179) |
| 1.3 大数定律 | (124) | §5 两个正态总体均值差与方 | |
| §2 中心极限定理 | (127) | 差比的区间估计 | (180) |
| 2.1 依分布收敛 | (127) | 5.1 设 σ_1^2 和 σ_2^2 都已知,求 $\mu_1 - \mu_2$ | |
| 2.2 中心极限定理 | (127) | 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信 | |
| 习题五 | (131) | 区间 | (180) |
| 第六章 样本及样本函数的分布 | | 5.2 设 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 为未知,求 $\mu_1 - \mu_2$ | |
| | (132) | 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信 | |
| §1 总体与样本 | (132) | 区间 | (181) |
| 1.1 总体 | (132) | 5.3 设 μ_1 和 μ_2 都已知,求 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的 | |

| | | | |
|--|-------|---|-------|
| 置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信 区间 | (183) | 3.1 多元线性回归模型与系数的 最小二乘估计 | (232) |
| 5.4 设 μ_1 和 μ_2 都未知 求 $\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma}$ 的 置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信 区间 | (184) | 3.2 线性假设的显著性检验 | (233) |
| § 6 单侧置信区间 | (185) | 习题九* | (237) |
| 习题七 | (187) | 第十章 方差分析与正交试验 设计* | (239) |
| 第八章 假设检验 | (190) | § 1 单因素试验的方差分析 | (239) |
| § 1 假设检验的基本概念 | (190) | § 2 双因素试验的方差分析 | (245) |
| § 2 单个正态总体均值与方差 的假设检验 | (193) | § 3 有交互作用的双因素试验 的方差分析 | (251) |
| 2.1 单个正态总体均值的 假设检验 | (193) | § 4 正交试验设计及其结果 分析 | (257) |
| 2.2 单个正态总体方差的 假设检验 | (195) | 4.1 正交试验设计的设计与 试验阶段 | (258) |
| § 3 两个正态总体均值差与方差 比的假设检验 | (197) | 4.2 正交试验设计的结果 分析 | (261) |
| 3.1 两个正态总体均值差 的假设检验 | (197) | 习题十* | (269) |
| 3.2 两个正态总体方差比的 假设检验 | (199) | 第十一章 随机过程的基本 知识* | (271) |
| § 4 总体分布的假设检验—分 布拟合检验* | (203) | § 1 随机过程的概念 | (271) |
| 习题八 | (208) | § 2 随机过程的有限维分布 函数族 | (276) |
| 第九章 回归分析* | (211) | § 3 随机过程的数字特征 | (279) |
| § 1 一元线性回归分析 | (211) | § 4 几种常用的随机过程 | (284) |
| 1.1 回归分析的基本概念 | (211) | 5.1 二阶矩过程 | (284) |
| 1.2 常数 a, b 的最小二乘 估计 | (212) | 4.2 正态过程 | (284) |
| 1.3 估计量 a, b 的分布 | (216) | 4.3 独立增量过程 | (285) |
| 1.4 回归效果的显著性 检验 | (218) | 4.4 泊松(Poisson)过程 | (286) |
| 1.5 回归系数的区间估计 | (222) | 4.5 维纳(Wiener)过程 | (288) |
| 1.6 利用回归直线方程进行预测 与控制 | (222) | 习题十一* | (288) |
| § 2 可线性化的回归方程 | (226) | 第十二章 马尔可夫(Markov)链* ... | (291) |
| § 3 多元线性回归分析 | (232) | § 1 马尔可夫链及转移概率 | (291) |
| | | § 2 切普曼 - 柯尔莫哥洛夫(Chapman - Kolmogorov)方程 | (296) |
| | | 2.1 切普曼 - 柯尔莫哥洛夫 方程 | (296) |
| | | 2.2 初始概率分布及时刻 m 的 概率分布 | (298) |

| | | | |
|---------------------------|-------|---------------------------------|-------|
| 2.3 有限维概率分布 | (300) | 附表 1 标准正态分布表..... | (337) |
| § 3 马尔可夫链的遍历性 | (302) | 附表 2 泊松分布表..... | (339) |
| 习题十二* | (308) | 附表 3 t 分布表 | (342) |
| 第十三章 平稳过程* | (311) | 附表 4 χ^2 分布表 | (344) |
| § 1 严平稳过程及其数字 特征 | (311) | 附表 5 F 分布表..... | (347) |
| § 2 宽平稳过程 | (312) | 附表 6 正交表..... | (357) |
| § 3 相关函数的性质 | (315) | 附表 7 相关系数检验 表 $r(n-2)$ | (359) |
| 习题十三* | (319) | 附表 8 几种常用的概率分布 | (360) |
| 习题参考答案 | (320) | 参考文献 | (362) |
| 附表 | (337) | | |

第一章 随机事件及其概率

随机数学是研究随机现象统计规律性的数学学科,它的理论和方法在自然科学、社会科学、工程技术、经济、管理等诸多领域中得到了广泛的应用.

概率论是随机数学的理论基础,它给出描述随机现象规律性的数学模型.随机事件及随机事件的概率是概率论中最基本的概念.早在17世纪,人们就开始用古典概型来研究人口统计、天文、产品检查等各个方面的问题,促进了概率论的发展.但直到20世纪30年代概率论才有了建立在公理化体系上的严密的理论基础.

本章介绍随机试验、样本空间、随机事件、随机事件的频率和概率、条件概率以及随机事件的独立性等基本概念,介绍古典概型和几何概型,介绍加法公式、乘法公式、全概率公式、贝叶斯(Bayes)公式以及二项概率公式等计算概率的基本公式.

§ 1 随机试验 随机事件

1.1 必然现象和随机现象

在自然界和人类社会中出现的各种现象大致可以分为两类:必然现象和随机现象.

在一定条件下必然出现的现象叫做必然现象.例如,每天早晨太阳从东方升起,人从地面向上抛起的石块经过一段时间必然落到地面,同性电荷互相排斥等,都是必然现象.

在相同的条件下可能出现也可能不出现的现象叫做随机现象.例如,抛掷一枚骰子出现的点数,抽样检查某产品的检验结果,某城市某日的交通事故发生的次数等,都是随机现象.许多随机现象在相同的条件下可以重复出现.如果我们对这种随机现象进行大量重复地观测,则在每次观测之前不能预先确定其结果,这就是这种现象的随机性;但在进行了大量重复地观测之后,其结果往往会表现出某种规律性,这就是统计规律性.例如,抽样检查一大批电子元件,每次抽查的一件可能是合格品,也可能是次品,检验之前无法预先确定是哪一个结果,这就是随机性;但在多次抽查之后,次品出现的比率(即在抽查中出现的次品件数与抽查总件数的比值)将在整批电子元件的次品率附近摆动,这就是统计规律性.

1.2 随机试验和随机事件

为了研究和揭示随机现象的统计规律性,我们需要对随机现象进行大量重复地观察、测量或试验.为了方便,将它们统称为试验.如果试验具有以下特点:

1.可重复性 试验可以在相同条件下重复进行多次,甚至进行无限多次;
2.可观测性 每次试验的所有可能结果都是明确的、可以观测的,并且试验的可能结果有两个或两个以上;

3.随机性 每次试验出现的结果是不确定的,在试验之前无法预先确定究竟会出现哪一个结果,
则称之为随机试验,简称为试验.

我们用字母 E 表示一个随机试验,用 ω 表示随机试验 E 的最基本的结果,称为样本点,用 $\Omega = \{\omega\}$ 表示随机试验 E 的最基本结果的集合,称为样本空间.

例 1.1 抛掷一枚硬币,观察正面和背面出现的情况(将这两个基本结果依次记为 ω_1 和 ω_2),则该试验的样本空间为

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}.$$

例 1.2 抛掷一枚骰子,观察出现的点数,则基本结果是“出现 i 点”,记为 $\omega_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$,则该试验的样本空间为

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$$

例 1.3 在一只罐子中装有大小和形状完全一样的 2 个白球和 3 个黑球,依次在 2 个白球上标以数字 1 和 2,在 3 个黑球上标以数字 3, 4 和 5,从罐子中任取一个球,用 ω_i 表示“取出的是标有数字 i 的球”($i = 1, 2, 3, 4, 5$) 则试验的样本空间为

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}.$$

例 1.4 在一个箱子中装有 10 个同型号的某种零件,其中有 3 件次品和 7 件合格品,从此箱子中任取 3 个零件,其中的次品个数可能是 0, 1, 2, 3, 试验的样本空间为

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3\}.$$

例 1.5 某机场问讯电话在一天内收到的电话次数可能是 0, 1, 2, ... , 则试验的样本空间为

$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

例 1.6 考察某一大批同型号电子元件的使用寿命(单位 t), 则试验的样本空间为

$$\Omega = [0, +\infty).$$

为了研究随机现象的统计规律性,需要合理地安排随机试验,分析试验的样

本空间.在许多实际问题中,人们不仅关心试验最基本的结果,还关心某些特定的结果在重复试验中是否会出现,出现的比率(即该结果出现的次数与试验总次数的比值)有多大.例如,在例 1.6 中,如果规定该型号电子元件优质品的标准是使用寿命超过 1000h,则“任取 1 个元件是优质品”这一结果可以用样本空间 $\Omega = [0, +\infty)$ 的一个子集 $A = (1000, +\infty)$ 来表示.这一结果在重复试验中有时出现,有时不出现.如果这一结果在重复试验中出现的比率高,则表明这批元件的优质品率较高.

我们把随机试验 E 的样本空间 $\Omega = \{ \omega \}$ 的子集(进一步还要要求这些子集满足一些特定的性质,在此不做讨论)称为随机试验 E 的随机事件,简称为事件,用大写字母 A, B, C 等表示.设 $\omega \in A$, 如果试验结果 $\omega \in A$, 则称在这次试验中事件 A 发生,如果 $\omega \notin A$ 则称事件 A 不发生.

在上面的例子中, $A = (1000, +\infty) \subset \Omega = [0, +\infty)$, A 是一个随机事件.如果取出一个元件的使用寿命 $\omega = 1500\text{h}$, 则 $\omega \in A$, 表明事件 A 发生;如果取出另一个元件的使用寿命 $\omega = 920\text{h}$, 则 $\omega \notin A$, 表明事件 A 没有发生.

由一个样本点 ω 组成的事件称为基本事件.样本空间 Ω 本身也是 Ω 的子集,它包含 Ω 的所有样本点,在每次试验中 Ω 必然发生,称为必然事件.空集 \emptyset 也是 Ω 的子集,它不包含任何样本点,在每次试验中都不可能发生,称为不可能事件.

例 1.7 在例 1.3 中,子集 $A = \{ \omega_1, \omega_2 \}$ 表示事件“从罐子中任取一球是白球”,子集 $B = \{ \omega_3, \omega_4, \omega_5 \}$ 表示事件“从罐子中任取一球是黑球”.事件“取出 2 号球”可表示为 $C = \{ \omega_2 \}$,事件“取出的是白球或黑球”为必然事件,事件“取出的是黄球”为不可能事件.

在一个样本空间中,如果只有有限多个样本点,则称它为有限样本空间;如果有无限多个样本点,则称它为无限样本空间.在例 1.1 ~ 例 1.4 中的样本空间都是有限样本空间,在例 1.5 和例 1.6 中的样本空间都是无限样本空间.

1.3 随机事件的关系及运算

在一个试验 E 的样本空间 Ω 中可能有很多随机事件,每一事件具有各自的特性,在一些事件之间可能存在着某种联系.为了考察一个比较复杂的事件,往往是把它与一些较为简单的事件联系起来,通过对这些较为简单事件的研究去掌握比较复杂事件的特性,因此我们需要研究事件的关系及事件的运算.由于事件是样本空间的子集,因此事件的关系及运算与集合的关系及运算是互相对应的.这里要注意的是理解事件的关系及运算的概率含义.

在以下的讨论中,假定 Ω 是试验 E 的样本空间,所论及的事件都是同一试验 E 的事件.

1. 随机事件的关系

(1) 事件的包含 如果当事件 A 发生时事件 B 一定发生,则称事件 B 包含事件 A ,记作 $A \subset B$.

在例 1.7 中,有 $C \subset A$.

设试验 E 是将一个点随机地投入图 1.1 ~ 图 1.6 中的矩形区域 Ω 内,事件 A 表示点落在圆形区域 A 内,事件 B 表示点落在区域 B 内,用 Ω 表示试验 E 的样本空间,用 Ω 的子集 A 和 B 分别表示事件 A 和事件 B ,则在图 1.1 中,有 $A \subset B$.

对于任意事件 A ,有 $A \subset A$.

如果 $A \subset B, B \subset C$,则 $A \subset C$.

(2) 事件的相等 如果事件 A 和事件 B 相互包含,即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称事件 A 与事件 B 相等,记作 $A = B$.

事件 A 与事件 B 相等,表明 A 和 B 是样本空间 Ω 的同一子集,实际上是同一事件.

(3) 事件的互不相容 如果事件 A 和事件 B 在同一次试验中不能同时发生,则称事件 A 与事件 B 是互不相容的,或称事件 A 与事件 B 是互斥的.

在例 1.7 中,事件 A 与事件 B 是互不相容的,事件 C 与事件 B 也是互不相容的.这表明,事件 B 和事件 C 在同一次试验中是不能同时发生的,但也可能同时都不发生.

在图 1.2 中,随机点不能同时落在圆形区域 A 和 B 内,因此事件 A 与事件 B 是互不相容的. A 和 B 作为样本空间 Ω 的子集,它们的交集是空集 \emptyset .

(4) 事件的互逆 如果在每一次试验中事件 A 和事件 B 都有一个且仅有一个发生,则称事件 A 与事件 B 是互逆的或对立的,称其中的一个事件是另一个事件的逆事件,记作 $\bar{A} = B$,或 $\bar{B} = A$.显然 $\bar{\bar{A}} = A$.

在例 1.7 中,事件 A 与事件 B 是互逆的.

在图 1.3 中,事件 A 与事件 B (阴影区域)是互逆的.作为样本空间 Ω 的子集, $\bar{A} = B$ 是 A 在全集 Ω 中的补集(或称余集).

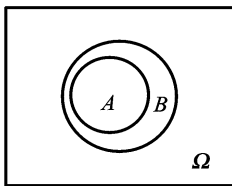


图 1.1

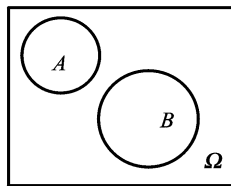


图 1.2

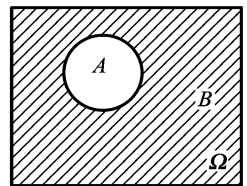


图 1.3

2. 随机事件的运算

(1) 事件的并 如果事件 A 和事件 B 至少有一个发生,则这样的—个事件称为事件 A 与事件 B 的并事件或和事件,记作 $A \cup B$,即并事件

$$A \cup B = \{\text{事件 } A \text{ 发生或事件 } B \text{ 发生}\} = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}.$$

在例 1.7 中,并事件 $B \cup C = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$.

在图 1.4 中,并事件 $A \cup B$ 表示随机点落在圆形区域 A 或 B 内,用阴影区域表示.事件 A 和事件 B 作为样本空间 Ω 的子集,并事件 $A \cup B$ 就是子集 A 与 B 的并集.

对于任何事件 A 与 B ,有

$$\begin{aligned} A \cup A &= A, A \cup \Omega = \Omega, A \cup \emptyset = A, \\ A \cup B &= B \cup A, \\ A \cup \bar{A} &= \Omega, A \cup A^c = \Omega, B \cup A^c = A^c \cup B. \end{aligned}$$

如果 $A \subset B$,则有 $A \cup B = B$.

事件的并可以推广到多个事件的情形:并事件

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{\text{事件 } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ 中至少有一个发生}\},$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{\text{事件 } A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \text{ 中至少有一个发生}\}.$$

例如,某人做—项试验,以 A 表示事件“该项试验成功”,以 A_i 表示事件“该项试验做到第 i 次才成功”($i = 1, 2, \dots$),则有

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

(2) 事件的交 如果事件 A 和事件 B 同时发生,则这样的—个事件称为事件 A 与事件 B 的交事件或积事件,记作 $A \cap B$ 或 AB ,即交事件

$$A \cap B = \{\text{事件 } A \text{ 发生且事件 } B \text{ 发生}\} = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}.$$

在例 1.7 中,交事件 $A \cap C = \{\omega_2\}$.

在图 1.5 中,交事件 $A \cap B$ 表示随机点落在圆形区域 A 和 B 的公共区域内,用阴影区域表示.事件 A 和事件 B 作为样本空间 Ω 的子集,交事件 $A \cap B$ 就是子集 A 与 B 的交集.

对于任何事件 A 与 B ,有

$$\begin{aligned} A \cap A &= A, A \cap \Omega = A, A \cap \emptyset = \emptyset, \\ A \cap B &= B \cap A, \\ A \cap \bar{A} &= \emptyset, A \cap A^c = \emptyset, A \cap B^c = A \cap \bar{B}. \end{aligned}$$

如果 $A \subset B$,则有 $A \cap B = A$.如果 A 与 B 互不相容,则有 $A \cap B = \emptyset$.

事件的交可以推广到多个事件的情形:交事件

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \{\text{事件 } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ 同时发生}\},$$

$$A_i = \{ \text{事件 } A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \text{ 同时发生} \}.$$

(3) 事件的差 如果事件 A 发生而事件 B 不发生,则这样的-一个事件称为事件 A 与事件 B 的差事件,记作 A - B,即差事件

$$A - B = \{ \text{事件 } A \text{ 发生但事件 } B \text{ 不发生} \} = \{ \bar{A} \cap B \}.$$

在例 1.7 中,差事件 A - C = { ω₁ }.

在图 1.6 中,差事件 A - B 表示随机点落在圆形区域 A 内且不落在 B 内,用阴影区域表示.

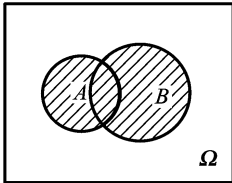


图 1.4

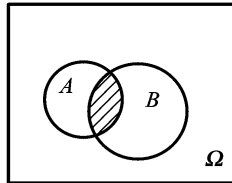


图 1.5

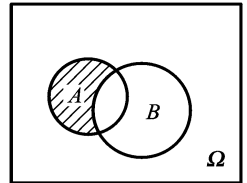


图 1.6

对于任何事件 A 与 B,有

$$A - A = \bar{A}, A - \bar{A} = A, A - B = A - AB = A\bar{B},$$

$$\bar{A} - A = \bar{A}A, \bar{A} - \bar{A} = A, (A - B) \cap B = A \cap \bar{B}.$$

类似于集合的运算,事件的运算有如下的运算规律:

1° 交换律 $A \cap B = B \cap A, AB = BA.$

2° 结合律 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), (AB)C = A(BC).$

3° 分配律 $A(B \cap C) = (AB) \cap (AC), A \cap (BC) = (A \cap B)(A \cap C).$

4° 对偶律 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}.$

对于多个随机事件,以上的运算规律也是成立的.

例 1.8 某工人加工了 3 个零件,以 A_i 表示事件“加工的第 i 个零件是合格品”(i = 1, 2, 3),试用 A₁, A₂ 和 A₃ 这 3 个事件表示下列事件:

- (1) 只有第 1 个零件是合格品;
- (2) 只有 1 个零件是合格品;
- (3) 至少有 1 个零件是合格品;
- (4) 最多有 1 个零件是合格品;
- (5) 3 个零件全是合格品;
- (6) 至少有 1 个零件是不合格品.

解 用 A, B, C, D, F 和 G 分别表示(1) ~ (6) 中的事件.

(1) 事件 A 发生,意味着第 1 个零件是合格品,并且第 2 个和第 3 个零件都是不合格品,即事件 A₁ 发生且事件 A₂, A₃ 都不发生,因此

$$A = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 .$$

(2) 事件 B 发生 就是在 3 个零件中有 1 个是合格品 , 并且另外 2 个是不合格品 , 因此

$$B = (A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) \quad (\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) \quad (\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) .$$

(3) 事件 C 发生 即在 3 个零件中至少有 1 个是合格品 , 也就是在 3 个零件中恰有 1 个是合格品 , 或者恰有 2 个是合格品 , 或者 3 个都是合格品 , 因此

$$C = (A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) \quad (\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) \quad (\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) \quad (A_1 A_2 \bar{A}_3) \quad (A_1 \bar{A}_2 A_3) \\ (\bar{A}_1 A_2 A_3) \quad (A_1 A_2 A_3) .$$

事件 C 也就是或者第 1 个零件是合格品 , 或者第 2 个零件是合格品 , 或者第 3 个零件是合格品 , 因此 C 也可以表示成

$$C = A_1 \cup A_2 \cup A_3 .$$

事件 C 发生 , 意味着 3 个零件不能都是不合格品 , 而 3 个零件都是不合格品可表示成 $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$, 因此

$$C = \overline{\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3} .$$

根据对偶律可得

$$\overline{\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 .$$

此题表明 , 同一个事件可以用不同的方式来表示 , 这些方式是彼此相同的 . 我们应该选用比较简单的表示形式 , 以使问题的解答得以简化 .

(4) 事件 D 发生 , 就是 3 个零件都不是合格品 , 或者其中有 2 个是不合格品而另外 1 个是合格品 , 因此

$$D = (\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) \quad (A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) \quad (\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) \quad (\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) .$$

事件 D 发生 , 也就是在 3 个零件中任意 2 个都不能同时为合格品 , 因此事件 D 也可以表示为

$$D = (\bar{A}_1 \bar{A}_2) \quad (\bar{A}_1 \bar{A}_3) \quad (\bar{A}_2 \bar{A}_3) .$$

(5) 事件 F 发生 , 就是在 3 个零件中每一个都是合格品 , 因此

$$F = A_1 A_2 A_3 .$$

(6) 事件 G 发生 , 就是在 3 个零件中有 1 个是不合格品而另外 2 个是合格品 , 或者有 2 个是不合格品而另外 1 个是合格品 , 或者 3 个零件都是不合格品 , 因此

$$G = (\bar{A}_1 A_2 A_3) \quad (A_1 \bar{A}_2 A_3) \quad (A_1 A_2 \bar{A}_3) \quad (\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) \quad (\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) \\ (A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) \quad (\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) .$$

事件 G 就是“3 个零件都是合格品”这一事件的逆事件 , 因此 G 也可以表示为

$$G = \overline{A_1 A_2 A_3} .$$

事件 G 也就是或者第 1 个零件是不合格品 , 或者第 2 个零件是不合格品 , 或者第

3 个零件是不合格品,因此 G 还可以表示为

$$G = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 .$$

根据对偶律可知

$$\overline{A_1 A_2 A_3} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 .$$

例 1.9 设 A, B, C 是同一试验 E 的三个事件,试化简下列各式:

(1) $(A \cup B)(B \cup C)$;

(2) $(A \cup B)(A \cap \bar{B})(\bar{A} \cap B)$.

解 根据事件的运算规律,可得

(1)

$$\begin{aligned} & (A \cup B)(B \cup C) \\ &= [(A \cup B)B] \cup [(A \cup B)C] \\ &= [(AB) \cup B] \cup [(AC) \cup (BC)] \\ &= B \cup (AC) \cup (BC) \\ &= B \cup (AC) . \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & (A \cup B)(A \cap \bar{B})(\bar{A} \cap B) \\ &= \{[A(A \cap \bar{B})] \cup [B(A \cap \bar{B})]\}(\bar{A} \cap B) \\ &= [A \cup (A \cap \bar{B}) \cup (AB) \cup (A \cap \bar{B})](\bar{A} \cap B) \\ &= (A \cup \bar{B})(\bar{A} \cap B) \\ &= (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) \cup (\bar{B} \cap \bar{A}) \cup (\bar{B} \cap B) \\ &= (A \cap B) \\ &= AB . \end{aligned}$$

§ 2 随机事件的概率

在一个随机试验的样本空间中,可能有许多随机事件.一个事件在一次试验中可能发生,也可能不发生,具有随机性.如果在大量重复试验中观测这些事件,则有的事件发生的可能性大些,有的事件发生的可能性小些,有些事件发生的可能性大小近似相等,这些事件发生的可能性大小呈现出一定的规律性.为了刻画随机事件发生的可能性大小,人们引进了随机事件的概率这一概念.

2.1 频率

例 2.1 在有 120 人参加的某次考试中,得 80 分的有 40 人,占总人数的 $\frac{40}{120}$;得 90 分的有 15 人,占总人数的 $\frac{15}{120}$.由此可知,得 80 分或 90 分的共有 55 人,

占总人数的 $\frac{55}{120}$.

定义 2.1 设在相同的条件下进行的 n 次试验中,事件 A 发生了 n_A 次,则称 n_A 为事件 A 发生的频数,称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的频率,记作 $f_n(A)$,即

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n} .$$

事件 A 的频率反映了事件 A 在 n 次试验中发生的频繁程度,频率越大,表明事件 A 的发生越频繁,从而可知事件 A 在一次试验中发生的可能性越大.在例 2.1 中,用 A 表示事件“考试成绩为 80 分”,用 B 表示事件“考试成绩为 90 分”,则 $A \cup B$ 表示事件“考试成绩为 80 分或 90 分”,事件 A 与事件 B 互不相容.易知 $n = 120, n_A = 40, n_B = 15, n_{A \cup B} = n_A + n_B = 55$,从而有

$$f_{120}(A) = \frac{40}{120}, \quad f_{120}(B) = \frac{15}{120},$$

$$f_{120}(A \cup B) = \frac{55}{120} = \frac{40}{120} + \frac{15}{120} = f_{120}(A) + f_{120}(B) .$$

由于 $f_{120}(A) > f_{120}(B)$,因此当从这 120 份试卷中任意取出 1 份时,其成绩是 80 分的可能性比是 90 分的可能性要大一些.

易知频率具有如下基本性质:

- (1) 对于任意事件 A ,有 $f_n(A) \geq 0$;
- (2) 对于必然事件 Ω ,有 $f_n(\Omega) = 1$;
- (3) 对于两两互不相容的事件 A_1, A_2, \dots, A_m (即当 $i \neq j$ 时,有 $A_i A_j = \emptyset, i, j = 1, 2, \dots, m$),有

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m f_n(A_i) .$$

以上三条性质依次称为频率的非负性、规范性和有限可加性.

由定义 2.1 可知,频率 $f_n(A)$ 依赖于试验次数 n 及每次试验的结果.由于试验结果具有随机性,因此频率也具有随机性.当 n 较小时,频率的波动性较大.当 n 增大时,频率将会怎样变动呢?请看下面的例子.

例 2.2 表 1.1 记录了几位科学家重复抛掷一枚硬币的结果:

表 1.1

| 试验者 | 抛掷次数 n | 正面朝上频数 n_A | 正面朝上频率 $f_n(A)$ |
|------------------|----------|--------------|-----------------|
| 德·摩根 (De Morgan) | 2048 | 1061 | 0.5181 |
| 蒲丰 (Buffon) | 4040 | 2048 | 0.5069 |
| 费歇尔 (Fisher) | 10000 | 4979 | 0.4979 |
| 皮尔逊 (Pearson) | 12000 | 6019 | 0.5016 |
| 皮尔逊 (Pearson) | 24000 | 12012 | 0.5005 |