

普通高等教育“十五”国家级规划教材
大数数学——

随 机 数 学

吉林大学数学学院

高文森 潘 伟 主编

高等教育出版社

《大学数学》系列教材编委会

主 任 李辉来

副主任 张魁元

编 委 (以姓氏笔画为序)

王国铭 王树岩 白 岩 刘停战

张魁元 李忠范 李辉来 陈殿友

赵建华 郭 华 高文森 潘 伟

戴天时

内 容 提 要

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材《大学数学》中的一册。系列教材《大学数学》吸收了国内外同类教材的精华,借鉴了近几年出版的一批“面向21世纪课程教材”的成功经验,体现了时代的特点,着重加强基础、强化应用、整体优化、注重后效,力争做到科学性、系统性和可行性的统一,传授数学知识和培养数学素养的统一。在体系与内容的编排上,本书认真考虑不同专业、不同学时的授课对象的需求,对有关内容和习题进行了较好处理。

本书介绍随机数学的基础知识,内容包括:随机事件及其概率,随机变量及其概率分布,多维随机变量及其概率分布,随机变量的数字特征,大数定律及中心极限定理,样本及样本函数的分布,参数估计,假设检验,回归分析,方差分析与正交试验设计,随机过程的基本知识,马尔可夫链,平稳过程等,书后附习题参考答案及常用分布表。

本书可供高等学校非数学类理工科各专业学生选用,也可供工程技术人员参考。

前 言

《大学数学》系列教材是普通高等教育“十五”国家级规划教材.本系列教材共四册:《微积分》(上、下)、《线性代数》和《随机数学》.

本系列教材的编写体现了时代的特点.本着加强基础、强化应用、整体优化、注重后效的原则,力争做到科学性、系统性和可行性的统一,使传授数学知识和培养数学素养得到了较好的结合.

本系列教材是在吸取国内外同类教材的精华,借鉴近几年我国出版的一批“面向 21 世纪课程教材”成功经验结合在吉林大学公共数学教学教研的具体实践,针对非数学类理工科大学生的特点编写的.

本系列教材内容充实,可作为高等学校非数学类理工科各专业的教材或教学参考书.在教材体系与内容的编排上,认真考虑了不同专业、不同学时的授课对象的需求.对数学要求较高的物理、计算机、电子等专业原则上可讲授本教材的全部内容,其他专业可以在不带“*”号的内容中,根据实际需要选择适当的章节讲授.每章后面所配备的习题分成两类,其中(A)是体现教学基本要求的习题;(B)是对基本内容提升、扩展以及综合运用有关知识的习题.较难的题在题号前用“ ”号做了标注.与教材中“*”号内容相应的习题用“*”号做了标注.本书的最后给出了习题参考答案或提示,供读者参考.

本册《随机数学》的一、六至十三章由高文森编写,二至五章由潘伟编写.

在《大学数学》系列教材的编写过程中,得到了吉林大学教务处的大力支持.数学学院尹景学教授为本套教材初稿的版面设计、软件培训提供了悉心的技术指导;公共数学教学与研究中心副主任吴晓俐女士承担了本系列教材初稿的编务工作,研究生王军林、孙鹏、任长宇、李明、柯长海、吴刚、姜政毅及湖北大学郑巧仙老师完成了本系列教材初稿的排版制图工作,在此一并致谢.作者要特别感谢高等教育出版社高等理工分社的领导和编辑们,他们对本系列教材的编辑出版工作给予了精心指导和大力支持.

由于我们水平所限,书中的错误和不妥之处,恳请广大读者批评指正,以期不断完善.

目 录

第一章 随机事件及其概率	(1)	§ 4 正态分布	(53)
§ 1 随机试验 随机事件	(1)	4.1 正态分布	(53)
1.1 必然现象和随机现象	(1)	4.2 标准正态分布	(54)
1.2 随机试验和随机事件	(2)	4.3 标准正态分布的上分	
1.3 随机事件的关系及运算 ...	(3)	位点	(57)
§ 2 随机事件的概率	(8)	§ 5 随机变量的函数的分布	(58)
2.1 频率	(8)	5.1 离散型随机变量的函数	
2.2 概率	(10)	的分布	(58)
2.3 古典概型	(13)	5.2 连续型随机变量的函数	
2.4 几何概型	(16)	的分布	(59)
§ 3 条件概率	(18)	习题二	(62)
3.1 条件概率与乘法公式	(18)	第三章 多维随机变量及其概率	
3.2 全概率公式	(23)	分布	(65)
3.3 贝叶斯(Bayes)公式	(26)	§ 1 二维随机变量	(65)
§ 4 事件的独立性	(28)	1.1 二维随机变量及其分布	
§ 5 伯努利(Bernoulli)概型	(32)	函数	(65)
习题一	(34)	1.2 二维离散型随机变量及其概	
第二章 随机变量及其概率分布	(38)	率分布	(66)
§ 1 随机变量及其分布函数	(38)	1.3 二维连续型随机变量及其概	
1.1 随机变量	(38)	率密度	(68)
1.2 随机变量的分布函数	(39)	1.4 均匀分布和正态分布	(70)
§ 2 离散型随机变量及其概		§ 2 边缘分布及随机变量的独	
率分布	(43)	立性	(72)
2.1 离散型随机变量及其概		2.1 边缘分布	(72)
率分布	(43)	2.2 随机变量的独立性	(75)
2.2 几种常用的离散型随机变量		§ 3 条件分布	(78)
及其概率分布	(45)	3.1 离散型随机变量的条件	
§ 3 连续型随机变量及其概率		分布	(78)
密度	(49)	3.2 连续型随机变量的条件	
3.1 连续型随机变量及其概率		分布	(79)
密度	(49)	§ 4 两个随机变量的函数	
3.2 均匀分布和指数		的概率分布	(81)
分布	(51)	4.1 二维离散型随机变量的函数	

的概率分布	(81)	1.2 简单随机样本	(133)
4.2 二维连续型随机变量的函数		§2 直方图与样本分布函数	
的概率分布	(83)	(135)
§5 n 维随机变量	(91)	2.1 直方图	(135)
习题三	(93)	2.2 样本分布函数	(138)
第四章 随机变量的数字特征	(97)	§3 样本函数及其概率分布	(140)
§1 数学期望	(97)	§4 χ^2 分布	(146)
1.1 数学期望的概念	(97)	§5 t 分布	(150)
1.2 随机变量函数的数学		§6 F 分布	(153)
期望	(100)	习题六	(157)
1.3 数学期望的性质	(102)	第七章 参数估计	(159)
§2 方差	(105)	§1 参数的点估计	(159)
2.1 方差及其计算公式	(105)	1.1 矩估计法	(159)
2.2 方差的性质	(108)	1.2 最大似然估计法	(162)
2.3 随机变量的标准化	(109)	§2 估计量的评选标准	(170)
§3 协方差与相关系数	(109)	2.1 无偏性	(170)
3.1 协方差	(109)	2.2 有效性	(172)
3.2 相关系数	(110)	2.3 一致性	(173)
§4 矩	(115)	§3 参数的区间估计	(174)
4.1 原点矩和中心矩	(115)	§4 单个正态总体均值与方	
4.2 协方差矩阵	(116)	差的区间估计	(175)
4.3 n 维正态分布	(117)	4.1 设 σ^2 已知,求 μ 的置信水平	
习题四	(118)	为 $1 - \alpha$ 的置信区间	(175)
第五章 大数定律及中心极限		4.2 设 σ^2 未知,求 μ 的置信水平	
定理	(122)	为 $1 - \alpha$ 的置信区间	(177)
§1 大数定律	(122)	4.3 设 μ 已知,求 σ^2 的置信水平	
1.1 切比雪夫(Chebyshev)		为 $1 - \alpha$ 的置信区间	(178)
不等式	(122)	4.4 设 μ 未知,求 σ^2 的置信水平	
1.2 依概率收敛	(124)	为 $1 - \alpha$ 的置信区间	(179)
1.3 大数定律	(124)	§5 两个正态总体均值差与方	
§2 中心极限定理	(127)	差比的区间估计	(180)
2.1 依分布收敛	(127)	5.1 设 σ_1^2 和 σ_2^2 都已知,求 $\mu_1 - \mu_2$	
2.2 中心极限定理	(127)	的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信	
习题五	(131)	区间	(180)
第六章 样本及样本函数的分布		5.2 设 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 为未知,求 $\mu_1 - \mu_2$	
.....	(132)	的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信	
§1 总体与样本	(132)	区间	(181)
1.1 总体	(132)	5.3 设 μ_1 和 μ_2 都已知,求 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的	

置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信 区间	(183)	3.1 多元线性回归模型与系数的 最小二乘估计	(232)
5.4 设 μ_1 和 μ_2 都未知 求 $\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma^2}$ 的 置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信 区间	(184)	3.2 线性假设的显著性检验	(233)
§ 6 单侧置信区间	(185)	习题九*	(237)
习题七	(187)	第十章 方差分析与正交试验 设计*	(239)
第八章 假设检验	(190)	§ 1 单因素试验的方差分析	(239)
§ 1 假设检验的基本概念	(190)	§ 2 双因素试验的方差分析	(245)
§ 2 单个正态总体均值与方差 的假设检验	(193)	§ 3 有交互作用的双因素试验 的方差分析	(251)
2.1 单个正态总体均值的 假设检验	(193)	§ 4 正交试验设计及其结果 分析	(257)
2.2 单个正态总体方差的 假设检验	(195)	4.1 正交试验设计的设计与 试验阶段	(258)
§ 3 两个正态总体均值差与方差 比的假设检验	(197)	4.2 正交试验设计的结果 分析	(261)
3.1 两个正态总体均值差 的假设检验	(197)	习题十*	(269)
3.2 两个正态总体方差比的 假设检验	(199)	第十一章 随机过程的基本 知识*	(271)
§ 4 总体分布的假设检验—分 布拟合检验*	(203)	§ 1 随机过程的概念	(271)
习题八	(208)	§ 2 随机过程的有限维分布 函数族	(276)
第九章 回归分析*	(211)	§ 3 随机过程的数字特征	(279)
§ 1 一元线性回归分析	(211)	§ 4 几种常用的随机过程	(284)
1.1 回归分析的基本概念	(211)	5.1 二阶矩过程	(284)
1.2 常数 a, b 的最小二乘 估计	(212)	4.2 正态过程	(284)
1.3 估计量 a, b 的分布	(216)	4.3 独立增量过程	(285)
1.4 回归效果的显著性 检验	(218)	4.4 泊松(Poisson)过程	(286)
1.5 回归系数的区间估计	(222)	4.5 维纳(Wiener)过程	(288)
1.6 利用回归直线方程进行预测 与控制	(222)	习题十一*	(288)
§ 2 可线性化的回归方程	(226)	第十二章 马尔可夫(Markov)链* ...	(291)
§ 3 多元线性回归分析	(232)	§ 1 马尔可夫链及转移概率	(291)
		§ 2 切普曼 - 柯尔莫哥洛夫(Chapman - Kolmogorov)方程	(296)
		2.1 切普曼 - 柯尔莫哥洛夫 方程	(296)
		2.2 初始概率分布及时刻 m 的 概率分布	(298)

2.3 有限维概率分布	(300)	附表 1 标准正态分布表.....	(337)
§ 3 马尔可夫链的遍历性	(302)	附表 2 泊松分布表.....	(339)
习题十二*	(308)	附表 3 t 分布表	(342)
第十三章 平稳过程*	(311)	附表 4 χ^2 分布表	(344)
§ 1 严平稳过程及其数字 特征	(311)	附表 5 F 分布表.....	(347)
§ 2 宽平稳过程	(312)	附表 6 正交表.....	(357)
§ 3 相关函数的性质	(315)	附表 7 相关系数检验 表 $r(n-2)$	(359)
习题十三*	(319)	附表 8 几种常用的概率分布	(360)
习题参考答案	(320)	参考文献	(362)
附表	(337)		

第八章 假设检验

在总体的分布未知,或只知总体的分布但不知其中的参数的情况下,为了推断总体的某些性质,提出关于总体的分布或总体分布中的参数的某种假设,然后根据抽样得到的样本观测值,运用统计分析的方法,检验这种假设是否正确,从而决定接受或拒绝所提出的假设,这就是本章要讨论的假设检验问题.

本章介绍假设检验的基本概念、基本原理和两类错误,介绍正态总体参数的显著性检验以及关于总体的分布的假设检验.

§ 1 假设检验的基本概念

假设检验的问题分为两种类型,一种是关于总体的分布的假设检验,另一种是对总体的分布中的参数进行检验.我们通过下面的例子来介绍假设检验的基本原理和一些基本概念.

例 1.1 某厂生产一种产品,共计 1000 件,按规定次品率不超过 2% 才能出厂.现从中抽取 10 件产品进行检验,发现其中有 3 件次品,问这批产品能否出厂?

解 设这批产品的次品率为 p (未知).我们的问题是依据样本的次品率为 0.3 这一信息来推断这批产品的次品率 p 是否超过了 0.02.

我们先假设 $p = 0.02$ (记作 H_0),然后根据样本信息,按照某种原则决定接受 H_0 或者拒绝 H_0 .

先考虑 $p = 0.02$ 的情况.用 A 表示事件“在抽出的 10 件产品中有 3 件次品”,则当 $p = 0.02$ 时,有

$$P(A) = \binom{10}{3} p^3 (1-p)^7 = 0.0008.$$

上述结果说明,在假设 $p = 0.02$ 成立的条件下,事件 A 的概率是很小的.从平均意义上讲,在 10000 次抽取的样本中仅有 8 次会发生这种情形.如果 $p < 0.02$,那么事件 A 发生的概率就更小.根据实际推断原理可知,小概率事件在一次试验中实际上是几乎不发生的.现在,在一次试验中小概率事件 A 竟然发生了,因此我们有理由认为原先提出的假设 $p = 0.02$ 是不合理的,即应该拒绝这个假设,认为 p 是大于 0.02 的.所以按规定,这批产品不能出厂.

在例 1.1 中,我们根据实际问题的需要,提出一个明确的假设,称之为原假

设或零假设,记为 H_0 , 即 $H_0: p = 0.02$. 与原假设对立的假设称为备择假设或对立假设,记为 H_1 , 即 $H_1: p > 0.02$. 为了推断原假设 H_0 是否正确,我们先假定 H_0 成立,在此条件下,利用样本观测值对实际问题进行分析.如果发生了小概率事件,我们就有理由怀疑作为小概率事件发生前提的原假设 H_0 的正确性,这时我们就拒绝原假设 H_0 (相当于接受备择假设 H_1).如果在一次试验中发生了大概率事件,我们没有理由拒绝 H_0 ,这时就接受 H_0 (相当于拒绝备择假设 H_1).我们将上述统计推断的问题称为假设检验问题.一般地,在假设检验中将小概率值记为 α ($0 < \alpha < 1$) 称为显著性水平.通常取为 0.01, 0.05 或 0.1.

例 1.2 某车间生产一种零件,其长度 X 服从正态分布 $N(\mu, 0.5^2)$,要求标准长度为 100(cm).现在从一批数量很大的零件中随机抽查了 9 件,测得它们的长度(单位:cm)如下:

99.3, 100.1, 99.9, 99.2, 99.6,
99.1, 99.3, 100.2, 99.0,

问能否认为这批零件是合格的(取显著性水平 $\alpha = 0.05$)?

解 本例就是要在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验假设

$$H_0: \mu = \mu_0 = 100, \quad H_1: \mu \neq 100.$$

由第七章 §2 可知,样本均值 \bar{x} 是总体均值 μ 的无偏估计.因此 $|\bar{x} - \mu|$ 应该比较小,于是 $\frac{|\bar{x} - \mu|}{\sqrt{n}}$ 也应该较小.如果 $\frac{|\bar{x} - \mu|}{\sqrt{n}}$ 大于或等于某个常数时,我们就有理由怀疑原假设 H_0 的正确性,应该拒绝 H_0 .

在 H_0 成立的前提下,由第六章定理 3.1 可知

$$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

按以上分析,我们可以适当选取常数 k , 当 $\frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sqrt{n}} \geq k$ 时就拒绝 H_0 . 为了确定 k 的值,对于给定的显著性水平 α , 我们令

$$P \left\{ \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sqrt{n}} \geq k \right\} = \alpha,$$

根据标准正态分布 $N(0, 1)$ 上 $\alpha/2$ 分位点的定义,可得

$$k = u_{\alpha/2}.$$

如果统计量 u 的观测值满足 $|u| = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sqrt{n}} \geq u_{\alpha/2}$, 则意味着概率为 $\alpha = 0.05$ 的小概率事件发生了,根据实际推断原理,我们拒绝假设 H_0 , 接受假设 H_1 ;

如果 $|u| = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sqrt{n}} < u_{\alpha/2}$, 则接受假设 H_0 .

在本例中 , $n = 9$, $\alpha = 0.5$, $\bar{x} = 99.52$, $\mu_0 = 100$, $\alpha = 0.05$, $u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96$, 从而有

$$|u| = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{s/\sqrt{n}} = \frac{|99.52 - 100|}{0.5/\sqrt{9}} = 2.88.$$

由于 $|u| = 2.88 > 1.96$, 因此 , 我们拒绝原假设 $H_0 : \mu = 100$, 即认为这批零件不合格 .

为了检验假设 H_0 , 需要根据样本 X_1, X_2, \dots, X_n 适当地构造一个统计量 (如例 1.2 中 $u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$) 称这个统计量为检验统计量 .

如果当检验统计量取某个区域 W 中的值时 , 我们就拒绝原假设 H_0 , 则称这个区域 W 为原假设 H_0 的拒绝域 . 在例 1.2 中 , 检验假设 H_0 的拒绝域 $W = \{|u| \geq u_{\alpha/2}\}$. 当检验统计量的值不属于拒绝域 W 时 , 则接受假设 H_0 .

由于检验法则是根据样本作出的 , 而抽取样本具有随机性 , 因此假设检验的结果可能出现以下两种错误 :

(1) 原假设 H_0 实际上是正确的 , 但是我们作出的决定却是拒绝 H_0 , 此类错误称为第一类错误 . 由于仅当小概率事件发生时才拒绝 H_0 , 因此犯第一类错误的概率不超过显著性水平 .

(2) 原假设 H_0 实际上是不正确的 , 但是我们却作出了接受 H_0 的决定 , 此类错误称为第二类错误 . 我们把犯第二类错误的概率记为 β .

在实际应用中 , 上述两类错误都会带来损失 . 为了减少损失 , 我们当然希望和 β 都很小 . 但是在样本容量确定后 , 如果减少犯某一类错误的概率 , 则犯另一类错误的概率往往会增大 . 只有增加样本容量 , 才能够使犯两类错误的概率都减小 . 在给定样本容量的情况下 , 我们在做假设检验时总是控制犯第一类错误的概率不超过给定的显著性水平 , 而不考虑犯第二类错误的概率 . 这类假设检验的问题 , 称为显著性检验 .

只对总体的分布中的未知参数提出假设 , 然后进行检验的问题 , 称为参数检验 . 如例 1.2 就是一个参数检验的问题 , 是显著性检验 .

在对总体的分布中的参数 μ 进行检验时 , 如果原假设为 $H_0 : \mu = \mu_0$, 备择假设为 $H_1 : \mu < \mu_0$, 我们称这类检验问题为双边检验 . 对假设

$$H_0 : \mu = \mu_0 , H_1 : \mu < \mu_0$$

进行检验 , 称为左边检验 . 对假设

$$H_0 : \mu = \mu_0 , H_1 : \mu > \mu_0$$

进行检验 , 称为右边检验 . 左边检验与右边检验统称为单边检验 .

一般地 , 假设检验可以按下述步骤进行 :

(1) 根据实际问题的要求 , 提出原假设 H_0 和备择假设 H_1 ;

- (2) 给出显著性水平 α 和样本容量 n ;
- (3) 确定检验统计量 Z 及拒绝域的形式 ;
- (4) 按犯第一类错误的概率等于 α 求出拒绝域 W ;
- (5) 根据样本值计算检验统计量 Z 的观察值 z ,当 $z \in W$ 时 ,拒绝原假设 H_0 ;否则接受原假设 H_0 .

§ 2 单个正态总体均值与方差的假设检验

在本节的讨论中 ,假设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的样本 ,样本均值为 \bar{x} ,样本方差为 S^2 .

2.1 单个正态总体均值的假设检验

1. σ^2 已知 ,关于 μ 的假设检验 — u 检验

这里要在 σ^2 已知的条件下检验假设

$$H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu \neq \mu_0.$$

取检验统计量为

$$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

对于给定的显著性水平 α ,查附表 1 可得 $u_{\alpha/2}$,使得 $P\left\{ \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| > u_{\alpha/2} \right\} = \alpha$,因此这一假设检验问题的拒绝域为

$$W = \{ |u| > u_{\alpha/2} \}.$$

由样本观测值 x_1, x_2, \dots, x_n 算得 $u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$,如果有 $|u| > u_{\alpha/2}$,则拒绝 $H_0: \mu = \mu_0$,此时认为均值 μ 与 μ_0 之间有显著差异 ;如果有 $|u| < u_{\alpha/2}$,则接受 H_0 ,认为 μ 与 μ_0 无显著差异 .

进行左边检验 ,即对假设

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad (\mu \geq \mu_0), \quad H_1: \mu < \mu_0$$

进行检验时 ,所使用的检验统计量是

$$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

对于给定的显著性水平 α ,查附表 1 可得 u_{α} ,使得

$$P\left\{ \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < -u_{\alpha} \right\} = \alpha,$$

因此原假设 H_0 的拒绝域为

$$W = \{u > u\}.$$

同样,进行右边检验即对假设

$$H_0: \mu = \mu_0 (\mu < \mu_0), \quad H_1: \mu > \mu_0$$

进行检验时,检验统计量是

$$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

对于给定的显著性水平 α ,查附表 1 可得 u_{α} ,使得

$$P\left\{\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > u_{\alpha}\right\} = \alpha.$$

因此原假设 H_0 的拒绝域为

$$W = \{u > u_{\alpha}\}.$$

上述检验所用的统计量 $u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ 服从标准正态分布,我们称这类检验

为 u 检验.

2. σ^2 未知,关于 μ 的假设检验 — t 检验

这里要在 σ^2 未知的条件下检验假设

$$H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu \neq \mu_0.$$

由于 σ^2 未知,取检验统计量为

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

对于给定的显著性水平 α ,查附表 3 可得 $t_{\alpha/2}(n-1)$,使得

$$P\left\{\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| > t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = \alpha.$$

因此原假设 H_0 的拒绝域为

$$W = \{|t| > t_{\alpha/2}(n-1)\}.$$

类似于 1 中的讨论,可得左边检验

$$H_0: \mu = \mu_0 (\mu > \mu_0), \quad H_1: \mu < \mu_0$$

的拒绝域为

$$W = \{t < -t_{\alpha}(n-1)\}.$$

右边检验

$$H_0: \mu = \mu_0 (\mu < \mu_0), \quad H_1: \mu > \mu_0$$

的拒绝域为

$$W = \{t > t_{\alpha}(n-1)\}.$$

上述检验所使用的统计量服从 t 分布,我们称这类检验为 t 检验.

例 2.1 某车床加工一种零件,要求长度为 150 mm.今从一大批加工后的这种零件中抽取 9 个,测得长度(单位 mm)如下:

147, 150, 149, 154, 152, 153, 148, 151, 155,

如果零件长度服从正态分布,问这批零件是否合格(取 $\alpha = 0.05$)?

解 这里是在总体方差 σ^2 未知的情况下,检验假设

$$H_0: \mu = 150, \quad H_1: \mu \neq 150.$$

已知 $n = 9$. 在 H_0 成立时,统计量

$$t = \frac{\bar{X} - 150}{S/\sqrt{9}} \sim t(8).$$

对于 $\alpha = 0.05$,查附表 3,得

$$t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(8) = 2.3060.$$

原假设 H_0 的拒绝域为

$$W = \{ |t| > 2.3060 \}.$$

由给定的样本值,求得

$$\bar{X} = 151, \quad S^2 = 7.5, \quad S = 2.739,$$

$$t = \frac{\bar{X} - 150}{S/\sqrt{9}} = \frac{151 - 150}{2.739/\sqrt{9}} \times 3 = 1.095.$$

因为

$$|t| = 1.095 < 2.3060 = t_{0.025}(8),$$

所以接受 H_0 ,即在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下认为这批零件合格.

2.2 单个正态总体方差的假设检验

1. μ 已知,关于 σ^2 的假设检验 — χ^2 检验

这里要在 μ 已知的条件下检验假设

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2, \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2.$$

由于

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n),$$

对于给定的显著性水平 α ,查附表 4 可得 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n)$ 与 $\chi^2_{\alpha/2}(n)$,使得

$$P \left(\chi^2_{1-\alpha/2}(n) < \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 < \chi^2_{\alpha/2}(n) \right) = 1 - \alpha,$$

即

$$P \left(\frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}(n) \text{ 或 } \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 > \chi^2_{\alpha/2}(n) \right) = \alpha.$$

从而得到 H_0 的拒绝域为

$$W = \{ \chi^2_{1-\alpha/2}(n) \text{ 或 } \chi^2_{\alpha/2}(n) \}.$$

2. μ 未知,关于 σ^2 的假设检验

我们要在 μ 未知的条件下检验假设

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, \quad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2.$$

由于

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1),$$

对于给定的显著性水平 α ,查附表 4 可得 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ 与 $\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 使得

$$P\{ \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \text{ 或 } \chi^2_{\alpha/2}(n-1) \} = \alpha.$$

从而得到 H_0 的拒绝域为

$$W = \{ \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \text{ 或 } \chi^2_{\alpha/2}(n-1) \}.$$

上述检验所使用的统计量服从 χ^2 分布,这种检验法称为 χ^2 检验.

关于方差 σ^2 的单边检验见表 8.1.

例 2.2 某无线电厂生产的一种高频管,其中一项指标服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 从一大批这种产品中随机地抽取 8 只管子,测得该指标数据如下:

68, 43, 70, 65, 55, 56, 60, 72,

(1) 当总体均值 $\mu = 60$ 时,检验 $\sigma^2 = 8^2$ (取 $\alpha = 0.05$);

(2) 当总体均值 μ 未知时,检验 $\sigma^2 = 8^2$ (取 $\alpha = 0.05$).

解 本题是在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验假设

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 8^2, \quad H_1 : \sigma^2 \neq 8^2,$$

这里 $n = 8$.

(1) 当总体均值 $\mu = 60$ 时,检验统计量为

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^8 (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(8),$$

原假设 H_0 的拒绝域为

$$W = \{ \chi^2_{1-\alpha/2}(8) \text{ 或 } \chi^2_{\alpha/2}(8) \}.$$

现在 $\alpha = 0.05$,查附表 4 得

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(8) = \chi^2_{0.975}(8) = 2.180,$$

$$\chi^2_{\alpha/2}(8) = \chi^2_{0.025}(8) = 17.535.$$

由样本值算得

$$\chi^2 = \frac{1}{8^2} \sum_{i=1}^8 (x_i - 60)^2 = 10.3281.$$

由于 $2.180 < F^2 = 10.3281 < 17.535$ 即 F^2 不在拒绝域内, 因此接受 $H_0: \sigma^2 = 8^2$.

(2) 当总体均值 μ 未知时, 检验统计量为

$$F^2 = \frac{(8-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim F^2(7),$$

原假设 H_0 的拒绝域为

$$W = \{ F^2 > F_{1-\alpha/2}^2(7) \text{ 或 } F^2 < F_{\alpha/2}^2(7) \}.$$

现在 $\alpha = 0.05$, 查附表 4 得

$$F_{1-\alpha/2}^2(7) = F_{0.975}^2(7) = 1.690,$$

$$F_{\alpha/2}^2(7) = F_{0.025}^2(7) = 16.013.$$

由样本值算得

$$\bar{X} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 X_i = 61.125,$$

$$S^2 = \frac{1}{8-1} \sum_{i=1}^8 (X_i - \bar{X})^2 = 93.268,$$

从而有

$$F^2 = \frac{(8-1)S^2}{8^2} = 10.2012.$$

由于检验统计量的观测值不在拒绝域内, 因此接受 $H_0: \sigma^2 = 8^2$.

§ 3 两个正态总体均值差与方差比的假设检验

在本节的讨论中, 假设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 样本 X_1, X_2, \dots, X_{n_1} 与样本 Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} 分别来自总体 X 与总体 Y , 这两个样本相互独立, 它们的样本均值与样本方差依次为

$$\bar{X} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} Y_j,$$

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2,$$

$$S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \bar{Y})^2.$$

3.1 两个正态总体均值差的假设检验

1. 方差 σ_1^2 与 σ_2^2 已知时, 均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的假设检验

给定显著性水平 α , 我们来检验假设

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \mu_0, \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0.$$

如果 $\mu_0 = 0$, 则原假设为 $H_0: \mu_1 = \mu_2$, 备择假设为 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$. 在 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ 成立的条件下, 统计量

$$U = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1).$$

查附表 1 可得 $u_{\alpha/2}$, 使得

$$P\left\{ \frac{|\bar{X} - \bar{Y} - \mu_0|}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} > u_{\alpha/2} \right\} = \alpha.$$

从而得到 H_0 的拒绝域为

$$W = \{ |U| > u_{\alpha/2} \}.$$

2. 方差 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知时, 均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的假设检验
我们要检验假设

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \mu_0, \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0.$$

当 H_0 成立时, 统计量

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_0}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2),$$

其中 $S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$, $S_w = \sqrt{S_w^2}$.

对于给定的显著性水平 α , 查附表 3 可得 $t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$, 使得

$$P\{ |t| > t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) \} = \alpha.$$

从而得到 H_0 的拒绝域为

$$W = \{ |t| > t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) \}.$$

例 3.1 在同一只平炉上进行一项试验以确定改变操作方法的建议是否会增加钢的得率. 每炼一炉钢时除操作方法外, 其他条件都尽可能做到相同. 交替地用标准方法和建议的新操作方法各炼一炉, 记录到各炉钢的得率分别为:

标准方法: 78.1, 72.4, 76.2, 74.3, 77.4,
78.4, 76.0, 75.5, 76.7, 77.3;

新方法: 79.1, 81.0, 77.3, 79.1, 80.0,
79.1, 79.1, 77.3, 80.2, 82.1.

设这两个样本相互独立, 且分别来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma^2)$, 其中 μ_1, μ_2, σ^2 均未知. 问建议的新操作方法能否提高钢的得率 (取 $\alpha = 0.05$)?