黄冈兵法·同步学案

高一数学（上）

摇摇摇主摇编摇王宪生
编摇者摇王宪生摇吴莫林摇霍祝华
摇摇摇摇潘际栋摇陈文科摇申摇诚

陕西师范大学出版社

酝哉 蕴哉摇 目摇 录

高摇一摇数摇学

第一章　集合与简易逻辑

§1.1　集合

知能转化导引　通过本节的学习,要求能准确地理解和认识集合与元素的概念,了解有限集、无限集和空集的概念,熟记并正确使用所学到的各种新的符号,能较准确地在给出集合的条件下判断出元素与集合的关系,认识和掌握集合的多种表示方法,会进行集合的不同表示方法之间的相互转化,并善于运用列举法、图示法和描述法来表示一些较简单的集合,同时要注意探究"如何在正确地理解集合的四种属性的基础上,学会运用其中元素的无序性、互异性来进行解题"的方法与技巧.

本节的主要学习内容有:

1. 集合与元素的概念

某些指定的对象集在一起就成为一个集合,其中的每一个对象就叫做这个集合中的一个元素.一般地,集合用大写的拉丁字母 A、B、C、D…等来表示,元素则用小写的拉丁字母 a、b、c、d…等来表示,元素与集合间的关系用"$\in$"和"$\notin$"符号来反映.

2. 集合的一种分类

由集合中元素的个数情况分集合为有限集(集合中含有有限个元素时)、无限集(集合中含有无限个元素时)和空集(集合中不含任何元素时).特别地,空集记作 $\varnothing$.

3. 集合的表示方法

把集合中的元素一一列举出来的方法叫做列举法;用确定的条件表示某些对象是否属于一个集合的方法叫做描述法;用一条封闭曲线的内部表示一个集合的方法叫做图示法.通常会根据不同的需要来选用合适的方法来表示集合.

4. 常用的数集的表示符号

自然数集记为N,正整数集记为N^*或N_+,整数集记为Z,有理数集记为Q,实数集记为R.

方法技巧规律

1. 加强对集合与元素这两个最基本概念的认识和理解

由于数学中的集合概念是一个原始概念,没有用定义给出,课本上对这一概念采用了描述性的说明,因此这也增加了我们学习中的难度.在学习过程中,可以在老师的指导下多结合一些实例去分析,以体会和认识集合以及集合中的元素所具有的四个特性,并学会自己举例来说明问题,帮助自己准确地把握集合的概念.对于元素的概念,主要要掌握好它与集合的关系如何反映,学会正确地使用"属于"符号"$\in$"和"不属于"符号"$\notin$".

2. 学会正确地使用表示集合的列举法和描述法

表示集合的方法中最常用就是列举法和描述法,其中的列举法容易掌握,而要准确地掌握描述法则不那么容易了.首先要明确,描述法有文字描述、符号描述和综合描述之分.例如:由偶数组成的集合M,既可以表示为$M=\{偶数\}$,又能表示为$M=\{x|x=2n,n\in Z\}$,还能表示为$M=\{x|x是偶数\}$,它们分别是由文字描述法、符号描述法和综合描述法给出的集合M的形式.欲熟练掌握这一方法的一个技巧是,认识它的一般形式$\{x|x\in P\}$中,"|"前表示的是集合中元素的基本形式,而"|"后指明的则是这种形式的元素应具有的本质特征.如:集合$\{y|y=x^2,x\in R\}$,"|"前的y表示这一集合是以数y为元素的集合,而"|"后则表示数y是一个实数x的平方,注意$x\in R$表示的是实数x的任意性,可以知道这一个集合实际即是$\{x|x\geqslant 0\}$,也即是由所有的非负实数组成的一个集合.再如:集合$\{x\in Z|-3\leqslant x\leqslant 8\}$,"|"前的$x\in Z$,表示这个集合中的元素是整数集Z中的数,"|"后则表示整数x必须服从的取值范围,从而可得这一集合是$\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

3. 深刻认识集合中元素的四种属性

(1) 集合中的元素可以是任意的对象,无论是数、式、点、线、人,还是其他的某种事或物,只要它们具有某种共同属性,集中在一起就能组成一个集合,我们把集合的这一性质称为元素的任意性;但由于数学是对一些具体问题的抽象,所以中学学习中,我们主要研究对象还是一系列的数的集合或点的集合.

(2) 判断一些对象是否可以组成一个集合,主要方法是,在观察任意一

个对象时,应该可以确定这一对象要么属于这一集合,要么它不属于这一集合,绝无模棱两可的情况;否则这些对象将无法组成一个集合,因此我们说集合中的元素具有确定性.

(3) 集合中的元素的无序性,是指在表示一个集合时,我们只需将某些指定的对象集合在一起,虽然习惯上会将其元素按一定顺序来写出,但却不强调它们的顺序,当两个集合中的元素相同,即便放置顺序完全不同时,它们也表示同一集合.

(4) 集合中元素的互异性,则是说对于任意一个集合而言,在这一集合中的表示出来的元素都是互不相同的个体,无论是从其表现形式来看,还是从其本质特征来看,都应强调不同的元素只能出现一次.如:给出集合$\{1,a^2\}$,我们根据集合中元素的互异性,就已经得到了关于这个集合的几点信息,即这一集合中有两个不同的元素,其中的一个是实数1,而另一个一定不是1,所以$a\neq1$,且$a\neq-1$.

能力升级捷径

【例1】 给出下列5种说法:

① 任意一个集合的正确表示方法都是惟一的;

② 集合$\{0,-1,2,-2\}$与集合$\{-2,-1,0,2\}$是同一个集合;

③ 若集合P是满足不等式$0\leqslant2x\leqslant1$的x的集合,则这个集合是一个无限集;

④ 已知$a\in\mathbf{R}$,则$a\notin\mathbf{Q}$;

⑤ 集合$\{x\mid x=2k-1,k\in\mathbf{Z}\}$与集合$\{y\mid y=2s+1,s\in\mathbf{Z}\}$表示的是同一个集合;

则其中正确说法的个数是( )

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

分析　判断依据是集合的概念、集合的分类、元素与集合的关系.

解答　由于集合$\{1\}$可以表示为$\{x\mid x-1=0\}$,立刻可知①是错误的;

由a为实数,依然有可能是有理数,可以断定④是错误的;

再从无限集的概念、集合的无序性来分析,可知②、③是正确的;

而⑤中的两个集合,都表示由全体奇数组成的集合,所以正确的说法是②、③、⑤;

故正确答案为B.

易错点

不注意深入观察集合中的元素特征,仅从表面形式对集合进行粗略分析,以致产生错误;对元素与集合的关系理解不够准确.

延伸点

1. 判断下列说法是否正确，并说明理由：

① 全国的主要河流组成一个集合；

② $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},2.5,|-0.25|\right\}$是一个有5个元素的集合；

③ 集合$\{\varnothing\}$表示的是空集；

④ 集合$\{(1,-3)\}$与集合$\{1,-3\}$是同一集合；

⑤ 某班教室里的书籍组成一个有限集合.

分析　考查知识与例1类同，可以仿照例1去思考，一看元素是否能确定，二看表示方法是否正确.

解答　只有⑤是正确的，其余都是错误说法. 理由是：①中的“主要”标准无法确定；②中的表示与集合中元素互异相违背，因为其中的$\frac{1}{4}=|0.25|$；③中集合是以空集为元素的集合，而不是空集；④中的前面一个集合是二元点集，后面一个集合是一元数集.

2. 设$x\in\mathbf{R}$，将对象$x,-x,|x|,\sqrt{x^2},-\sqrt[3]{x^3},-\sqrt[4]{x^4},\sqrt[2]{x^4}$集在一起，得到集合$M$，则这一集合中的元素最多时有（　　）

A. 3个　　B. 4个　　C. 6个　　D. 7个

分析　与例1相比，本题重在考查元素的互异性，需要结合实数的性质去思考，尤其是要准确认识根式的意义.

解答　由算术根的概念，$|x|=\sqrt{x^2}$对任意的实数x都成立，所以在集合M中$|x|$与$\sqrt{x^2}$只能出现一个，又$-\sqrt[3]{x^3}=-x$也是恒成立的，同样集合M中$-x$与$-\sqrt[3]{x^3}$也只能出现一个，而$-\sqrt[4]{x^4}=-|x|$，且当$x\neq0$时，$x\neq-x$，一般地$\sqrt[2]{x^4}=x^2\neq x$，$x^2\neq-x$，所以集合M中的元素最多时有3个，故选A.

【例2】　对下列给出的各组对象进行判断，当它们能组成一个有限集时，用列举法写出这一集合；当它们能组成一个无限集时，则用描述法给出这一集合：

(1) 平方后等于4的数；

(2) 被3除余数是2的正整数；

(3) 所有的不大于20的质数；

(4) 绝对值不小于4的整数；

(5) 平面内到一个定点O的距离大于定长r($r>0$)的点；

(6) $\left\{x \middle| \frac{6}{2-x} \in \mathbf{Z}, x \in \mathbf{Z}\right\}$.

分析 掌握集合的不同表示方法,能灵活地运用不同的表示方法来表示集合,能将文字语言转化为适当的数学符号.

解答 (1) 所给对象为有限个,且因为平方等于 4 的数为 -2 和 2,所以这一集合的表示是 $\{-2,2\}$;

(2) 被 3 除余数为 2 的正整数有无穷多个,这一集合可以表示为 $\{x \mid x=3n+2, n \in \mathbf{N}\}$;

(3) 由质数的概念,所写集合应是 $\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$;

(4) 绝对值不小于 4 的整数有无穷多个,其集合可以表示为 $\{x \mid |x| \geqslant 4$ 且 $x \in \mathbf{Z}\}$;

(5) 这一集合中的元素应是平面中的点 P,且点 P 满足给定的条件,

$\therefore$ 这一集合可以表示为 $\{P \mid |PO|>r, P$、O 为同一平面中的点,且 O 为一定点$\}$;

(6) 集合中的元素是 x,其中的 x 应该使得 $\frac{6}{2-x}$ 是一个整数,

$\therefore |2-x|$ 是 6 的因数,故 $|2-x|=1$,或 $|2-x|=2$,或 $|2-x|=3$,或 $|2-x|=6$,解这些绝对值方程即得所求集合为 $\{-4,-1,0,1,3,4,5,8\}$.

技巧点 表示集合的列举法和描述法,在使用中各有利弊.一般地,列举法使人对集合中的元素及其属性一目了然,但对无限集却不便使用.描述法,虽然对有限集和无限集都适用,但对其中元素属性的描述有时不够明朗,不仅使人不易理解,有时还容易使人在理解上出现差错.一方面,我们应使自己所了解和掌握的知识尽可能地完善起来,另一方面也要学会扬长避短地使用所学的知识.

延伸点

1. 将集合 $\{x \mid -3 \leqslant x \leqslant 3, x \in \mathbf{N}\}$ 用列举法表示出来是(　　).

A. $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$　　B. $\{-2,-1,0,1,2\}$

C. $\{0,1,2,3\}$　　D. $\{1,2,3\}$

分析 具体考查集合的不同表示方法,要求正确认识自然数集合中包含有元素 0.

解答 给定集合中的元素是自然数,且在指定的范围内,所以正确选项为 C.

2. 已知集合 $P=\{x \mid ax+b-x+2=0\}$ 是一个无限集,则实数 a、b 的取值是(　　)

A. $a=1,b=-2$　　B. $a=-1,b=2$

C. $a=1,b=2$　　D. $a=-1,b=-2$

分析　在集合的背景之下考查同解方程的知识,要求理解“无限集合”的概念.

解答　将集合中的元素应满足的关系整理成一元方程形式,则当且仅当 $a-1=0,b+2=0$ 时,集合为一个无限集合,所以正确选项为 A.

【例 3】　已知集合 $A=\{-1,2,3,a^2+2a-3,|a+1|\}$,其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1) 若 5 是 A 中的一个元素,求 a 的值;

(2) 是否存在实数 a,使得 A 中的最大元素是 12?若存在,求出对应的 a 值;若不存在,试说明理由.

分析　考查集合的列举法、元素与集合的关系以及由此产生的方程和不等式问题.

解答　(1) 若 $a^2+2a-3=5$,则 $a^2+2a-8=0$,$\therefore\ a=2$,或 $a=-4$;

但此时都有 $|a+1|=3$,与集合中元素的互异性相矛盾,$\therefore\ a\neq2$,且 $a\neq-4$;

若 $|a+1|=5$,则 $a=-6$,或 $a=4$,此时 $a^2+2a-3=21$,符合题意,

$\therefore$ 所求 a 的值为 -6,或 4;

(2) 若存在这样的实数 a,则 $a^2+2a-3=12$,且 $|a+1|<12$ 或 $|a+1|=12$,且 $a^2+2a-3<12$;

由于 $|a+1|=12$ 时,$a^2+2a-3=(a+1)^2-4=140$,$\therefore$ 后一种情况不存在;

由第一种情况解得 $a=3$,或 $a=-5$;

即这样的 a 的值存在,且 $a=3$,或 $a=-5$.

发散点

“元素在集合中”反映了元素与集合的从属关系,时常也有利用这一概念来命题的情况,若要利用这一关系来确定某些待定参数时,一要注意进行相应的分类讨论,二要对所求结果进行必要的检验.这一解题步骤要求正是由集合中元素的无序性和互异性所决定的,一旦忽视,将导致失误.

延伸点

1. 已知 $A=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$,其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1) 若 $-3\in A$,求实数 a 的值;

(2) 当 a 为何值时,集合 A 的表示不正确?

分析　本题具体考查元素与有限集合的关系,并用另一种表述形式考

查集合中元素的互异性，求解时要注意展开相应的讨论.

解答 (1) 显然 $-3\neq a^2+1$，$\therefore$ $-3=a-3$，或 $-3=2a-1$，解得 $a=0$，或 $a=-1$；

(2) 当三个元素之间出现有两个或两个以上的元素相等的情况时，A 的表示不正确.即 $a-3=2a-1$，或 $a-3=a^2+1$，或 $2a-1=a^2+1$ 时，集合 A 的表示不正确.由于 $a\in\mathbf{R}$，$\therefore$ 后两个方程无实数解，$\therefore$ 当 $a=-2$ 时，A 的表示不正确.

2．已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid ax^2+2x+1=0\}$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1) 1 是 A 中的一个元素，用列举法表示 A；

(2) 若 A 中有且仅有一个元素，求 a 的值组成的集合 B；

(3) 若 A 中至多有一个元素，试求 a 的取值范围.

分析 采用较为灵活的方式给出考查集合知识的命题，解题中需要对三个小题中的命题语言进行斟酌，注意它们相互之间的差异.

解答 (1) $\because$ 1 是 A 的元素，$\therefore 1$ 是方程 $ax^2+2x+1=0$ 的一个根，$\therefore a\times1^2+2\times1+1=0$，即 $a=-3$，$\therefore$ 方程即为 $-3x^2+2x+1=0$，$\therefore x_1=1$，$x_2=-\dfrac{1}{3}$，$\therefore$ 此时集合 $A=\left\{-\dfrac{1}{3},1\right\}$；

(2) 若 $a=0$，方程化为 $2x+1=0$，此时有且仅有一个根 $x=-\dfrac{1}{2}$；

若 $a\neq0$，则当且仅当方程的判别式 $\Delta=4-4a=0$，即 $a=1$ 时，方程有两个相等的实根 $x_1=x_2=-1$，此时集合 A 中有且仅有一个元素，

$\therefore$ 所求集合 $B=\{0,1\}$；

(3) 集合 A 中至多有一个元素包括有两种情况：

① A 中有且只有一个元素，由 (2) 知此时 $a=0$ 或 $a=1$；

② A 中一个元素也没有，即 $A=\varnothing$，此时 $a\neq0$，且 $\Delta=4-4a<0$，

$\therefore$ $a>1$；

综合①、②知所求 a 的取值范围是 $\{a\mid a\geqslant1$ 或 $a=0\}$.

基础能力测试

一、选择题

1．下列指定的对象，能构成一个有限集合的一组是（　　）

A．全世界的在读高中生　　B．平面上的三角形

C．北京动物园里的小动物　　D．全国著名的数学家

2．以全体非负实数为元素的集合的一个正确表示是（　　）

A. $\{x\in\mathbf{N}\mid x\geqslant 0\}$　　B. $\{x\in\mathbf{R}\mid x>0\}$

C. {全体非负实数}　　D. {非负实数}

3. 下列集合中的元素也是集合 $\{x\mid x^2-2x-3=0\}$ 中的元素的是(　　)

A. $\{-3\}$　　B. $\{1\}$　　C. $\{-1\}$　　D. $\{-2\}$

4. 下面对集合 $\{1,5,9,13,17\}$ 用描述法来表示,其中正确的一个是(　　)

A. $\{x\mid x$ 是小于 18 的正奇数$\}$

B. $\{x\mid x=4k+1, k\in\mathbf{Z}$,且 $k<5\}$

C. $\{x\mid x=4t-3, t\in\mathbf{N}$,且 $t\leqslant 5\}$

D. $\{x\mid x=4s-3, s\in\mathbf{N}_+$,且 $s<6\}$

5. 已知下列①、②、③、④四种说法:

① $0\notin\varnothing$

② 空集 $\varnothing$ 可以表示为 $\{0\}$

③ $0\in\{0\}$

④ $\{1,3,4,|-3|\}$ 是由四个元素组成的一个集合

其中正确的说法有(　　)

A. 1 种　　B. 2 种　　C. 3 种　　D. 4 种

二、填空题

6. 已知集合 M 是由自然数中不大于 9 的偶数所组成,设 m 是 M 中所有元素的乘积,n 是 M 中所有元素的和,则 $m-n=$________.

7. 给出下列各待填符号式:

(1) 1 ______ $\{x\mid x^2+1=0\}$;　(2) $\left(-\frac{3}{2}\right)^0$ ______ $\mathbf{Q}$;

(3) 0 ______ $\mathbf{N}$;　　(4) $3\sqrt{2}$ ______ $\{x\mid x<2\sqrt{3}\}$.

其中可以依次填入的符号是____________________.

8. 设集合 $A=\{x\mid x=2k+1, k\in\mathbf{N}\}$, $B=\{y\mid y=4s, s\in\mathbf{N}\}$,且 $\mathbf{N}$ 为自然数集,给出下列说法:

① 若 $x_0\in\mathbf{N}, y_0\in\mathbf{N}$,则 $x_0y_0\in B$;

② 若 $x_0\in A, y_0\in B$,则 $x_0+y_0\in A$;

③ 若 $x_0\in A, y_0\in B$,则 $x_0+x_0y_0\in A$;

④ 若 $x_0\in\mathbf{N}$,且 $x_0\notin A$,则 $x_0\in B$;

⑤ 若 $y_0\in\mathbf{N}$,且 $y_0\notin B$,则 $y_0\in A$.

其中正确说法的序号是__________(填上所有正确说法的序号).

三、解答题

9．已知 $-3\in\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，求由满足上述条件的实数 a 组成的集合．

10．已知集合 $P=\{0,1,2,3,4\}$，$Q=\{x\mid x=ab,a、b\in P,且\ a\neq b\}$，试用列举法给出集合 Q．

11．已知集合 $A=\{x\mid ax+b=1\}$，$B=\{x\mid ax-b>4\}$，其中 $a\neq 0$，若 A 中的元素必为 B 中的元素，求实数 b 的取值范围．

发展思维训练

12．设 A 表示集合 $\{2,3,a^2+2a-3\}$，B 表示集合 $\{|a+3|,2\}$，若已知 $5\in A$，且 $5\notin B$，求实数 a 的值．

13．已知由实数组成的集合 A 满足条件：若 $x\in A$，则必有 $\frac{1}{1-x}\in A$．

(1) 设 A 中恰有三个元素，且 2 是其中的一个，求这时的集合 A；

(2) 有人断定集合 A 中的元素可以有且仅有一个，请你作出判断，看他的断言是否正确，为什么？

(3) 若集合 $A\neq\varnothing$，试证集合 A 中的元素个数必为 3 的倍数，并给出除(1)中以外的一个集合 A 来．

§1.2　子集、全集、补集

(一) 子集

知能转化导引　通过本节的学习，要求能正确理解子集、真子集的概念，理解集合相等的概念，切实掌握集合与集合的包含与真包含、包含于和真包含于的区别，子集与真子集的区别，并能正确地使用数学符号来反映这些关系，学会灵活地运用这些相关概念解题．同时，值得探究的是如何利用本节知识内容在学习过程中建立起局部与整体的思想，培养运用辨证的思想去分析问题和解决问题的习惯．

1．子集的概念

一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，我们就说集合 A 包含于集合 B，或集合 B 包含集合 A，分别记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，这时我们也说集合 A 是集合 B 的子集；

若集合 A 不包含于集合 B，或集合 B 不包含集合 A 时，则记作 $A\nsubseteq B$（或 $A\not\subset B$），或 $B\nsupseteq A$（或 $B\not\supset A$）.

2. **集合相等的概念**

一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素，我们就说集合 A 等于集合 B，记作 $A=B$.

用数学符号表示这一概念，应为“$A=B$”$\Leftrightarrow$“若 $a\in A$，则 $a\in B$；且若 $a\in B$，则 $a\in A$”. 下面给出的图 1－1 反映的即是 $A=B$ 的情况.

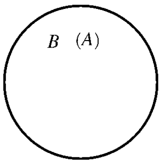

图 1－1

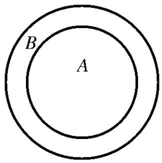

图 1－2

3. **真子集的概念**

一般地，对于两个集合 A、B，如果 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$，我们就说集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$，或 $B\supsetneqq A$. 如图 1－2.

4. **几个规定与结论**

(1) 空集是任何集合的子集，即 $\varnothing\subseteq A$ 对于任意一个集合 A 都成立.

(2) 空集是任何非空集合的真子集，即若 $A\neq\varnothing$，则 $\varnothing\subsetneqq A$.

(3) 若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

(4) 若 $A\subsetneqq B$，且 $B\subsetneqq C$，则 $A\subsetneqq C$.

(5) $A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

方法技巧规律

1. **运用数形结合的方法去认识子集、真子集、相等集合的概念**

对子集、真子集、相等集合概念的理解，既能通过定义去认识，也能结合集合的 Venn 图去考虑. 事实上，子集这一概念用数学符号表示应是“$A\subseteq B$”$\Leftrightarrow$“若 $a\in A$，则 $a\in B$”真子集的概念用数学符号表示是“$A\subsetneqq B$”$\Leftrightarrow$“若 $a\in A$，则 $a\in B$，且至少有一个 $b\in B$，满足 $b\notin A$”相等集合的概念用数学符号表示则为“$A=B$”$\Leftrightarrow$“若 $a\in A$，则 $a\in B$；且若 $a\in B$，则 $a\in A$”.

以上概念用 Venn 图表示则为上面两种情况（见图 1－1、图 1－2）.

其中的图 1－1 和图 1－2 即是 $A\subseteq B$ 的两种可能情况，图 1－2 反映的是 $A\subsetneqq B$，图 1－1 则反映的是 $A=B$ 的特殊情况.

2. 严格区分"包含"、"真包含"和"包含于"等符号.

首先，"$\subseteq$"与"$\subset$"，"$\supseteq$"与"$\supset$"，"$\nsubseteq$"与"$\not\subset$"这三对符号两两相比表面看不同，表达的却分别是同一意义."$\subseteq$"与"$\subset$"都表示"包含于"，"$\supseteq$"与"$\supset$"都表示"包含"而"$\nsubseteq$"与"$\not\subset$"都表示"不包含于"；且前面两组符号都具有运算的传递性，后一组则不具备运算的传递性；

其次，"$\subseteq$"、"$\supseteq$""$\subset$"、"$\supset$"、"$\subsetneqq$"、"$=$"等一系列符号是用以反映集合与集合之间某种从属关系的符号，它们与"$\in$"、"$\notin$"等符号的意义截然不同，前者只在集合间的关系中使用，而后者反映的是元素与集合间的关系；

同时，"$\subseteq$"、"$\supseteq$""$\subset$"、"$\supset$"、"$\subsetneqq$"等符号间也有较大区别，除"包含"、"真包含"的区别外，还要注意"包含"与"包含于"的区别.从形式上可以类比"$\leqslant$"和"$\geqslant$"来理解"$\subseteq$"和"$\supseteq$"的差异，用"$\leqslant$"和"$<$"来理解"$\subseteq$"和"$\subsetneqq$"的差异.

3. 重视一些基本规定和重要结论在解题中的应用

本节中的有关规定和结论往往可以帮助我们解题，但要注意在使用时如何避免错误.如，证明集合 A 与 B 相等，既能根据相等集合的定义，设法证集合 A 中的元素是集中 B 中的元素，且 B 中的元素也是集合 A 中的元素；也能利用结论，证两个集合互相包含.而在使用"空集是任何集合的子集"和"空集是任何非空集合的真子集"这两条性质时，稍不注意，就会混为一谈，以致产生解题失误.

能力升级捷径

【例 1】 设 $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$M=\{x\mid x\leqslant\sqrt{10}\}$，给出下列关系：

① $a\subset M$； ② $M\supseteq\{a\}$； ③ $\{a\}\in M$；

④ $\{\varnothing\}\in\{a\}$； ⑤ $2a\notin M$；

其中正确的关系式共有（　　）

A. 2 个　B. 3 个　C. 4 个　D. 5 个

分析　重在考查元素与集合、集合与集合的关系，要求能正确认识空集的概念，正确使用"属于"、"包含"等符号，解题的关键是确定出 a 与 $\sqrt{10}$ 的大小.

解答　$a^2=5+2\sqrt{6}=5+\sqrt{24}<5+5=(\sqrt{10})^2$，$\therefore$ $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}<\sqrt{10}$，$\therefore a$ 是集合 M 中的一个元素，又 $2a>\sqrt{10}$，$\therefore 2a$ 不是集合 M 中的元

素，而元素与集合之间的关系应由“属于或不属于”来描述，∴①是错误的，⑤是正确的；再由$\{a\}$是以a为元素的集合，$\{\varnothing\}$表示的是以$\varnothing$为元素的集合，且集合与集合之间的关系由“包含或不包含”来描述，从而可以断定③、④错误，②正确.

正确选择应为A.

信息点

当给定的问题涉及元素与集合、集合与集合的关系时，要抓住基本概念去解题.此时要注意辨明集合中元素的特征，对“包含”与“包含于”、“真包含”与“包含”、“属于”与“不属于”等符号要进行仔细辨认，以避免因疏忽而出错.

延伸点

1. 已知集合$M=\{x\mid x\leqslant\sqrt{22}\}$，$a=3\sqrt{2}$，则下列关系正确的是（　　）

A. $a\in M$，$\{a\}\supseteq M$　　　B. $a\notin M$，$\{a\}\not\subset M$

C. $a\in M$，$\{a\}\subsetneqq M$　　　D. $a\subseteq M$，$\{a\}\in M$

分析　本题与例1类同，所考查的知识主要是元素与集合、集合与集合的关系，要求准确理解题目中几个相应符号所反映的意义，并能从解答此题的过程中悟出结论：“以某一个集合中的任意一个或几个元素组成的集合一定是原来这个集合的一个子集”.

解答　$3\sqrt{2}<\sqrt{22}$，∴a是M中的一个元素，由于M中的元素有无穷多个，故集合$\{a\}$是M的一个真子集，正确使用符号知选项C正确.

2. 已知集合A满足条件：$\{a,b\}\subseteq A\subsetneqq\{a,b,c,d,e\}$，则这样的集合$A$共有________.

分析　本题侧重于在理解“包含于”与“真包含于”这两个概念的基础上运用较为灵活的手段解题.由于给定集合中的元素的个数有限，所以处理这类问题的一个有效手段即是采用枚举法：将所有满足条件的集合一一列举出来.这样既能达到最终目的，又利于发现集合中元素的特性，使得我们可以从题目的特殊性上去探究一般性的结论，为自己提出下列问题：(1) $\{c,d,e\}$的子集与真子集各有多少个？(2)一般地，有n个元素的集合M的子集和真子集的个数各是多少？

解答　由于$\{a,b\}\subseteq A$，∴A中必含有元素a、b，又$A\subsetneqq\{a,b,c,d,e\}$，∴$A$中元素至少比$\{a,b,c,d,e\}$中少一个，据此可得$A$可以是$\{a,b\}$、$\{a,b,c\}$、$\{a,b,d\}$、$\{a,b,e\}$、$\{a,b,c,d\}$、$\{a,b,c,e\}$、$\{a,b,d,e\}$之一，共7个；

∴ 应填入答案为 7.

【例 2】 已知集合 $A=\{x,xy,x-y\}$,集合 $B=\{0,|x|,y\}$,

(1)若 $A=B$,求实数 x、y 的值;

(2)是否存在实数 x、y 使得 A 与 B 是不相等的两个集合,但它们都有以 0 为其中的一个元素的相同的子集?试指出存在的条件或不存在的理由.

分析 有限集合的相等,即集合中的元素一一对应相等,可以由此建立关于 x、y 的方程组来解决问题(1);相同的子集表明 A、B 两个集合中有相同的元素,不相等则要求它们之中至少有一个元素不同,将这两个条件转换成对应的数学关系即能解决问题(2).

解答 (1)∵ $0\in B$,$A=B$,∴$0\in A$,又由集合中元素的互异性,可以断定 $|x|\neq 0$,$y\neq 0$,

∴$x\neq 0$,$xy\neq 0$,故 $x-y=0$,即 $x=y$,此时 $A=\{x,x^2,0\}$,$B=\{0,|x|,x\}$,

∴$x^2=|x|$,当 $x=1$ 时,$x^2=1$,矛盾,∴$x=-1$,即仅 $x=y=-1$;

(2)由(1),若 0 是两个集合的公共元素,则必有 $x=y$,这一相同的子集可以是 $\{0,x\}$,且欲使 $A\neq B$,当且仅当 $x^2\neq |x|$ 且 $x\neq |x|$.

故存在实数 x、y,当 $x=y<0$ 且 $x\neq -1$ 时,便可使得 A 与 B 有以 0 为其中一个元素的相同的子集.

探究点

利用集合相等的概念考查分类讨论思想的运用,是命题的一大探究点,对于有限集合中的此类问题,求解时往往象例 2 一样,采用逐一排查的方法,最后还需将所求得的数值代回原集合进行检验,以免与集合中元素的互异性相矛盾.

延伸点

1.下列各题中的集合 M 与集合 P 表示的是同一集合的是( )

A.$M=\{x\in\mathbf{R}|x^2+0.001=0\}$,$P=\{x|x^2=0.001\}$

B.$M=\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$,$P=\{x|x=2+4t,t\in\mathbf{Z}\}$

C.$M=\{x|x=y^2+1,y\in\mathbf{R}\}$,$P=\{y|y=(x-1)^2+1,x\in\mathbf{R}\}$

D.$M=\{x|xy=1,y\in\mathbf{N}\}$,$P=\{y|xy=1,x\in\mathbf{Z}\}$

分析 本题利用选择题的形式考查相等集合的概念,含有较大的信息量,需要熟练地掌握集合的表示法,正确识别集合中的元素特性,并分析出每组中的两个集合间的相互关系.

解答 A 中 M 是空集,P 中有两个元素;B 中 M 是偶数集合,P 以形如

4 的倍数加 2 的实数为元素；C 中的两个集合都等于 $\{x \mid x \geqslant 1\}$；D 中两个集合区别于元素的取值范围不同.

正确选择项为 C.

2. 设集合 $A=\{x, y, x+y\}$，$B=\{0, x^2, xy\}$，若 $A=B$，求实数 x、y 的值.

分析　题目类同于例 2 的第(1)问，区别在于即使有 $x \neq 0$、$y \neq 0$，仍然有两种情况需要讨论.

解答　由 $A=B$，且 $0 \in B$，$\therefore 0 \in A$，

若 $x=0$，则与 B 的表示矛盾，$\therefore x \neq 0$，同理 $y \neq 0$；

$$\therefore \begin{cases} x+y=0, \\ x^2=x, \\ xy=y; \end{cases} \text{或} \begin{cases} x+y=0, \\ x^2=y, \\ xy=x. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=1, \\ y=-1; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1, \\ y=1. \end{cases}$

【例 3】　已知集合 $A=\{x \mid 0 < ax+1 \leqslant 5\}$，集合 $B=\left\{x \,\middle|\, -\frac{1}{2} < x \leqslant 2\right\}$.

(1) 若 $A \subseteq B$，求实数 a 的取值范围；

(2) 若 $B \subseteq A$，求实数 a 的取值范围；

(3) A、B 能否相等？若能，求出 a 的值；若不能，试说明理由.

分析　题中给出的两个集合都为无限集合，若是孤立地考虑某个集合中的元素与另一个集合的关系，不易找到应求的范围. 我们可以设法在数轴上反映出两个一元一次不等式的解集，利用包含关系的几种特征去寻求解题的突破口. 由于集合 A 中的不等式含有参变量 a，因此对 a 进行讨论势在必行.

解答　A 中不等式的解应分三种情况确定：

① 若 $a=0$，则 $A=\mathbf{R}$；

② 若 $a<0$，则 $A=\left\{x \,\middle|\, \frac{4}{a} \leqslant x < -\frac{1}{a}\right\}$；

③ 若 $a>0$，则 $A=\left\{x \,\middle|\, -\frac{1}{a} < x \leqslant \frac{4}{a}\right\}$；

(1) 当 $a<0$ 时，若 $A \subseteq B$，则 $\begin{cases} \frac{4}{a} > -\frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{a} \leqslant 2, \end{cases}$