高等学校教材

高　等　数　学

下　　册

南京理工大学应用数学系　编

高等教育出版社

策划编辑 王　瑜
责任编辑 李　陶
封面设计 刘晓翔
责任绘图 杜晓丹
版式设计 马静如
责任校对 王　雨
责任印制

内容简介

本书分上、下两册出版。上册主要内容包括函数、极限、函数的连续性，一元函数微分学及其应用，一元函数积分学及其应用；下册主要内容包括向量代数与空间解析几何，多元函数微分法及其应用，重积分及其应用，曲线积分与曲面积分，无穷级数，微分方程。

本书注重数学概念的几何直观表述，图文并茂，叙述详尽，说理透彻，通俗易懂。书中所选例题、习题覆盖面广，具有代表性。

本书可作为高等工科院校理工科各专业本科生教材，也可供工程技术人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．下册/南京理工大学应用数学系编．—北京:高等教育出版社，2004.11
ISBN 7-04-015483-8

Ⅰ．高… Ⅱ．南… Ⅲ．高等数学-高等学校-教材 Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第103566号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn

经　　销　新华书店北京发行所
排　　版　高等教育出版社照排中心
印　　刷

开　　本	787×960　1/16	版　　次	年　月第1版
印　　张	24.5	印　　次	年　月第　次印刷
字　　数	250 000	定　　价	26.40元

物料号:15483-00

前　　言

本书是为适应21世纪数学教学的需要，按照教育部“高等教育面向21世纪教学内容课程体系改革计划”的精神，在南京理工大学1997年出版使用的《高等数学教程》的基础上修订而成的。本书凝结了编者多年教学实践经验和体会，同时吸收了国内外现行的有特色教材的优点。

本书强调将基础知识的学习、数学思想方法的学习以及数学素质的培养融为一体。注重数学概念的几何直观表述，图文并茂，叙述详尽，说理透彻，通俗易懂。书中所选例题、习题覆盖面广，具有代表性。每节均配有习题，书末附有习题答案。凡超过“高等数学课程教学基本要求”的内容都用＊标明。

本书分上、下两册出版。上册主要内容是函数、极限、函数的连续性，一元函数微分学及其应用，一元函数积分学及其应用；下册内容有向量代数与空间解析几何，多元函数微分法及其应用，重积分及其应用，曲线积分与曲面积分，无穷级数，微分方程。

本书共分十二章。全书由杨孝平教授主持修订和审阅，参加修订工作的有许春根（第一章），王为群（第二、三章），尹群（第四、五、六章），吴新民（第七、八章），刘德钦（第九、十章），俞军（第十一、十二章），陆毓琪教授也审阅了全书的书稿。感谢南京理工大学应用数学系的教师，他们对本书的编写提出了宝贵的意见和建议，提高了本书的质量。本书的出版得到了南京理工大学教务处的关心和资助，得到了高等教育出版社王瑜和李陶编辑的大力支持，在此谨向他们致以谢意。

由于编者水平有限，书中错误与不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编　者

2004年7月

目　　录

第十章　曲线积分与曲面积分

上一章已经把积分概念从积分范围为数轴上一个区间的情形推广到积分范围为平面或空间内一个闭区域的情形.本章将把积分概念推广到积分范围为一段曲线或一片曲面的情形,即曲线积分和曲面积分.这种新型积分与我们前面遇到过的二重积分、三重积分之间的联系在格林定理、高斯定理、斯托克斯定理中给出,这些定理有重要的理论意义和广泛应用.

第一节　对弧长的曲线积分

一、对弧长的曲线积分的概念与性质

实例　求曲线弧的质量

设平面上有一条光滑曲线 L,它的两个端点为 A、B,L 上任一点 $M(x,y)$ 处的线密度为连续函数 $\mu(x,y)$,求此曲线弧的质量(图 10.1).

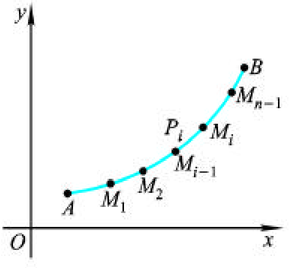

图 10.1

解　用分点 $A=M_0,M_1,\cdots,M_{i-1},M_i,\cdots,M_n=B$ 将曲线 L 任意分成 n 小段 $M_{i-1}M_i$,其长度分别为 $\Delta s_i\ (i=1,2,\cdots,n)$.

现考察小弧段 $M_{i-1}M_i$ 的质量.在弧段 $M_{i-1}M_i$ 上任取一点 $P_i(\xi_i,\eta_i)$,曲线在 P_i 处的密度为 $\mu(\xi_i,\eta_i)$.当 Δs_i 很小时,因为线密度连续,就可以用点 P_i 处的线密度代替这小弧段上其它各点处的线密度,从而得到这小弧段的质量的近似值为

$$\Delta m_i \approx \mu(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i\ (i=1,2,\cdots,n).$$

因此整个曲线的质量的近似值为

$$m=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i.$$

显而易见,当分点愈多,小弧段的长度愈小时,近似值就越接近于曲线弧的

质量.

记 $\lambda=\max\{\Delta s_1,\Delta s_2,\cdots,\Delta s_n\}$，则曲线的质量 m 可精确地表达为：当 $\lambda\to 0$ 时，上述和式的极限，即

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i.$$

这种和式的极限在研究许多物理量或几何量中也会遇到.由此抽象出对弧长的曲线积分的概念.

定义 设 L 为 xOy 平面上一条光滑曲线 AB，函数 $f(x,y)$ 在 L 上有界.在 L 上任取点 $A=M_0,M_1,\cdots,M_{n-1},M_n=B$，将 L 分成 n 小段，每小段的长度为 Δs_i $(i=1,2,\cdots,n)$，在每小段上任取一点 (ξ_i,η_i)，作和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$，若不论对 L 怎样分法，点 (ξ_i,η_i) 怎样取法，当各小弧段的长度的最大值 $\lambda\to 0$ 时，上述和的极限存在，则称此极限值为函数 $f(x,y)$ 在曲线 L 上对弧长的曲线积分（或称第一型曲线积分），记作

$$\int_L f(x,y)\,ds \quad 或 \quad \int_{AB} f(x,y)\,ds,$$

即

$$\int_L f(x,y)\,ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i.$$

其中 $f(x,y)$ 叫做被积函数，曲线 L 叫做积分路径，ds 叫做弧长元素（即弧微分）.

根据这个定义，上面所说的曲线质量 m，当线密度 $\mu(x,y)$ 在 L 上连续时，就等于 $\mu(x,y)$ 对弧长的曲线积分，即

$$m=\int_L \mu(x,y)\,ds.$$

可以证明：若函数 $f(x,y)$ 在光滑曲线 L 上连续，则 $f(x,y)$ 在 L 上对弧长的曲线积分一定存在（即 $f(x,y)$ 在曲线 L 上可积）.以后我们总假定 L 是光滑的或分段光滑的（即 L 可分成有限段，而每一段都是光滑的），函数在 L 上是连续的.

若 L 是分段光滑的，我们规定函数在 L 上的曲线积分等于在各光滑段上的曲线积分之和.

若 L 是闭曲线，通常把函数 $f(x,y)$ 在闭曲线上对弧长的曲线积分记作 $\oint_L f(x,y)\,ds$.

容易证明，对弧长的曲线积分具有如下性质：

(1) **线性性质**：设 α、β 为常数，则

$$\boxed{\int_L [\alpha f(x,y) \pm \beta g(x,y)]\,ds = \alpha\int_L f(x,y)\,ds \pm \beta\int_L g(x,y)\,ds.}$$

(2) **对弧段具有可加性**：若 L 是由 L_1 与 L_2 组成的（记作 $L = L_1 + L_2$），则

$$\boxed{\int_L f(x,y)\,ds = \int_{L_1} f(x,y)\,ds + \int_{L_2} f(x,y)\,ds.}$$

此性质可以推广到 L 由 $L_1, L_2, \cdots, L_k$ 组成的情形.

以上概念和性质可以推广到空间曲线 L 上，

$$\boxed{\int_L f(x,y,z)\,ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta s_i.}$$

其中 $f(x,y,z)$ 是定义在空间曲线 L 上的函数，ds 表示空间曲线的弧长元素.

二、对弧长的曲线积分的计算与应用

在曲线积分 $\int_L f(x,y)\,ds$ 中，被积函数 $f(x,y)$ 虽然是二元函数. 但 $f(x,y)$ 中的 x, y 是在曲线 L 上变化的，所以 x, y 不是独立的，它们之间的关系实质上只依赖于一个变量. 如果利用曲线 L 的方程消去一个变量，曲线积分就可化为定积分来计算.

定理　设平面曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad (\alpha \le t \le \beta),$$

其中 $x(t), y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导数，且 $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$. 若 $f(x,y)$ 在 L 上连续，则有

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\boxed{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}\,dt \qquad (10.1)$$

证　因为 $f(x,y)$ 在 L 上连续，所以曲线积分 $\int_L f(x,y)\,ds$ 存在，从而对 L 的任何分法，点 (ξ_i,η_i) 的任何取法，恒有

$$\int_L f(x,y)\,ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\,\Delta s_i.$$

设 t_{i-1}、t_i 为第 i 段曲线两端点的对应参数值，由于

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt.$$

应用积分中值定理有

$$\Delta s_i = \sqrt{x'^2(\tau_i) + y'^2(\tau_i)}\, \Delta t_i,$$

其中 $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$，$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$．让 $\xi_i = x(\tau_i)$，$\eta_i = y(\tau_i)$，则有

$$\int_L f(x,y)\, ds = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f[x(\tau_i), y(\tau_i)] \sqrt{x'^2(\tau_i) + y'^2(\tau_i)}\, \Delta t_i.$$

注意到 $f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续，从而上式右边即为定积分 $\int_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$，故 (10.1) 式成立． □

公式 (10.1) 表明，计算对弧长的曲线积分 $\int_L f(x,y)\, ds$ 时，只要把被积函数中的变量 x,y 用曲线 L 的参数方程 $x = x(t)$，$y = y(t)$ 代入，使 $f(x,y)$ 成为 t 的一元函数 $f(x(t), y(t))$，将弧微分 ds 换为 $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$，然后从 α 到 β 作定积分．这里必须注意，定积分的下限 α 一定小于上限 β．这是因为从上述推导中可以看出，由于小弧段的长度 Δs_i 总是正的，从而 $\Delta t_i > 0$，所以定积分的下限 α 一定小于上限 β．

若曲线 L 由方程

$$y = y(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

给出，那么可以把这种情形看作是

$$\begin{cases} x = x, \\ y = y(x) \end{cases} \quad (a \leq x \leq b),$$

即将 x 看作参数，由公式 (10.1) 可得

$$\boxed{\int_L f(x,y)\, ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx.} \tag{10.2}$$

类似地，若曲线 L 的方程为

$$x = x(y) \quad (c \leq y \leq d),$$

则

$$\boxed{\int_L f(x,y)\,ds=\int_c^d f(x(y),y)\sqrt{1+x'^2(y)}\,dy.}\tag{10.3}$$

而当曲线 L 由极坐标方程

$$\rho=\rho(\varphi)\quad(\alpha\leq\varphi\leq\beta)$$

形式给出时,则由公式(10.1)可得

$$\boxed{\int_L f(x,y)\,ds=\int_\alpha^\beta f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2+\rho'^2(\varphi)}\,d\varphi.}\tag{10.4}$$

公式(10.1)可推广到空间曲线 L 对弧长的曲线积分.设空间曲线 L 的方程为

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\quad(\alpha\leq t\leq\beta),\\ z=z(t)\end{cases}$$

则有

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_L f(x,y,z)\,ds\\ =&\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.\end{aligned}}\tag{10.5}$$

例 1　计算 $\int_L xy\,ds$,其中 L 为椭圆 $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t\end{cases}$ 在第一象限部分(图10.2).

解　$\dfrac{dx}{dt}=-a\sin t,\ \dfrac{dy}{dt}=b\cos t.$

$$ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$

$$=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt.$$

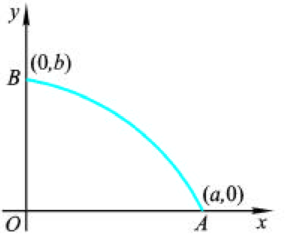

图 10.2

点 A 与点 B 对应的参数为 0 与 $\dfrac{\pi}{2}$,由公式(10.1)得

$$\int_L xy\,ds=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\,b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt$$

$$=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t}\,dt$$

$$=\frac{ab}{2(a^2-b^2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t}\,\mathrm{d}\left[a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t\right]$$

$$=\frac{ab}{3(a+b)}(a^2+ab+b^2).$$

例 2　计算 $\int_L y\mathrm{d}s$，其中：

(1)　L 是由折线 OAB 组成，A 的坐标为 (1,0)，B 的坐标为 (1,1)（图 10.3）．

(2)　L 是抛物线 $y^2=x$ 从点 $B(1,-1)$ 到点 $A(1,1)$ 的一段（图 10.4）．

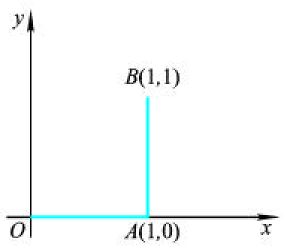

图 10.3

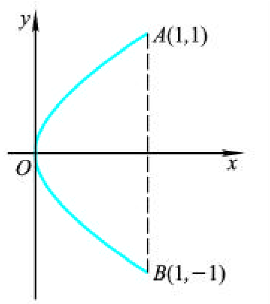

图 10.4

解　(1)　因为积分路径 $L=\overline{OA}+\overline{AB}$，所以

$$\int_L y\mathrm{d}s=\int_{\overline{OA}}y\mathrm{d}s+\int_{\overline{AB}}y\mathrm{d}s.$$

在 $\overline{OA}$ 上：$y=0,\mathrm{d}s=\mathrm{d}x$；在 $\overline{AB}$ 上：$x=1,\mathrm{d}s=\mathrm{d}y$，因此

$$\int_L y\mathrm{d}s=\int_0^1 0\,\mathrm{d}x+\int_0^1 y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

(2)　将 L 的方程改写成

$$x=y^2\quad(-1\leq y\leq 1),$$

以保证函数是单值的，则 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=2y,\mathrm{d}s=\sqrt{1+(2y)^2}\,\mathrm{d}y$，由公式 (10.3) 得

$$\int_L y\mathrm{d}s=\int_{-1}^1 y\sqrt{1+4y^2}\,\mathrm{d}y=0$$

(因为被积函数是奇函数)．

例 3　计算 $\int_c xyz\mathrm{d}s$，其中 c 是螺旋线 $x=a\cos t,y=a\sin t,z=kt$ 的一段 $(0\leq t\leq 2\pi)$．

解　$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-a\sin t,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=a\cos t,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=k.$

$$ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt=\sqrt{a^2+k^2}\,dt.$$

由公式(10.5)得

$$\int_L xyz\,ds=\int_0^{2\pi} a^2\cos t\sin t\cdot kt\sqrt{a^2+k^2}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}ka^2\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi} t\sin 2t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}ka^2\sqrt{a^2+k^2}\left[\frac{-t\cos 2t}{2}\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2t\,dt\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\pi ka^2\sqrt{a^2+k^2}.$$

曲线的质量可以用对弧长的曲线积分来表示，关于曲线的质心、转动惯量等也都可应用这种积分来表达.

如有光滑平面曲线 L，其线密度为 $\mu(x,y)$，应用积分微元法，不难建立下面的结果.曲线的质心坐标 $(\bar{x},\bar{y})$ 为

$$\bar{x}=\frac{\int_L x\mu\,ds}{\int_L \mu\,ds},\qquad \bar{y}=\frac{\int_L y\mu\,ds}{\int_L \mu\,ds}.$$

曲线对 x 轴、y 轴及原点的转动惯量分别为

$$I_x=\int_L y^2\mu\,ds,\qquad I_y=\int_L x^2\mu\,ds,\qquad I_0=\int_L (x^2+y^2)\mu\,ds.$$

例 4　设有一半圆弧 $L:x^2+y^2=R^2\ (y\geq 0)$，其上均匀分布着质量，求它的质心和对 x 轴的转动惯量.

解　如图 10.5 所示，由对称性知质心的横坐标 $\bar{x}=0$. 因为质量均匀分布，所以线密度 μ 为常数.

$$\bar{y}=\frac{\int_L y\mu\,ds}{\int_L \mu\,ds}=\frac{\int_L y\,ds}{\int_L ds}.$$

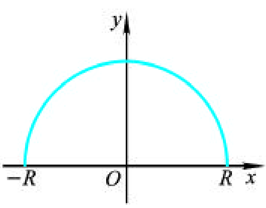

图 10.5

为了便于计算，利用半圆的参数方程

$$x=R\cos t,\ y=R\sin t\ (0\leq t\leq\pi),$$

则
$$ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=R\,dt.$$

于是

$$\int_L y\,ds=\int_0^{\pi} R^2\sin t\,dt=2R^2.$$

而
$$\int_L ds=\pi R,$$

故
$$\bar{y}=\frac{2R}{\pi}.$$

所以半圆弧的质心坐标为 $\left(0,\frac{2R}{\pi}\right)$.

半圆对 x 轴的转动惯量为

$$I_x=\int_L \mu y^2\,ds=\mu\int_0^{\pi} R^3\sin^2 t\,dt=\frac{\mu\pi R^3}{2}.$$

习　题　10.1

1．计算下列曲线积分：

(1) $\oint_L (x+y)\,ds$，其中 L 是由 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,1)$ 为顶点的三角形边界；

(2) $\int_C \sin 2x\,ds$，其中 C 为曲线 $y=\sin x\,(0\leq x\leq\pi)$；

(3) $\oint_L \left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)ds$，其中 L 为星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$；

(4) $\int_C x|y|\,ds$，其中 C 是椭圆 $x=a\cos t, y=b\sin t\,(a>b>0)$ 的右半部分（$x\geq 0$ 部分）；

(5) $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$，其中 L 为圆 $x^2+y^2=4x$ 的一周；

(6) $\oint_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$，其中 C 为曲线 $\rho=a, \varphi=-\frac{\pi}{2}, \varphi=\frac{\pi}{4}$（$\rho,\varphi$ 为极坐标）所围成的闭曲线；

(7) $\int_L xyz\,ds$，其中 L 为曲线 $x=t, y=\frac{2}{3}t\sqrt{2t}, z=\frac{1}{2}t^2$ 在 $0\leq t\leq 1$ 对应的一段．

2．设曲线 $y=\ln x$ 上每一点的密度等于该点的横坐标的平方，求曲线在 $x=\sqrt{3}$ 和 $x=\sqrt{15}$ 之间这一段的曲线的质量．

3．求半径为 R，圆心角为 $2\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ 的均匀圆弧的质心．