普通高等教育‘ 十五 ’国家级规划教材

（高职高专教育）

高 等 数 学

（第三版）

上　　册

盛祥耀　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是教育部高职高专规划教材。作者根据教育部新制定的‘高职高专教育高等数学课程教学基本要求”,结合多年教学经验,对本书第二版进行了适当修订,使其能够适应目前高职高专教育的现状。本书分为上、下册,上册包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何、向量代数等内容。本书第一版获国家教育委员会第二届普通高等学校优秀教材二等奖。

本书内容符合高职高专的教学要求,文字较通顺,推理正确,叙述清晰,易教易学,可作为高职高专院校工科各专业教材,也可供工程技术人员参考。

与本书配套的教材有《高等数学辅导》。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/盛祥耀主编.—3版.—北京:高等教育出版社,2004.4

ISBN 7-04-014690-8

Ⅰ.高... Ⅱ.盛... Ⅲ.高等数学-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第015577号

策划编辑 蒋 青 责任编辑 丁鹤龄 封面设计 杨立新 责任绘图 黄建英
版式设计 马静如 责任校对 王 雨 责任印制

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷			
		版 次	1987年10月第1版
开 本	787×1092 1/16		年 月第3版
印 张	14	印 次	年 月第 次印刷
字 数	340 000	定 价	16.50元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

出 版 说 明

教材建设工作是整个高职高专教育教学工作中的重要组成部分。改革开放以来,在各级教育行政部门、学校和有关出版社的共同努力下,各地已出版了一批高职高专教育教材。但从整体上看,具有高职高专教育特色的教材极其匮乏,不少院校尚在借用本科或中专教材,教材建设仍落后于高职高专教育的发展需要。为此,1999 年教育部组织制定了《高职高专教育基础课程教学基本要求》(以下简称《基本要求》)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(以下简称《培养规格》),通过推荐、招标及遴选,组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师,成立了“教育部高职高专规划教材”编写队伍,并在有关出版社的积极配合下,推出一批“教育部高职高专规划教材”。

“教育部高职高专规划教材”计划出版 500 种,用 5 年左右时间完成。出版后的教材将覆盖高职高专教育的基础课程和主干专业课程。计划先用 2 ~ 3 年的时间,在继承原有高职、高专和成人高等学校教材建设成果的基础上,充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验,解决好新形势下高职高专教育教材的有无问题;然后再用 2 ~ 3 年的时间,在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上,通过研究、改革和建设,推出一大批教育部高职高专教育教材,从而形成优化配套的高职高专教育教材体系。

“教育部高职高专规划教材”是按照《基本要求》和《培养规格》的要求,充分汲取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的,适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校使用。

教育部高等教育司

2000 年 4 月 3 日

第三版前言

根据新近制定的“高等数学课程的教学基本要求”(送审稿),本版对第二版作了如下的一些修改。

1. 极限的“$\varepsilon-N$”与“$\varepsilon-\delta$”定义,改为描述性的,相应部分也随之修改。
2. 无穷小量的比较一节中保留定理一,删去定理二。
3. 导数的应用章中删除:罗尔定理与拉格朗日定理的证明;方程的近似根。
4. 积分章中删除:有理函数的积分法;近似积分法。改写了部分内容。
5. 多元函数及其微分法章中删除:全微分在近似计算中的应用;曲线$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ \Phi(x,y,z)=0\end{cases}$的切线方程与法平面方程。引进记号$f'_1$,$f'_2$等。
6. 无穷级数章中删除:幂级数收敛半径的存在性;近似计算。改写了泰勒级数的部分内容。
7. 常微分方程章中删除:可化为$y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$型的方程;伯努利方程;微分方程的近似解;可降阶的高阶微分方程;弹簧振动问题的解法。
8. 订正了几处错误或不当之处。
9. 数学家史略分散到各有关内容之中。

编者
于清华园
2003 年 12 月

第一版前言

这本《高等数学》是为大学专科各专业编写的。全书共十二章，分上下两册出版。上册包括：空间解析几何、函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分和定积分及其应用等七章。把空间解析几何放在第一章讲授，是考虑到新生入学时学习热情很高，他们期待学习新的知识。如把函数作为第一章似不能满足这个要求。几年实践说明，这样安排较合适。当然，把它放在定积分之后，也是可以的。下册包括：多元函数及其微分法、重积分、线面积分、级数和常微分方程等五章，最后附有数学史料。

在编写过程中除考虑到大学专科各专业的要求和特点外，还参考了为大学本科四年制所制订的高等数学课程的教学基本要求（讨论稿）及中央电大的教学大纲。另外，我们吸收了不少从事大学专科各专业高等数学教学的教师的想法：全书不写多余的内容，所写内容均为教学所必需，但根据各专业的需要可以有所选取。例如，某些专业可以不学面积分、富氏级数。类似这些内容我们用 * 号表示。为了便于自学，安排了不少数量的例题，讲授时可酌情采用。本书每节后有习题，每章后有总习题。习题数量适中，多数应让学生完成。答案附在每章之后。

本书内容用 150 学时左右就能讲完，如果每学期以 17 周计算，那么第一学期每周可排 5 学时，第二学期每周可排 4 学时。

编写本书时，参考了清华大学应用数学系盛祥耀、居余马、李欧、程紫明等编的《高等数学》，同济大学数学教研室主编的《高等数学》（第二版），盛祥耀、葛严麟、胡全德、张元德四人编的《高等数学辅导》，同济大学数学教研室编的《高等数学习题集》，别尔曼著、景毅等译的《数学解析习题集编》及盛祥耀、葛严麟编的《习题集》（未出版）。在此，对以上所提到的作者表示感谢。

限于编者水平，有不当之处，希望广大读者提出宝贵意见。

盛祥耀

1985 年 12 月于清华园

第二版前言

本书根据国家教委组织制定的高等学校工程专科“高等数学课程教学基本要求”及第一版使用情况，对第一版作了以下的一些修改：

一、在内容的要求和安排上作了适度的调整。

空间解析几何中增加二、三阶行列式的简介，这是因为中学没有学，并将这一章调至定积分之后；降低了对极限 $\varepsilon-\delta$ 定义的要求；泰勒公式作为泰勒级数的准备知识来处理，并将它放在级数一章之中；洛必达法则中删去“0^0”，“1^∞”，“∞^0”等未定型的极限；略去了富氏级数中在 $[-l,l]$ 上的展开式等。

二、更加注意教学法。

向量代数中的叉积定义由洛伦兹力引入。中学生对此是非常熟悉的，从而使叉积定义容易理解和接受；加强了微分运算，使之与工程技术要求更加接近；对一些重要理论和方法加强了分析和解释，增加了小结等。

三、文字上作了一些修改。

经过以上的修改，作者相信这一版会更受读者的欢迎。

感谢读者对第一版的厚爱，希望第二版能继续得到读者的帮助和支持。

作者

1994.6.27.于清华园。

第一章　函　　数

§1. 集合　绝对值　区间

Ⅰ. 集合

一般可以把集合理解为具有某种属性的一些对象所组成的全体. 例如某班全体同学组成一个集合；所有三角形组成一个集合；地球上所有的国家组成一个集合；数 1、2、3、4、5 组成一个集合；满足不等式 $a<x<b$ 的 x 组成一个集合；第一、三象限分角线上所有的点组成一个集合等等. 集合里的各个对象叫做这个集合的元素. 习惯上集合用大写字母如 A、B、C…等表示，而元素用小写字母如 a、b、c…等表示.

含有有限个元素的集合称为有限集，含有无限个元素的集合称为无限集. 如果 a 是集合 A 的元素，则记作 $a\in A$，读作“a 属于 A”. 否则记作 $a\notin A$（或 $a\,\overline{\in}\,A$），读作“a 不属于 A”.

所谓给定一个集，就是给出这个集合由哪些元素组成. 给出的方式不外两种：列举法和描述法. 所谓列举法就是把集合中所有元素都列举出来写在大括号内. 例如集合 A 包含 1、2、3、4、5 五个数，就可记为

$$A=\{1,2,3,4,5\}.$$

所谓描述法，就是把集合中的元素的公共属性描述出来. 它记为

$$A=\{x\mid x\text{ 具有性质 }p\}$$

或

$$A=\{x:x\text{ 具有性质 }p\}.$$

大括号内先写上这个元素的一般形式，再画一竖线或“：”，然后写上这个集合的元素所具有的共同属性. 例如满足不等式 $a<x<b$ 的所有 x 的集合，可表示为

$$A=\{x\mid a<x<b\},$$

或

$$A=\{x:a<x<b\}.$$

集合 $$M=\{C\mid C\text{ 是圆心在原点的圆}\}$$

表示所有圆心在原点的圆的集合. 集合

$$P=\{(x,y)\mid y=2x+1,x\in\mathbf{R}\}$$

表示所有在直线 $y=2x+1$ 上的点的集合，其中 $\mathbf{R}$ 表示全体实数的集合. 显然点 $(1,2)\notin P$，而点 $(1,3)\in P$.

不含任何元素的集合叫做空集，记为　，例如，方程 $x^2+y^2=-1$ 的实数解是一个空集.

Ⅱ. 子集、交集、并集和补集

定义一　如果集合 A 中的每一个元素都属于集合 B，则称 A 为 B 的子集. 记为

$$A \subseteq B,$$

或

$$B \supseteq A,$$

读作"A 含于 B"或"B 包含于 A". 例如 $\mathbf{R}$ 表示全体实数的集合,$\mathbf{Q}$ 表示全体有理数的集合. 显然 $\mathbf{Q}$ 中每一个元素都属于 $\mathbf{R}$. 所以集合 $\mathbf{Q}$ 是集合 $\mathbf{R}$ 的子集.

如果 A 是 B 的子集,并且集合 B 中至少有一个元素不属于 A. 那么集合 A 叫做集合 B 的真子集,记作

$$A \subsetneqq B.$$

例如,所有有理数的集合 $\mathbf{Q}$ 是所有实数的集合 $\mathbf{R}$ 的真子集. 即

$$\mathbf{Q} \subsetneqq \mathbf{R}.$$

由定义可知,任何一个集合 A 是它自己的子集,即 $A \subseteq A$. 空集可认为是任何集合的子集.

定义二　设两个集合 A,B. 如果 $A \subseteq B$,同时 $B \subseteq A$,则称集合 A 与集合 B 相等. 记作

$$A = B.$$

这里要注意,如果集合 A 只有一个元素 a 组成,不能写为

$$A = a,$$

应写为

$$A = \{a\}.$$

如果元素 a 属于 A,不能写为

$$a \subset A,$$

应写为

$$a \in A,$$

也就是说记号 $\subsetneqq$,$\subseteq$ 是在集合之间使用的.

定义三　既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素的集合叫做集合 A 与集合 B 的交集,记作

$$A \cap B,$$

如图 1.1.

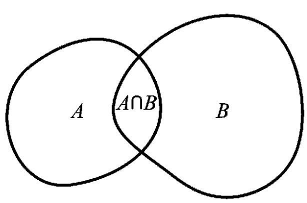

图　1.1

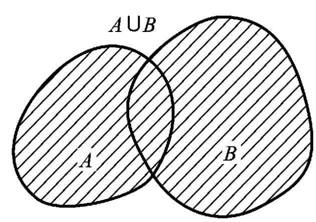

图　1.2

定义四　所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合叫做集合 A 与集合 B 的并集. 记作

$$A \cup B.$$

如图 1.2 中阴影部分表示集合 A 与 B 的并集.

例如,$A = \{x \mid 1 < x < 3\}$,$B = \{x \mid 0 < x < 2\}$,那么

$$A \cap B = \{x \mid 1 < x < 2\};\text{而 } A \cup B = \{x \mid 0 < x < 3\}.$$

又例如,　$\{1,2,3,4,6\} \cap \{0,2,4,8,10\} = \{2,4\}$,

$$\{1,2,3,4,6\} \cup \{0,2,4,8,10\} = \{0,1,2,3,4,6,8,10\}.$$

如果所讨论的集合都是某一个集合 I 的子集. 那么集合 I 称为全集.

定义五　如果集合 A 是全集 I 的子集,则在 I 中不属于 A 的元素所组成的集合,叫做集合 A 在集合 I 的补集,简称集合 A 的补集,记作 $\complement A$. 如图 1. 3 中阴影部分是集合 A 的补集 $\complement A$(长方形表示全集 I),它可表示为

$$\complement A = \{x \mid x \in I, \text{且 } x \notin A\}.$$

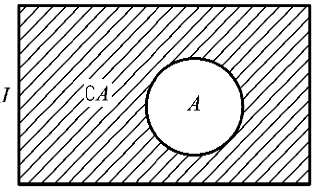

图　1. 3

显然,$A \cup \complement A = I$,$A \cap \complement A = \varnothing$. $\complement\complement A = A$. 其中 $\complement\complement A$ 表示集合 $\complement A$ 的补集. 例如,全集 I 为所有实数的集合 $\mathbf{R}$. $\mathbf{Q}$ 表示所有有理数的集合,则

$$\complement \mathbf{Q} = \{x \mid x \in \mathbf{R}, \text{且 } x \notin \mathbf{Q}\},$$

即 $\complement \mathbf{Q}$ 为所有无理数的集合.

Ⅲ. 绝对值

定义六　实数 a 的绝对值(记作 $|a|$)规定为

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{若 } a \geqslant 0; \\ -a, & \text{若 } a < 0. \end{cases}$$

a 的绝对值在数轴上表示点 a 到原点的距离.

绝对值有以下的一些性质:

(1) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$;

(2) 如果 $|x| < \varepsilon$,则 $-\varepsilon < x < \varepsilon$,反之亦然;

(3) 如果 $|x| > N$,则 $x > N$ 或 $x < -N$,反之亦然.

绝对值有以下的一些运算规则:

(1) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$($a$,$b$ 为实数).

事实上

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|,$$
$$-|b| \leqslant b \leqslant |b|,$$

两式相加,得

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|.$$

所以

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

(2) $|a-b| \geqslant |a| - |b|$($a$,$b$ 为实数)

事实上,

$$|a| = |a-b+b| \leqslant |a-b| + |b|,$$

即

$$|a-b| \geqslant |a| - |b|.$$

(3) $|ab| = |a||b|$;$\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$　$(b \neq 0)$.

这两个公式是显然的.

Ⅳ. 区间

集合 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间,记作 (a,b). 它在数轴上表示点 a 与点 b 之间的线段,但不包

括端点 a 及端点 b(图 1.4)集合 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间,记作 $[a,b]$. 它在数轴上表示点 a 与点 b 之间的线段,包括其两个端点(图 1.5).

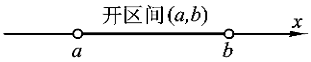

图 1.4

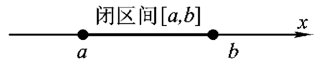

图 1.5

还有其他类型的区间:

$\{x \mid a < x \leqslant b\}$ 记作 $(a,b]$,称为半开区间;

$\{x \mid a \leqslant x < b\}$ 记作 $[a,b)$,称为半开区间;

$\{x \mid x > a\}$ 或 $\{x \mid x < a\}$ 记作 $(a,+\infty)$ 或 $(-\infty,a)$,称为半无穷区间;

$\{x \mid x$ 为任何实数$\}$ 记作 $(-\infty,+\infty)$,称为无穷区间等.

集合 $\{x \mid |x-a| < \varepsilon\}$ 称为点 a 的 ε 邻域. 它也可以用开区间来表示. 事实上,

$$|x-a| < \varepsilon,$$

去绝对值,得

$$-\varepsilon < x-a < \varepsilon,$$

即

$$a-\varepsilon < x < a+\varepsilon.$$

就是说,点 a 的 ε 邻域就是开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$. 从数轴上看,点 a 的 ε 邻域表示以点 a 为中心,长度为 2ε 的开区间(图 1.6).

图 1.6

例如,把 -1 的 $\frac{1}{2}$ 邻域表示成开区间. 即

$$|x-(-1)| < \frac{1}{2}.$$

去绝对值,得

$$-\frac{1}{2} < x+1 < \frac{1}{2},$$

即

$$-1-\frac{1}{2} < x < -1+\frac{1}{2},$$

就是开区间 $\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

习　题

1. 设 $A=\{-1,2,4,9,10\}$,$B=\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$. 求 $A\cap B$,$A\cup B$.
2. 设 $A=\{x \mid x \geqslant 0\}$,$B=\{x \mid x<5\}$ 求 $A\cap B$,$A\cup B$.
3. 设全集 $\mathbf{Z}$ 为所有整数的集合,$\mathbf{N}$ 为所有自然数的集合,即 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$,求 $\mathbf{N}$ 的补集,即 $\complement\mathbf{N}$.
4. 写出集合 $A=\{1,2,0\}$ 的所有子集.
5. 解不等式 $|x| > |x+1|$.
6. 解等式 $|x+1|+|x-1|=4$.
7. 把集合 $A=\{x \mid |x-2| \leqslant 3\} \cap B=\{x \mid |x+1|<2\}$ 用区间记号表示.
8. 把点 2 的 $\frac{1}{3}$ 邻域用集合表示.

§2. 映射与函数　反函数

Ⅰ. **映射**

定义一　设 A,B 是两个非空集合，如果按照一个确定的规则 f，对于集合 A 中每一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，则称 f 是由集合 A 到集合 B 的映射. 记作

$$f:A \to B.$$

如果 A 中的元素 a，对应的是 B 中的元素 b. 则称 b 为 a 的像，a 为 b 的原像.

在定义中，要注意按照规则 f 确定的集合 B 中的元素存在且是唯一的. 例如图 1.7(b)，1.7(c) 不表示由集合 A 到集合 B 的映射. 因为图 1.7(b) 中集合 A 的元素 a 对应集合 B 中的两个元素 b、c，不符合映射定义中唯一性的要求. 而图 1.7(c) 中集合 A 的元素 a_2 在集合 B 中无元素对应，也不符合映射定义中存在性的要求，但要注意，图 1.7(d) 所表示的是映射，尽管集合 A 中存在两个元素 a_1，a_3 对应集合 B 中的同一个元素 b，但不违背映射的定义.

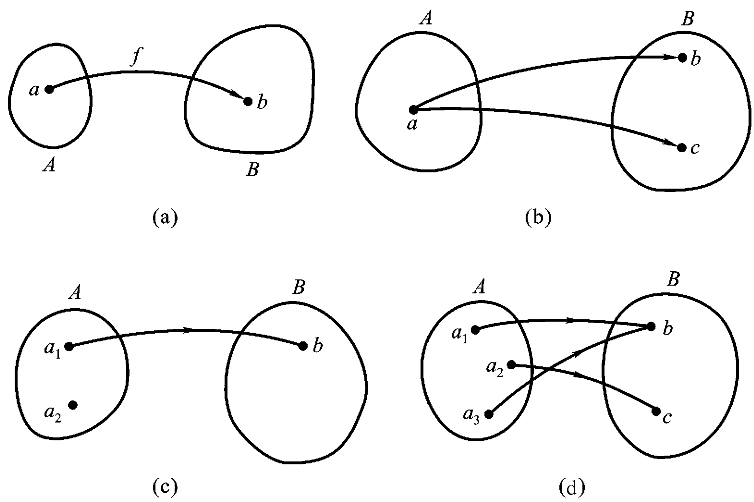

图　1.7

例 1　设 A 表示某一瞬间出生在地球上的人的集合，B 表示地球上每一点的坐标(经纬度)的集合，规则 f 是 A 中的人对应其出生地的坐标，则 f 是由 A 到 B 的映射.

例 2　设 $\mathbf{N}^*$ 是除去 0 的自然数集合，$\mathbf{N}^*$ 中所有大于 1 的元素集记为 A，$\mathbf{R}^+$ 是所有正实数的集合，对应规则 f 是将 A 中元素取对数(常用对数)，则 f 是由 A 到 $\mathbf{R}^+$ 的映射.

例 3　设 $A=\{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$，$B=\{y \mid 1 \leqslant y \leqslant 9\}$，对应规则 f 是将集合 A 中元素取平方，则 f 是由 A 到 B 的映射.

Ⅱ. **函数**

定义二　设有两个非空实数集合 D、B，如果对于数集 D 中的每一个数 x，按照确定的规则 f 对应着数集 B 中唯一的一个数 y，则称 f 是定义在集合 D 上的函数.

事实上，函数就是集合 D 到集合 B 的一种映射.

D 称为函数的定义域，与 $x \in D$ 对应的实数 y 记作 $y=f(x)$. 与 x_0 对应的 y 值有时记为

$f(x)|_{x=x_0}$或$f(x_0)$，集合$B_f=\{y|y=f(x),x\in D\}$称为函数的值域. 显然$B_f\subseteq B$.

习惯上，x称为自变量，y称为因变量. 要注意f是函数，而$f(x)$是函数值. 但是研究函数总是通过函数值来进行的. 为了方便，以后也把$f(x)$称作x的函数. 或y是x的函数.

如果对于自变量x的某一个值x_0，因变量y能得出一个确定的值，那么就说函数$y=f(x)$在x_0处有定义.

对于不同的函数，应该用不同的记号，如$f(x)$，$g(x)$，$F(x)$，$G(x)$等等.

有时，会出现对于变量x的一个值，有几个y值与之对应的情形，根据函数定义，y不是x的函数. 但为了方便，我们约定把这种情况称之为y是x的多值函数. 对于多值函数通常是限制其y的变化范围使之成为单值，再进行研究. 例如，反三角函数$y=\mathrm{Arcsin}\ x$是多值函数，当y限制在$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$时，就是单值了（这时习惯上称为主值，记作$y=\arcsin x$）. 通过对$y=\arcsin x$的研究就可了解$y=\mathrm{Arcsin}\ x$.

例4 设函数$f(x)=x^4+x^2+1$. 求$f(0)$，$f(t^2)$，$[f(t)]^2$，$f\left(\frac{1}{t}\right)$，$\frac{1}{f(t)}$.

解 $f(0)=0^4+0^2+1=1$，

$f(t^2)=(t^2)^4+(t^2)^2+1=t^8+t^4+1$，

$[f(t)]^2=(t^4+t^2+1)^2$，

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=\left(\frac{1}{t}\right)^4+\left(\frac{1}{t}\right)^2+1=\frac{1+t^2+t^4}{t^4},$$

$$\frac{1}{f(t)}=\frac{1}{t^4+t^2+1}.$$

例5 设$f(x+3)=\frac{x+1}{x+2}$，求$f(x)$.

解 令$x+3=t$，则$x=t-3$.

$$f(x+3)=\frac{(t-3)+1}{(t-3)+2}=\frac{t-2}{t-1}.$$

即

$$f(t)=\frac{t-2}{t-1}.$$

所以

$$f(x)=\frac{x-2}{x-1}.$$

例6 设$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$，证明$f(x)=f(-x)$.

证明 因为

$$f(-x)=\frac{1}{-x}\cdot\sin\frac{1}{-x}=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}.$$

所以

$$f(x)=f(-x).$$

例7 求函数$f(x)=\sqrt{4-x^2}+\lg(x-1)$的定义域.

解　这个函数是两项之和，所以当且仅当每项都有定义时，函数才有定义. 第一项的定义域是 $D_1=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$，第二项的定义域是 $D_2=\{x\mid x>1\}$. 所以函数 $f(x)$ 的定义域是

$$D=D_1\cap D_2=\{x\mid 1<x\leqslant 2\},$$

或写为区间 $(1,2]$.

Ⅲ. 函数的表示法

函数有三种表示法：公式表示法；图形表示法；表格表示法. 图形表示法在工程中常用. 例如生产的进度，仪器的记录等. 它的优点是直观，一目了然，它的缺点是不便于分析研究. 表格表示法在设计工作中常用. 它的优点是使用方便，如对数表，三角函数表，它的缺点也是不便于分析研究. 公式表示法在理论研究中、推导论证中使用，它的优点是表达清晰、紧凑，缺点是抽象，不易理解.

Ⅳ. 建立函数关系

寻找函数关系是高等数学所要研究的课题之一. 在这儿我们仅介绍利用简单的几何或物理关系建立函数关系. 在以后的一些章节中还将介绍利用微积分建立函数关系.

例 8　有一块边长为 a 的正方形铁皮，将它的四角剪去适当的大小相等的小正方形，制成一只无盖盒子，求盒子的体积与小正方形边长之间的函数关系.

解　设剪去的小正方形的边长为 x，盒子的体积为 V. 由图 1.8，容易得到

$$V=x(a-2x)^2\quad\left(x\in\left(0,\frac{a}{2}\right)\right).$$

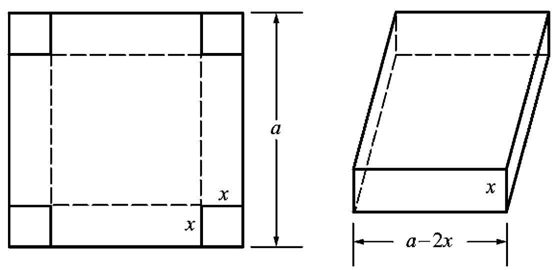

图　1.8

例 9　设有一圆锥容器，容器的底半径为 R 厘米，高为 H 厘米. 现以 a 立方厘米每秒的速率往容器内注入水. 试把容器中的水的容积 V 分别表示成时间 t 及水高 h 的函数（图 1.9）.

解　（1）显然 t 秒时容器中水的容积为

$$V=at.$$

（2）设当容器中水的高度为 h 时水的容积为 V，并设此时水面的半径为 r. 根据锥体体积公式有

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H-\frac{1}{3}\pi r^2(H-h).$$

因为 $\triangle ABC\backsim\triangle ADE$，所以有

$$\frac{r}{R}=\frac{H-h}{H},$$

即

$$r=\frac{R}{H}(H-h),$$

代入锥体体积公式,得

$$V=\frac{\pi R^2 H}{3}\left(1-\left(1-\frac{h}{H}\right)^3\right),\ h\in[0,H].$$

有时变量之间的函数关系较为复杂,需要用几个式子来表示. 如下面的例 10.

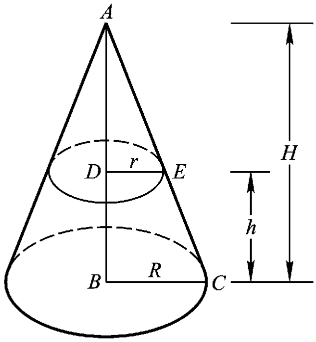

图 1.9

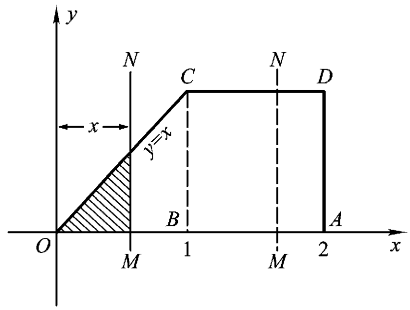

图 1.10

例 10 如图 1.10 所示的图形,在 O 与 A 之间引一条平行于 y 轴的直线 MN,试将 MN 左边阴影部分的面积 S 表示为 x 的函数.

解 当直线 MN 位于区间 $[0,1]$ 内时,即 $x\in[0,1]$ 时.

$$S=\frac{1}{2}x^2.$$

当直线 MN 位于区间 $[1,2]$ 内时,即 $x\in[1,2]$ 时,

$$S=\triangle OBC\ \text{面积}+\text{矩形}\ BCNM\ \text{的面积}$$

$$=\frac{1}{2}+(x-1)=x-\frac{1}{2}.$$

所以面积 S 为

$$S=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2, & \text{当}\ x\in[0,1]\ \text{时},\\[2mm] x-\dfrac{1}{2}, & \text{当}\ x\in(1,2]\ \text{时}.\end{cases}$$

这是在定义域内不同区间上用不同式子表示的一个函数,这种形式的函数,称为分段函数. 要注意它是用两个式子表示的函数,而不是两个函数.

Ⅴ. 反函数

设函数 f 定义在数集 A,其值域为数集 B. 如果对于数集 B 中每一个数 y,数集 A 中都有唯一的一个数 x,使 $f(x)=y$. 记由 y 对应于 x 的规则为 φ,则称 φ 为 f 的反函数,也常称 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数,二者的图形是相同的. 习惯上自变量用 x 表示,因变量用 y 表示. 因此,也可说 $y=\varphi(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数,但这时二者的图形是对称于直线 $y=x$.

求反函数的步骤一般是这样:从 $y=f(x)$ 中解出 x,得 $x=\varphi(y)$ 再将 x,y 分别换为 y,x. 即 $y=\varphi(x)$ 就是 $y=f(x)$ 的反函数.

例 11 求 $y=3x-5$ 的反函数

解 解出 x,得

$$x=\frac{1}{3}(y+5),$$

将 x,y 分别换为 y,x,得

$$y=\frac{1}{3}(x+5).$$

所以,$y=3x-5$ 的反函数为 $y=\frac{1}{3}(x+5)$.

还有许多反函数的例子. 如 $y=\log_a x$ 是 $y=a^x$ 的反函数;$y=\arcsin x$ 是 $y=\sin x$ 的反函数等等.

习　　题

求 9 ~ 12 题的定义域.

9. $y=\sqrt{3-x}$.　　10. $y=\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{x-1}$.

11. $y=\ln(1-x)+\sqrt{x+2}$.　　12. $y=\lg\sin x$.

在 13 ~ 14 题中,$f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 是否相同,为什么?

13. $f(x)=x$ 与 $\varphi(x)=\sqrt{x^2}$.
14. $f(x)=\lg(x^2)$ 与 $\varphi(x)=2\lg x$.
15. 圆柱体内接于高为 h,底半径为 r 的圆锥体内,设圆柱体高为 x,试将圆柱体的底半径 y 和体积 V 分别表示为 x 的函数.
16. 将半径为 R,中心角为 α 的扇形做成一个无底的圆锥体,试将这圆锥体体积 V 表示为 α 的函数.
17. 设

$$f(x)=\begin{cases}2x+3, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ x^2 & x<0.\end{cases}$$

求 $f(0)$,$f\left(-\frac{1}{2}\right)$,$f\left(\frac{1}{2}\right)$.

18. 设 $f(x)=\frac{x+1}{x+5}$. 求 $f(1)$,$f(3)$,$f\left(\frac{1}{x}\right)$,$f\left(\frac{x+1}{x+5}\right)$.
19. 设 $H(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求 $H(x-1)$,$H(x)-H(x-1)$.
20. 设 $f(x+1)=x^2+3x+5$. 求 $f(x)$,$f(x-1)$.

§3. 初 等 函 数

Ⅰ. 基本初等函数及其图形

幂函数 $y=x^a$(a 为任何实数)指数函数 $y=a^x$($a>0$,且 $a\neq 1$)对数函数 $y=\log_a x$($a>0$,且 $a\neq 1$)三角函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$,$y=\sec x$,$y=\csc x$ 及反三角函数 $y=\arcsin x$,

$y=\arccos x$，$y=\arctan x$ 等五类函数统称为基本初等函数.

下面我们把基本初等函数的图形列出来，以便查用.

（1）幂函数 $y=x^a$（a 为任何实数）.

当 $a>0$ 时（讨论 $x\geqslant 0$ 的情形），所有图形都通过点（0，0）及点（1，1），在 $0<a<1$ 的情况下图形向上凸起，在 $a>1$ 的情况下，图形向下凸起. 当 $a<0$ 时（讨论 $x>0$ 的情形），所有图形都通过点（1，1），且当图形上的点远离原点时，图形分别与 x 轴和 y 轴无限靠近（图 1.11）.

（2）指数函数 $y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）.

对于任何 x，均有 $a^x>0$，对任何 a（$a>0$，$a\neq 1$），图形通过点（0，1）. 当 $a>1$ 时，图形向左逐渐与 x 轴靠近. 当 $0<a<1$ 时，图形向右逐渐与 x 轴靠近（图 1.12）.

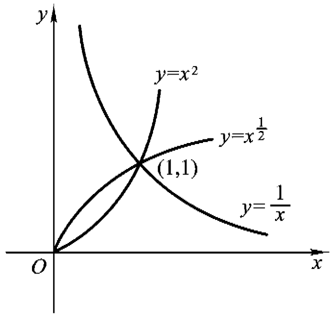

图 1.11

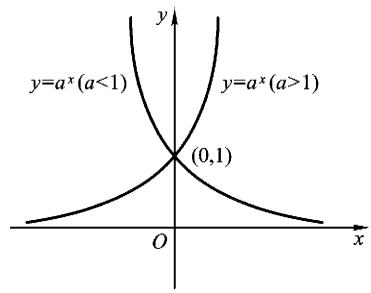

图 1.12

（3）对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）.

对数函数的定义域为 $x>0$，它的图形与其反函数 $y=a^x$ 对称于直线 $y=x$，因而它通过点（1，0）（图 1.13）.

（4）三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 均以 2π 为周期，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 均以 π 为周期（周期定义见后）（图 1.14，1.15，1.16）.

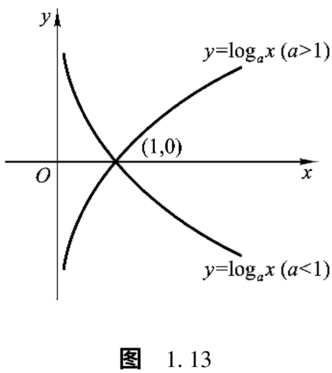

图 1.13

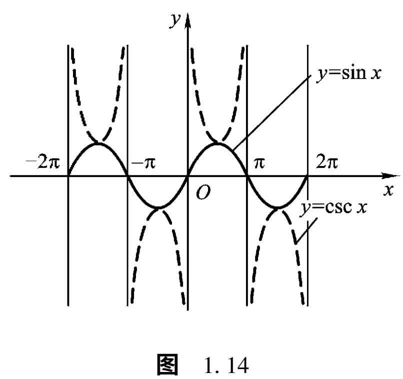

图 1.14

（5）反三角函数.

反三角函数的图形容易由三角函数的图形求得（图 1.17，1.18）.

$$y=\arcsin x \quad 它的主值为 -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2},$$

$$y=\arccos x \quad 它的主值为 0\leqslant y\leqslant\pi,$$

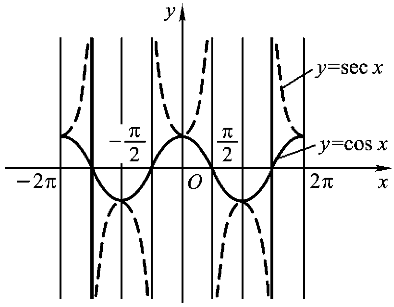

图 1.15

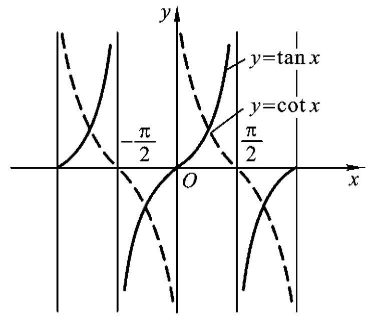

图 1.16

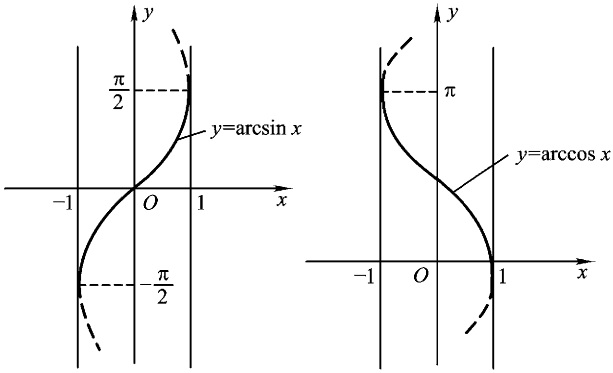

图 1.17

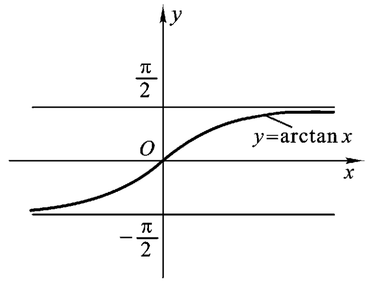

图 1.18

$$y=\arctan x \quad \text{它的主值为} -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}.$$

在图 1.17，1.18 中主值范围内的图形用粗线表示.

Ⅱ. 复合函数

我们先来看一个例子，设 $y=u^3$，$u\in\mathbf{R}$，而 $u=(1-2x)$，$x\in\mathbf{R}$. 那么对于任何一个 $x\in\mathbf{R}$，就有 y 与之对应，其中 $y=(1-2x)^3$. 我们称 $y=(1-2x)^3$ 是复合函数. 一般地讲，设 $y=f(u)$，$u\in B$，而 $u=\varphi(x)$，$x\in A$，其值域 $B_\varphi\subseteq B$，那么 $y=f(\varphi(x))$ 称为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数. 其中 u 称为中间变量.

例 1　问 $y=a^{\sin x}$ 是由哪些基本初等函数复合而成的？

解　令 $u=\sin x$，则

$$y=a^u，\text{而 } u=\sin x.$$

所以 $y=a^{\sin x}$ 是由 $y=a^u$ 与 $u=\sin x$ 复合而成的.

例 2　问 $y=\sqrt{\log_a\left(\frac{1}{x}\right)}$ 是由哪些基本初等函数复合而成的？

解　它可以看作由

$$y=\sqrt{u},\ u=\log_a v,\ v=\frac{1}{x}$$

三个基本初等函数复合而成的.