《大学数学》学习辅导与习题选解(上)

湖南大学数学与计量经济学院　组编
主编　马柏林　孟益民

高等教育出版社

内容简介

本书是编者所编的普通高等教育“十五”国家级规划教材——大学数学系列教材之《大学数学(一)》和《大学数学(三)》(高等教育出版社2003年出版)的配套学习辅导教材,可作为大学理科、工科学生学习一元微积分和多元微积分课程的辅导教材,也可供报考研究生的读者作为参考书。

本书的内容与《大学数学(一)》和《大学数学(三)》的内容平行,虽紧扣原教材但又具有相对的独立性,共分十六章,其中前八章为《大学数学(一)》部分,后八章为《大学数学(三)》部分。每章分内容要点、基本要求、疑难解析和习题选解四部分。

图书在版编目(CIP)数据

《大学数学》学习辅导与习题选解(上)/湖南大学数学与计量经济学院组编;马柏林,孟益民主编.—北京:高等教育出版社,2004.7

ISBN 7-04-014391-7

Ⅰ.大... Ⅱ.①湖...②马...③孟... Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第047655号

策划编辑 王 强 责任编辑 丁鹤龄 封面设计 刘晓翔 责任绘图 黄建英
版式设计 张 岚 责任校对 杨雪莲 责任印制

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷			
开　　本	787×960　1/16	版　　次	年　月　第1版
印　　张	22.75	印　　次	年　月　第　次印刷
字　　数	420 000	定　　价	23.90元

前　言

由湖南大学数学与计量经济学院编写的《大学数学》系列教材是国家教育部“新世纪高等教育教学改革工程”本科教育教学改革项目的研究成果之一，是湖南大学自1989年以来非数学类理工科各专业数学课程教学与教材改革有关成果的延续。

本系列教材对非数学类理工科数学课程所授知识进行了重新分块，进一步理顺了非数学类理工科数学各门课程之间的关系和内涵。在内容叙述与介绍中以物理、力学和工程中的数学模型为背景，辅以代数结构，注意内容间的有机结合，避免不必要的重复；注意连续和离散的关系，加强了函数的离散化处理；内容展开注重由浅入深、由特殊到一般，给学生一个完整的知识体系，并注重培养学生研究问题和解决实际问题的能力；采用了近代数学观点和数学思想方法，以集合、向量及映射贯穿全书，加强了近代数学思想方法和数学实践的内容，为学生今后学习近代数学知识奠定了良好的基础，使之更符合新世纪培养高素质人才的要求。在教材编写中特别注重教育观念的更新、教学内容的更新、教学模式的更新，注重对学生数学素质、计算及应用能力、创新意识和工程意识的培养。教材编写以培养学生的良好数学素质为主要目标，同时为适应近年来随经济发展出现的专业调整和专业知识更新，为在教育教学改革中已调整、拓宽的各专业服务。本系列教材还适当地开设了一些有关的现代数学的知识窗口，以拓宽学生的知识面，使教材具有较宽的口径和较大的适应性。本系列教材中，概念、定理及理论叙述准确、精炼，语言规范，知识点突出，难点分散；证明和计算过程均着重体现近代数学思想方法，注意加强对学习人员的数学素质和创新意识的培养；例题、习题等均经过精选，具有代表性和启发性。本系列教材适合大学非数学类理工科本科生以及各类需要提高数学素质和能力的人员使用。本系列教材中难免会有不妥之处，希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见。

本系列教材包括大学数学（一）（含一元微积分、常微分方程、级数、差分方程等）、大学数学（二）（含代数与几何等）、大学数学（三）（含多元微积分、向量分析、场论、积分变换、偏微分方程等）、大学数学（四）（含概率论、数理统计等）、大学数学（五）（含数值计算、数学建模、计算机与数学等）、大学数学学习辅导与习题选解（上、下）。整套教材由刘楚中任总主编，黄立宏任副总主编。本书的主编为

马柏林、孟益民，参加编写的人员有王利平、付玉霞、郭上江、楚新根、周超英、肖庆丰。

编者诚心希望读者对书中的不足之处，给出批评和指正。

湖南大学《大学数学》教材编写组

2003 年 12 月

目　录

大学数学(一)部分

大学数学(三)部分

大学数学(三)部分

第一章　多元函数微分学

一、内容要点

1. 多元函数的概念;二元函数的几何意义.
2. 有界闭域上连续函数的性质.
3. 偏导数、全微分的概念;全微分存在的必要条件和充分条件.
4. 复合函数、隐函数的求导法.
5. 高阶偏导数与高阶微分的概念.
6. 方向导数和梯度的概念及其计算.

二、基本要求

1. 理解多元函数的概念,理解二元函数的几何意义.
2. 理解二元函数的极限与连续性的概念以及有界闭域上连续函数的性质.
3. 理解偏导数和全微分的概念,会求全微分,了解全微分存在的必要和充分条件,了解全微分形式不变性.
4. 掌握复合函数的一阶、二阶偏导数的求法.
5. 会求隐函数(包括由方程组确定的隐函数)的偏导数.
6. 掌握高阶偏导数与高阶微分的概念,掌握二阶偏导数及二阶微分的计算.
7. 理解方向导数与梯度的概念,掌握其计算方法.

说明:

研究二元函数的主要方法之一是将它转化为一元函数,当自变量限制于 x 轴或 y 轴或某直线上变化时,二元函数就转化为一元函数,这时相应的一元函数的导数分别为二元函数对 x,对 y 的偏导数及方向导数. 若研究(x,y)可沿任意方向,任意路径趋于某点(x_0,y_0)时,二元函数的性质,就要考虑二元函数的可微性. 因此,多元函数微分学中的主要概念是:偏导数、可微性、全微分、方向导数及

与其相关的梯度，还要了解全微分存在的必要及充分条件.

求二元函数的偏导数，本质上就是求一元函数的导数. 对于二元函数我们要特别强调复合函数的求导法，这时复合函数的情形要比一元函数的情形复杂. 它有二元函数与一元函数的复合，二元与二元函数的复合，以及二元与三元函数的复合等. 我们要掌握它们的共同规律，熟练地用于求多元复合函数及隐函数的一阶与二阶偏导数或全微分.

用复合函数微分法可以导出方向导数的计算公式，求方向导数归结为求偏导数（或梯度向量）及方向余弦.

三、疑难解析

1. **求下列极限：**

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　（2）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)-\arcsin(x^2y)}{x^6y^3}$；　（3）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}$；

（4）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$；　（5）$\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

解　（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}}=\ln 2.$

（2）**令** $x^2y=t$，**则**

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-\arcsin t}{t^3}\overset{(\frac{0}{0})}{=\!=}\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{3t^2}$$

$$\overset{(\frac{0}{0})}{=\!=}\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t+\dfrac{1}{2}(1-t^2)^{-\frac{3}{2}}(-2t)}{6t}=-\frac{1}{3}.$$

注 在解多元问题时，经过换元或其他办法（如把一些变量看成常数）把问题转化成一个一元的问题加以解决，这种多元问题‘一元化’的思想，在解多元问题时非常重要.

（3）**解法1**　**当** $a\neq 0$ **时，原式** $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{xy}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}y$，

$\because\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{xy}\overset{\text{令}\, t=xy}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$，　$\therefore$　**原式** $=1\cdot a=a.$

当 $a=0$ **时，**　$\because$　$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y\neq 0}}\dfrac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y\neq 0}}\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot y=1\cdot 0=0.$

且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a\\ y=0}}\dfrac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a\\ y=0}}0=0$， ∴ 原式 $=0$.

解法 2 ∵ $(x,y)\to(0,a)$ 时 $xy\to 0$， ∴ $\sin xy\sim xy$.

故 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{xy}{x}=a$.

(4) ∵ $(x,y)\to(0,0)$ 时 $(x+y)\to 0$，$\left|\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}\right|\leqslant 1$，

∴ 原式 $=0$ （∵ 有界量 × 无穷小 = 无穷小量）.

(5) ∵ $x\to+\infty$，$y\to+\infty$ 时，$x>0$，$y>0$.

$$\therefore\quad 0\leqslant\frac{xy}{x^2+y^2}\leqslant\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\frac{1}{2},$$

故 $0\leqslant\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}$，

∵ $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}=0$， ∴ 原式 $=0$.

小结 从本题中我们可以看到：一元函数极限的很多方法，都可在多元函数中使用. 它们是：

① 初等函数连续——(1) 题；

② 换元——(2) 题；

③ 极限的四则运算法则——(3) 题解法 1；

④ 等价无穷小代换——(3) 题解法 2；

⑤ 无穷小量的性质——(4) 题；

⑥ 夹逼定理——(5) 题.

但是一元函数极限中最有效的武器洛必达法则不能在多元函数极限中使用.

2. 设 $z=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

(1) 求函数 z 的全微分；

(2) 问在 $(0,0)$ 点，函数是否连续？是否可导？是否可微？一阶偏导数是否连续？

解 (1) 为了加深印象，首先请读者观察下列解法是否正确？

“当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$z'_x=\dfrac{2xy^4-x^3y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$，由对称性 $z'_y=\dfrac{2yx^4-y^3x^2}{(y^2+x^2)^{5/2}}$，

故 $$\mathrm{d}z = z'_x\mathrm{d}x + z'_y\mathrm{d}y = \frac{(2xy^4 - x^3y^2)\mathrm{d}x + (2yx^4 - y^3x^2)\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{5/2}}.$$

当$(x,y)=(0,0)$时，$z'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{z(0+\Delta x,0)-z(0,0)}{\Delta x}=0$，同理有$z'_y(0,0)=0$.

$$\therefore \quad \mathrm{d}z = z'_x\mathrm{d}x + z'_y\mathrm{d}y = 0 \text{”}$$

问以上解法正确吗？

答 当$(x,y)\neq(0,0)$时，解法是正确的.

当$(x,y)=(0,0)$时，解法是错误的. 因为当$(x,y)\neq(0,0)$时，z'_x,z'_y连续（$\because$ 是有定义的初等函数），$\therefore$ z 可微且 $\mathrm{d}z = z'_x\mathrm{d}x + z'_y\mathrm{d}y$. 而当$(x,y)=(0,0)$时，$z'_x,z'_y$的连续性没有证明，而可偏导$\nRightarrow$可微.

正确解法为：

当$(x,y)=(0,0)$时，$\because$ $z'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{z(0+\Delta x,0)-z(0,0)}{\Delta x}=0$（注：和一元函数的导数一样，分段点的导数必须用定义求），同理$z'_y(0,0)=0$，

又$\because$ $$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z - [z'_x(0,0)\Delta x + z'_y(0,0)\Delta y]}{\rho} \qquad (*)$$

$$\xlongequal{\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{[z(0+\Delta x,0+\Delta y)-z(0,0)]-(0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x^2\Delta y^2}{(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})^4}.$$

$$\because \quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}}\frac{\Delta x^2\Delta y^2}{(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})^4}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2(k\Delta x)^2}{(1+k^2)^2\Delta x^4}=\frac{k^2}{(1+k^2)^2},$$

$\therefore$ $(*)$式极限不存在.

$\therefore$ z 在$(0,0)$处不可微.

（2）$\because$ $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}z(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\xlongequal[y=r\sin\theta]{\text{令 } x=r\cos\theta}\lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\text{变}}}\frac{r^4(\cos^2\theta\sin^2\theta)}{r^3}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ \theta\text{变}}}r\cdot(\cos^2\theta\sin^2\theta)=0 \quad (\because r\to 0, |\cos^2\theta\sin^2\theta|\leqslant 1).$$

$\therefore$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}z(x,y)=0=z(0,0)$，故 z 在$(0,0)$连续.

又由(1)可知，z 在$(0,0)$可导但不可微.

下面证明 z'_x,z'_y 在$(0,0)$处不连续.

如若不然，则 z'_x,z'_y 中至少有一个连续，不妨设 z'_x 在$(0,0)$连续，则由对称性，z'_y 也在$(0,0)$连续，因此 z 在$(0,0)$可微，矛盾. 所以 z'_x,z'_y 在$(0,0)$均不连续.

小结　求分段函数在分段点(x_0,y_0)的全微分，应牢记下述程序：

① 用定义求偏导数 $z'_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{z(x_0+\Delta x,y_0)-z(x_0,y_0)}{\Delta x}$，$z'_y(x_0,y_0)$，如偏导数不存在，则函数在 (x_0,y_0) 不可微. 若偏导数都存在，则进行下述程序②.

② 计算 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z-(z'_x\Delta x+z'_y\Delta y)}{\rho}$，其中 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 且 $\rho\to 0\Leftrightarrow \begin{matrix}\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\end{matrix}$，$\Delta z=z(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-z(x_0,y_0)$，$z'_x=z'_x(x_0,y_0)$，$z'_y=z'_y(x_0,y_0)$.

如果此极限为 0，则函数在点 (x_0,y_0) 可微. 否则不可微.

③ 注意：

$$z'_x,z'_y\ \text{连续}\ \Rightarrow\ z\ \text{可微}\ \begin{matrix}\nearrow z\ \text{可偏导}\\ \searrow z\ \text{连续}.\end{matrix}$$

3. 求下列复合函数的偏导数或导数：

(1) 设 $z=\sin(2u+3v)$，$u=xy$，$v=x^2+y^2$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解法 1 $\because\quad z=\sin(2u+3v)=\sin(2xy+3x^2+3y^2)$，

$$\therefore\quad \frac{\partial z}{\partial x}=(\cos(2xy+3x^2+3y^2))(2xy+3x^2+3y^2)'_x$$
$$=(2y+6x)\cos(2xy+3x^2+3y^2),$$

由对称性知 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=(2x+6y)\cos(2yx+3y^2+3x^2)$.

解法 2 $\because\quad z$ 通过中间变量 u,v 是自变量 x,y 的复合函数.

$$\therefore\quad \frac{\partial z}{\partial x}=z'_u u'_x+z'_v v'_x=2\cos(2u+3v)\cdot y+3\cos(2u+3v)\cdot 2x$$
$$\xlongequal[v=x^2+y^2]{u=xy}(2y+6x)\cos(2xy+3x^2+3y^2).$$

同理 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=(2x+6y)\cos(2yx+3y^2+3x^2)$.

(2) 设 $u=\dfrac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，$y=a\sin x$，$z=\cos x$，求 $\dfrac{du}{dx}$.

解法 1 $\because\quad u=\dfrac{1}{a^2+1}[e^{ax}(y-z)]=\dfrac{1}{a^2+1}[e^{ax}(a\sin x-\cos x)]$，

$$\therefore\quad \frac{du}{dx}=\frac{1}{a^2+1}[e^{ax}a(a\sin x-\cos x)+e^{ax}(a\cos x+\sin x)]=e^{ax}\sin x.$$

解法 2 $\dfrac{du}{dx}=u'_x x'_x+u'_y y'_x+u'_z z'_x$

$$=\frac{e^{ax}\cdot a(y-z)}{a^2+1}\cdot 1+\frac{e^{ax}\cdot 1}{a^2+1}a\cos x+\frac{e^{ax}\cdot(-1)}{a^2+1}(-\sin x)$$
$$\xlongequal[z=\cos x]{y=a\sin x}e^{ax}\sin x.$$

小结

① **具体函数的复合求导时建议用代入法，即解法** 1 **求解.**

② **如用复合求导法即解法** 2 **求解，一定要弄清函数的关系，且最后要把中间变量化为自变量并化简.**

4. **设** f **具有二阶连续偏导数或导数，求** $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

(1) $z=f(xy^2,x^2y)$； (2) $z=f(x^2+y^2)$.

解 (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=(f(xy^2,x^2y))'_x=f'_1\cdot(xy^2)'_x+f'_2\cdot(x^2y)'_x=y^2f'_1+2xyf'_2$；

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_1\cdot(xy^2)'_y+f'_2\cdot(x^2y)'_y=2xyf'_1+x^2f'_2；$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(y^2f'_1+2xyf'_2)'_x=y^2(f'_1)'_x+(2xy)'_xf'_2+2xy(f'_2)'_x$$

$$=y^2[f''_{11}\cdot y^2+f''_{12}\cdot 2xy]+2yf'_2+2xy[f''_{21}\cdot y^2+f''_{22}\cdot 2xy]$$

$$\xlongequal{\because f''_{12}=f''_{21}}y^4f''_{11}+4xy^3f''_{12}+4x^2y^2f''_{22}+2yf'_2；$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(y^2f'_1+2xyf'_2)'_y=(y^2)'_yf'_1+y^2(f'_1)'_y+(2xy)'_yf'_2+2xy(f'_2)'_y$$

$$=2yf'_1+y^2[f''_{11}\cdot 2xy+f''_{12}\cdot x^2]+2xf'_2+2xy[f''_{21}\cdot 2xy+f''_{22}\cdot x^2]$$

$$=2xy^3f''_{11}+5x^2y^2f''_{12}+2x^3yf''_{22}+2yf'_1+2xf'_2；$$

由对称性知 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^4f''_{22}+4yx^3f''_{21}+4y^2x^2f''_{11}+2xf'_1$.

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=[f(x^2+y^2)]'_x=f'\cdot(x^2+y^2)'_x=2xf'$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2yf'.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(2xf')'_x=(2x)'_xf'+2x(f')'_x=2f'+4x^2f''；$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(2xf')'_y=4xyf''；$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2yf')'_y=2f'+4y^2f''.$$

5. **设** $\mathrm{e}^z=xyz$，**求** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

分析 **方程中有** 3 **个变量，所以有** 2 **个自变量，故** $z=z(x,y)$.

解法 1 $\because$ $z=z(x,y)$，**方程两边对** x **求导(** y **视为常数).**

$\therefore \quad e^z z'_x = (xy)'_x z + xyz'_x$,

$\therefore \quad z'_x = \dfrac{yz}{e^z - xy}$,注意到 $e^z = xyz$,

$\therefore \quad z'_x = \dfrac{yz}{xyz - xy} = \dfrac{z}{xz - x}$,

$\therefore \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (z'_x)'_x = \left(\dfrac{z}{xz - x}\right)'_x = \dfrac{z'_x(xz - x) - z(1 \cdot z + xz'_x - 1)}{(xz - x)^2}$,

再将 $z'_x = \dfrac{z}{xz - x}$代入并化简.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{z(xz - x) - z(z^2 x - zx + xz - xz + x)}{(xz - x)^3} = \frac{-z^3 + 2z^2 - 2z}{x^2(z - 1)^3}.$$

(注 利用原方程简化计算或化简结果,是隐函数计算中经常用到的).

解法 2　直接利用公式计算,

令 $f(x,y,z) = e^z - xyz$,则

$F'_x = -yz, F'_y = -xz, F'_z = e^z - xy$.

$$\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{yz}{e^z - xy} = \frac{yz}{xyz - xy} = \frac{z}{xz - x},$$

以下同(1)求解.

6. 设$\begin{cases} x = -u^2 + v + z, \\ y = u + vz. \end{cases}$ 求$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial z}$.

解法 1　因为方程组中有 5 个变量,2 个方程,所以有 $5 - 2 = 3$ 个独立自变量,选 x, y, z 为独立自变量,则 $u = u(x,y,z), v = v(x,y,z)$.

对 x 求导(视 y、z 为常数),得

$$\begin{cases} 1 = -2uu'_x + v'_x, \\ 0 = u'_x + zv'_x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'_x = \dfrac{-z}{2uz + 1} = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \\ v'_x = \dfrac{1}{2uz + 1} = \dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

对 z 求导得$\begin{cases} 0 = -2uu'_z + v'_z + 1, \\ 0 = u'_z + v'_z z + v. \end{cases} \Rightarrow u'_z = \dfrac{z - v}{2uz + 1} = \dfrac{\partial u}{\partial z}$.

解法 2　等式两边取微分(独立自变量的选取同解法 1),得

$\begin{cases} dx = -2u\,du + dv + dz, \\ dy = du + z\,dv + v\,dz, \end{cases}$ 将 du, dv 看作未知数可解得

$$du = \frac{-z\,dx + (z - v)\,dz + dy}{2uz + 1}, dv = \frac{2u\,dy + dx - (1 + 2uv)\,dz}{2uz + 1}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{z}{2uz + 1}, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2uz + 1}, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z - v}{2uz + 1}.$$

（注：利用微分运算解题是一种有效的方法，它在全微分方程、曲线积分与路径无关等处还要用到.）

7. 求函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 沿点 A 指向 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数.

解 先求 $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦：$\overrightarrow{AB}=(3-1,-2-0,2-1)=(2,-2,1)$，

$$l=\overrightarrow{AB}/|\overrightarrow{AB}|=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}(2,-2,1)=\frac{1}{3}(2,-2,1).$$

再求

$$\mathbf{grad}\, u\big|_{(1,0,1)}=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\bigg|_{(1,0,1)}$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\left(1,\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)\bigg|_{(1,0,1)}$$

$$=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right).$$

于是

$$\frac{\partial u}{\partial l}\bigg|_{(1,0,1)}=\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(1,0,1)}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{(1,0,1)}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{(1,0,1)}\cos\gamma$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

四、习题选解

习题 1-1

2. 设 $f(x,y)=x^3-2xy+3y^2$，求

(1) $f(-2,3)$；(2) $f\left(\frac{1}{x},\frac{2}{y}\right)$；(3) $\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$.

解 (1) $f(-2,3)=(-2)^3-2\times(-2)\times3+3\times3^2=31$.

(2) $f\left(\frac{1}{x},\frac{2}{y}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^3-2\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{2}{y}+3\cdot\left(\frac{2}{y}\right)^2=\frac{1}{x^3}-\frac{4}{xy}+\frac{12}{y^2}$.

(3) $$\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}=\frac{1}{h}\{[x^3-2x(y+h)+3(y+h)^2]-[x^3-2xy+3y^2]\}$$

$$=6y-2x+3h.$$

3. 设 $F(x,y)=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$，$F(x,1)=x$，求 $f(x)$ 及 $F(x,y)$ 的表达式.

解 $F(x,1)=1+f(\sqrt{x}-1)=x$，

令 $\sqrt{x}-1=t$，则 $x=(t+1)^2$.

故 $f(t)=(t+1)^2-1=t^2+2t$，

即
$$f(x)=x^2+2x.$$
$$F(x,y)=\sqrt{y}+(\sqrt{x}-1+1)^2-1=\sqrt{y}+x-1.$$

习题 1-2

1. **求下列各极限：**

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$.

分析 求多元函数的极限可利用函数的连续性和一元函数求极限的一些方法.

解 由函数的连续性得
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{1-xy}{x^2+y^2}=\frac{1-0}{0+1}=1.$$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{\sin xy}{x^2+y^2}$.

解 $$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}(x^2+y^2)=+\infty,\text{故}\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{1}{x^2+y^2}=0.$$
而 $|\sin xy|\leqslant 1$，由无穷小量的性质知 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{\sin xy}{x^2+y^2}=0$.

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$.

解 用一元函数求极限的方法.
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{4-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\frac{1}{4}.$$

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$.

解 利用夹逼定理.
$$0\leqslant\frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}=\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2y^2+1}+1)}\leqslant\frac{x^2y^2}{2|xy|(\sqrt{x^2y^2+1}+1)}$$
$$=\frac{|xy|}{2(\sqrt{x^2y^2+1}+1)},$$
而
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{|xy|}{2(\sqrt{x^2y^2+1}+1)}=0,$$
故
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}=0.$$